Matematická analýza

Matematická analýza je jedním z nejkrásnějších oborů matematiky.

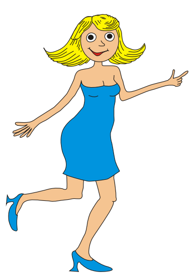
Vím o čem mluvím. Kdo tomu nevěří, ať se podívá do Průvodce.

Matematická analýza je tradičně základem vysokoškolského studia matematiky na celém světě.

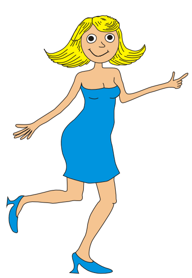
Hodně radosti při jejím zvládání přeji jako vaše přednášející.

PŘEDNÁšKA

Přednáška bude obsahovat výklad jednotlivých partií.
Základní látka bude doplňována poznámkami, příklady a otázkami.



Předpokládám, že ty poznámky budete číst, příklady řešit na otázky odpovídat.



Přiznávám, že to nejsou jenom jednoduchosti.

Při zkoušce bude potřeba předvést nemalé množství znalostí ústně i písemně.

Doporučuji si důležité partie zkusit napsat vlastnoručně, abyste je mohli předvést u zkoušky.

Když něčemu nerozumíte, není to důkaz toho, že na to nejste.

Zeptejte se klidně kdykoliv. Ráda pomohu.

POZNÁMKY

Poznámky je takové "druhé podání"přednášky. Jsou zde diskutovány doplňující informace, jiné přístupy a tak.

Kromě přednásejících je nikdo nečte. Teda myslel jsem "nečte rád".

PŘÍKLADY

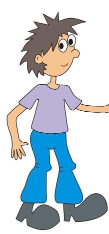
Příklady ukazují, co se tak zpravidla v této kapitole bude vyžadovat ke spočítání.

Na první pohled vypadají děsivě, ale ono se to časem poddá.

Naivka.

OTÁZKY

Otázky jsou lákadlem pro zvídavé. Pěkně se při jejich čtení přemýšlí.



Mohu-li doplnit, tak se při nich i pěkně usíná.

Věnujte se poznámkám, příkladům a otázkám "přiměřeně". Ale až v druhé řadě.

CVIČENÍ

Cvičení doplňuje přednášku o typové příklady.

Na každý typový příklad je třeba samostatně spočítat další příklady.

Je třeba spočítat moře příkladů.

Tímto se představil cvičící. Ten se bude o ta cvičení starat.

Aby bylo jasno, přednesená látka je soubor rad, návodů a triků, které je třeba umět používat.

K tomu slouží cvičení a samostatná práce.

Je to jako v počítačové hře. Sbíráte kouzelné zbraně, pijete zázračné nápoje, získáváte "skills"a pak je musíte v pravý okamžik použít.

Zkouška je něco jako tlupa nepřátel, které musíte přemoci. Kdo nemá "skills", je ztracen, přátelé.

STUDIUM

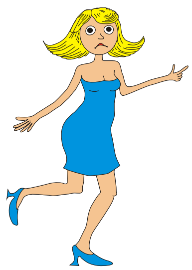
Ke zvládnutí látky je třeba se učit teorii, počítat příklady a pracovat na sobě.

Já to teda zkusím, mami.

To je náš student. Není s ním lehké pořízení.

Tati, mohl bys to, prosím, zopakovat, nerozumím tomu.

A toho mám něco naučit! Je to dřina.



Pokud někde budete dělat něco zakázaného, budu se zlobit!

Pokud bude někdo (kdokoliv) blbnout a dělat zbytečnosti, budu ho strašit.

Pokud někde budou dělat ze mne troubu, budu se bránit.

KONZULTACE

A když vyjdou hvězdičky a všichni už spí, poradím já. Například: Víte, že na světě jsou dvě nejdůležitější pravidla?

*Pravidla světa:

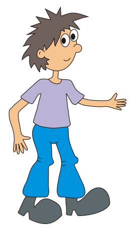
1. Nikdy neříkejte ostatním všechno, co víte.

:-)

Tím se představila Sova. K té můžete chodit na konzultace ve dne v noci.

Sova je z nás nejchytřejší.

To, co zde bude povídat Sova označíme hvězdičkou. Jsou to většinou poněkud náročnější partie a lze je vynechat. Sova s hvězdičkami je začátek náročnější partie, Sova se sluníčkem označuje konec.



Slyšel jsem, viděl jsem, usnul jsem . . .

Za všechny pěkné výsledky v matematice můžu já a moji kamarádi. Já jsem skřítek Simplex a rád vymýšlím příklady.

Za všechny vypečené výsledky v matematice můžu zase já a moji kamarádi. Já jsem protiskřítek Complex a rád vymýšlím protipříklady.

S (proti)skřítkama budu (kama)rád.

Pro dobrý začátek je dobré zopakovat středoškolskou matematiku.

K tomu posloužím rád ve Cvičení.

Mnoho štěstí a nashledanou v další lekci.

UČENÍ

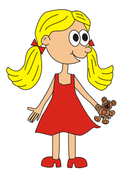
V části učení najdete moje nejvypečenější chibyčki.

Někde to má smysl opravovat, jinde je i to škoda.

Nikdy to raději nepoužívejte.

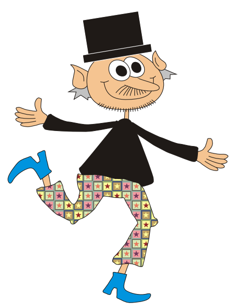
Někdy se chlubím před sestřičkou a před babičkou, co všechno už umím.

Náš kluk je šikulka. Ráda ho poslouchám. Nesu mu zrovna dobroty.



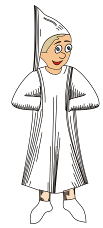
Bráška je pošuk, neumí ani správně dělit (dobroty). Mám to s ním trápení.

BONUSY



Někdy pomohu jenom já. Na kouzla není nikdo lepší. Moje nejlepší najdete v části bonusy.

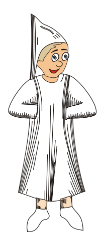
Dík, dědo.



Já se ani nemusím snažit kouzlit, všechno mi vychází samo.

Já se ani nemusím trápit, čarovat mě baví.

Budete mi pomáhat a za to vám budu nechávat dobroty od babičky. O.K. ?

O.K.

11

CVIČENÍ

Cvičení 1:

Výroky a množiny

Problematika výroků a množin má dvě roviny.

Elementární teorie je známa ze střední školy. Tuto budeme používat.

Druhá rovina je poměrně náročná, je zcela přesná a jde najít v Průvodci.

Budeme používat malý a velký kvantifikátor, množiny čísel a obvyklé věci ze středoškolské matematiky.

Velký Kvantifikátor $\forall$ je formulka, která donutí všechny další výroky v řadě za ním (t.j. nás) sloužit do roztrhání těla.

Musí být totiž ochotni ke každému objektu, který jim Velký Kvantifikátor předloží, dokázat zbytek tvrzení.

Ve skutečnosti se vlastně dokazuje zbytek tvrzení s "parametry", které předloží Velký Kvantifikátor.

VĚTA. "Ka každému vejci existuje slepice, která ho snesla."

Důkaz. Velký Kvantifikátor nachystá vejce, a zbytek tvrzení (my) musí hledat tu šikovnou slepici, která ho snesla. Tak se mohou bavit do nekonečna ... . Pokud ovšem zbytek tvrzení nejde dokázat přímo, například sporem: kdyby žádná slepice nebyla, tak by to vejce neexistovalo, spor. $\diamond$

To mi je jasné.

Malý Kvantifikátor $\exists$ je formulka, která (nás) donutí hledat odpověď na hádanku, která spočívá v platnosti dalších výroků v řadě za Malým Kvantifikátorem.

Musíme být šikovní a najít, v čem hádanka spočívá.

VĚTA. "Existuje slepice, která snesla alespoň dvě vejce."

Důkaz. Malý Kvantifikátor nám zadal hádanku, my budeme buď hledat konkrétní superslepici, nebo můžeme spočítat vejce a slepice, pokud je počet vajec větší, máme existenční důkaz hotov. $\diamond$

Tu bych chtěl.

Jak to budeme psát?

Ukážeme příklad.

Příklad. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

Řešení. Důkaz. Máme dokázat, že $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

Zvolíme $x \in \mathbb{R}$.

Pokud $x \geq 0$, pak vynásobením této rovnosti tou samou rovností dostaneme $x^2 \geq 0$.

Pokud $x \leq 0$, pak vynásobením této rovnosti tou samou rovností dostaneme $x^2 \geq 0$.

Probrali jsme všechny možnosti. Tedy důkaz je hotov.

Matematická indukce

Zkusíme příklad na použití matematické indukce.

Příklad. $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $n.0 = 0$.

Řešení. Důkaz. Označíme $T(n)$ výrok "$n.0 = 0$". Budeme postupovat ve dvou krocích

(i) $T(1)$ platí ? Zkusíme ověřit, píšeme pro $n = 1$ výrok $T(1)$, tedy $1.0 =^? 0$, toto platí, tedy ?=ANO. $T(1)$ platí.

(ii) $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ platí ?
Nechť platí $T(n)$ pro určité n. Zkusíme ověřit, zda platí $T(n+1)$. Použijeme indukční předpoklad $0 = n.0$ a píšeme $0 = n.0 = n.0 + 0 = (n+1).0$. Tedy $T(n+1)$ platí. ?=ANO.

Podle principu matematické indukce je důkaz hotov.

Tvrzení i jeho důkaz je někdy limonádka.

Podstatné je, zkusit si důkazovou techniku na nejjednodušší možné situaci. Komplikovanější případ pak řešíme tak, že pouze do některých částí důkazu dosazujeme těžší kroky.

Je to prostě blokové schéma postupu, které se hodí obecně.

Pokud někdy nevíme, zda nějaký vztah platí, je třeba ho při psaní označit jako "?"a pokud se na konci ukáže, že to byla pravda, tak se to zapíše "?=ANO".

Příklady pak vypadají nějak takhle:

Příklad. Najděte nejmenší $N \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \geq N \Longrightarrow 2^n \geq n^2 \ .$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že nerovnost neplatí pro $n = 3$, dokážeme tvrzení pro $N = 4$. To bude to nejmenší možné.

Postupujeme indukcí.

1. Pro $n = 4$ tvrzení platí.
2. Indukční krok $T(n) \Longrightarrow T(n+1)$ dá trochu počítání. Není obtížný.

Používá se kouzelná věta $2^4 = 4^2$.

Úspěšně vyřešil napoprvé bez chyb jenom 1 z 10. Nic si z toho nedělejte ...

Já to nebyl.

Příklad pro radost:

Příklad. Na kruhové dráze jsou rozmístěny kanystry s benzínem. Benzínu je celkově dost na to, aby bylo možné objet celý okruh. Existuje vždy vhodné místo ke startu ?

Řešení.

Je to jasňačka pomocí matematické indukce.

Nechť je k okruhu potřeba 1 hektolitr benzínu.

Tvrzení může například znít takto: Pro n kanystrů, které obsahují dobromady hektolitr benzínu a které jsou rozmístěny na dráze, existuje startovací pozice, ze které je možné objet okruh VE SMĚRU HODINOVÝCH RUČIČEK.

A pak se použije indukce. Je to úplně jasné?

Úplně jasné je, že bych na podobném principu rád dostával kapesné. Zatím mi to nikdy nevystačí . . .

Zaříkávadla

Zkusíme si nějaké zaříkávadlo. To jsou protivně napsaná tvrzení.

Příklad. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \in (a, a + \varepsilon) \Longleftrightarrow x \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$

To jsou mi věci, nevypadá to příliš růžově.

Řešení. Nechť je a pevně dáno. Zvolíme $\alpha = a + 1$, $\varepsilon = 2$ a je hotovo.

To je jasná informace.

Příklad. $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \in (a, a + \varepsilon) \Longleftrightarrow x \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$

To jsou mi věci, vypadá to bledě.

Řešení. Položíme $a = 0$. Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existuje $x = a + \alpha + \varepsilon + 3333$, které neleží v žádném z intervalů. Tedy ekvivalence platí.

To akceptuje běžný člověk jen velmi nerad. Samozřejmě je to "nekalý trik", ale je to pravdivé tvrzení.

Nevyřešil nikdo z 10.

Jsem to ale kanón, to jsem je všecky převezl. Už se těším na repete.

Já jsem prostě moc důvěřivý.

Příklad.
$\exists M \subset \mathbb{R}\ \exists! f : M \to \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \ :\ f(x^2) = 1.$

Řešení. Hledáme množinu M tak, aby existovala právě jedna funkce s tou vlastností.

Ta vlastnost říká něco o hodnotách funkce f v nezáporných bodech. Pokud by množina M obsahovala i záporné body, tak by tam funkce f mohla být libovolná.

Tedy zvolíme množinu $M = [0, \infty)$. Pak existuje právě jedna funkce $f(x) = 1$, která vyhovuje.

To není malé vítězství. Pokud je to jasné, tak blahopřeju :-)

Vyřešil 1 z 10.

TO jsem byl já.

Udělám za odměnu makové buchty.

Příklad. Určete množinu

$$\{a \in \mathbb{R} \,:\, \forall x \in \mathbb{R} \,:\, |x-2| \leq 1 \Longrightarrow x^2 - ax > 5\} \,.$$

Tak se ukažte, myslitelé!

Řešení. Musí být splněny podmínka $x^2 - ax > 5$ v krajních bodech intervalu $x = 1$, $x = 3$ a také ve vrcholu paraboly (víme jaké?). To díky průběhu kvadratické funkce stačí.

Vyřešili 2 z 10.

Jestli to nezkontrolujete a nedoplníte, tak …

Komplexní čísla

Pracujeme s komplexními čísly $z = x + iy$, kde i je komplexní jednotka.

Je to trochu technicky náročné, protože výpočty s komplexními čísly nejsou vždy "vidět".

Zkusíme trochu počítání.

Příklad. Najděte obor hodnot zobrazení $f(x+iy) = x^2 + iy$.

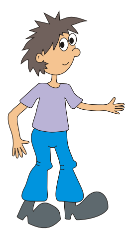
Řešení. Hledáme, která $a + ib \in \mathbb{C}$ jsou obrazem nějakého $x + iy \in \mathbb{C}$ při zobrazení f. Tedy řešíme rovnici $x^2 + iy = a + ib$ s parametry $a, b \in \mathbb{R}$.

Porovnáme reálnou a imaginární část a dostaneme $x = \pm\sqrt{a}$, $y = b$, pokud $a \geq 0$. Tedy obor hodnot je $\{a + ib \in \mathbb{C} \ : \ a \geq 0\}$.

Vyřešili 3 z 10.

Takhle hledáne obor hodnot čehokoliv. Je to prostě návod.

Moje KNOW-HOW spočívá ve vitamínech.



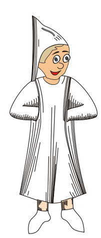
Moje KNOW-HOW odpočívá nejraději v posteli.

Nedá mi to, a tak se dáme ještě do teorie množin.

Ukážeme, co je a co není množina.

Například vyvrátíme pověru, že množina je soubor objektů s určinou vlastností.

Myslete si každý nějakou množinu.



Myslím si množinu A všech množin. Vidíte, jak je veliká, například se sama obsahuje: $A \in A$. Ááááááááááááá.

Myslím si množinu B všech množin, které se neobsahují jako prvek. Jestliže $B \in B$, tak $B \notin B$, a jestli $B \notin B$, tak $B \in B$. SPOR!!! Mám superradost!!! Béééééééééééé!!!

A v tom je to zakopané. To se právě nesmí.

To je jako když definuji (zvolím, jmenuji) holiče jako toho člověka, který se sám neholí. Kdo pak holí holiče? Holič nebo neholič?

Tedy zlobí tvrzení, které mluví o sobě, o pravdivosti a o negování. V každé teorii budou zlobit tvrzení typu: "Toto není pravda."

Abychom se tomu vyhnuli, budeme v naší teorii mluvit o množinách, které dovedeme sestrojit, tedy prázdná množina, dvouprvková množina jejích podmnožin a tak dál. Přidáme sjednocení, doplňky a přežijeme. Tak vybudujeme teorii množin tím, že stanovíme axiomy, jak DĚLAT množiny.

A co je tedy "množina všech množin"? To není množina, ale je to větší objekt a říká se mu třída.

Ale bylo to alespoň trochu adrenalinu, než se to takhle utnulo, nelí-liž pravda?

Než se to takto "utnulo", měla řada matematiků těžké spaní.

BTW, teorie množin by si zasloužila jestě právě jednu obrazovku, ale nechce se mi . . .

BTW, pokud přijdete s novým paradoxem, který není založen na triku "Toto není pravda.", budu vám říkat Superskřítek.

Konec cvičení 1.

UČENÍ

Učení 1:

Z analýzy vyletěli všichni přede mnou, vyletím taky.

Oni vyletěli na lenost, tebe to taky čeká.

Na cvičení koukám a docela tomu rozumím.

Když nebudeš počítat sám, vyletíš.

$$\forall\exists \overset{?}{\Longleftrightarrow} \exists\forall$$

Komutativita, to je dobrý vzoreček.

Na každého existuje bič, ale existuje také bič na každého (analýza).

Součtové vzorečky patří k povinné výbavě zálesáka. Já si je nosím s sebou, abych to nekazil.

$$
\begin{aligned}
1 &= \sin^2 A \;+\; \cos^2 A \qquad &(1)\\
\sin 2A &= 2\sin A\cos A \qquad &(2)\\
\sin^2 A &= \frac{1}{2}(1-\cos 2A) \qquad &(3)\\
\cos^2 A &= \frac{1}{2}(1+\cos 2A) \qquad &(4)\\
\sin(A+B) &= \sin A\cos B \;+\; \cos A\sin B \qquad &(5)\\
\sin(A-B) &= \sin A\cos B \;-\; \cos A\sin B \qquad &(6)\\
\cos(A+B) &= \cos A\cos B \;-\; \cos A\sin B \qquad &(7)\\
\cos(A-B) &= \cos A\cos B \;+\; \cos A\sin B \qquad &(8)\\
2\sin A\sin B &= \cos(A-B) \;-\; \cos(A+B) \qquad &(9)\\
2\cos A\cos B &= \cos(A-B) \;+\; \cos(A+B) \qquad &(10)\\
2\sin A\sin B &= \cos(A-B) \;-\; \cos(A+B) \qquad &(11)\\
2\sin A\cos B &= \sin(A-B) \;+\; \sin(A+B) \qquad &(12)\\
\sin A+\sin B &= 2\;\sin\frac{A+B}{2}\;\cos\frac{A-B}{2} \qquad &(13)\\
\sin A-\sin B &= 2\;\cos\frac{A+B}{2}\;\sin\frac{A-B}{2} \qquad &(14)\\
\cos A+\cos B &= 2\;\cos\frac{A+B}{2}\;\cos\frac{A-B}{2} \qquad &(15)\\
\cos A-\cos B &= 2\;\sin\frac{A+B}{2}\;\sin\frac{B-A}{2} \qquad &(16)
\end{aligned}
$$

Pro všechny dva různé body . . .

Jsi udatný v češtině.

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
E	ε	epsilon
Z	ζ	zéta
H	η	éta
Θ	θ	theta
I	ι	ióta
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mý
N	ν	ný
Ξ	ξ	ksí
O	o	omikron
Π	π	pí
P	ρ	ró
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	ypsilon
Φ	ϕ	fí
Φ	φ	fí
X	χ	chí
Ψ	ψ	psí
Ω	ω	omega

Jsem udatný i v řečtině.

Hlavně s sebou nos ε, s tím nejdál dojdeš.

Konec učení 1.