Zavedení a vlastnosti reálných čísel

Seznámíme se podrobněji s reálnými čísly a číselnou osou.

Reálná čísla jsou základním kamenem matematické analýzy.

Sestrojení reálných čísel není jednoduché.

Konstrukce reálných čísel sice není náplní matematické analýzy, ale množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je pro matematickou analýzu základním kamenem a je proto nutné být s vlastnostmi $\mathbb{R}$ v tomto kurzu dobře obeznámen.

V této části bude naznačena konstrukce reálných čísel a budou popsány jejich základní vlastnosti.

Začneme od začátku.

PŘIROZENÁ, CELÁ A RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Předpokládá se, že množina $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ přirozených čísel a její vlastnosti jsou známé:

- na $\mathbb{N}$ existuje operace sčítání;
- na $\mathbb{N}$ existuje operace násobení;
- na $\mathbb{N}$ existuje lineární uspořádání;

Sčítání $n+m$ a násobení $n \cdot m$ (nebo jen nm) jsou komutativní (tj., nezáleží na pořadí: $m+n = n+m, mn = nm$) a asociativní (tj., nezáleží na uzávorkování: $m + (n + k) = (m + n) + k, m(nk) = (mn)k$); navzájem jsou obě operace distributivní (tj., $m(n + k) = mn + mk$).

Uspořádání $1 < 2 < 3 < 4 < ...$ se zachovává sčítáním a násobením (tj., je-li $n < m$, je i $n + k < m + k$ a $nk < mk$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$).

Počítání s přirozenými čísly se na vysoké škole nemění.

Podle principu matematické indukce je $\mathbb{N}$ množina obsahující s každým prvkem prvek o jedničku větší. Navíc je jednička jediný prvek, který není o jedničku větší než nějaký jiný prvek.

To je na přirozených číslech kouzelné.

A v příkladech je to někdy jako vysvobození.

Aby bylo možné i odčítat libovolná přirozená čísla (tj. vždy vyřešit rovnici $x + m = n$), musí se přidat 0 a záporná čísla $-1, -2, -3, \ldots$. Vzniklá množina

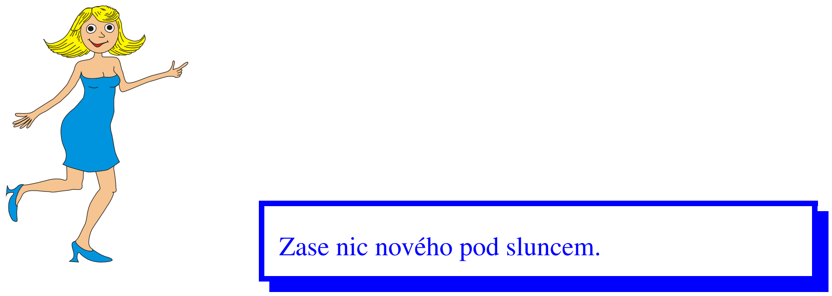
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

se nazývá množinou celých čísel a lze na ni vhodně rozšířit operace sčítání a násobení i lineární uspořádání.

Sčítání $n+m$ i násobení $n \cdot m$ (nebo jen nm) v $\mathbb{Z}$ jsou opět komutativní a asociativní a navzájem jsou obě operace distributivní. Uspořádání

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$$

se zachovává sčítáním (tj., je-li $n < m$, je i $n + k < m + k$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$) a násobením přirozenými čísly; znaménko nerovnosti se obrací při násobení zápornými celými čísly.



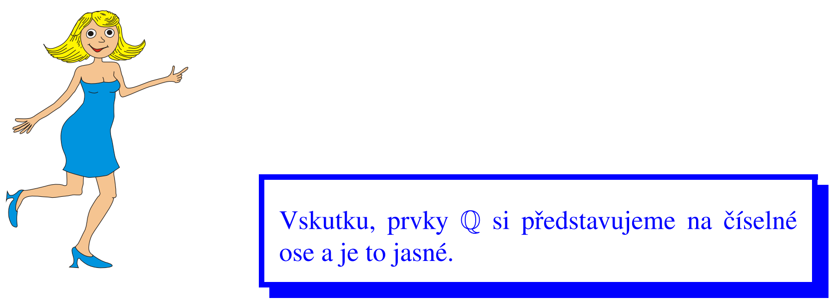
Aby bylo možné i dělit libovolná přirozená čísla (tj., vždy vyřešit rovnici $xm = n$), musí se přidat tzv. zlomky $\frac{n}{m}; n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$.

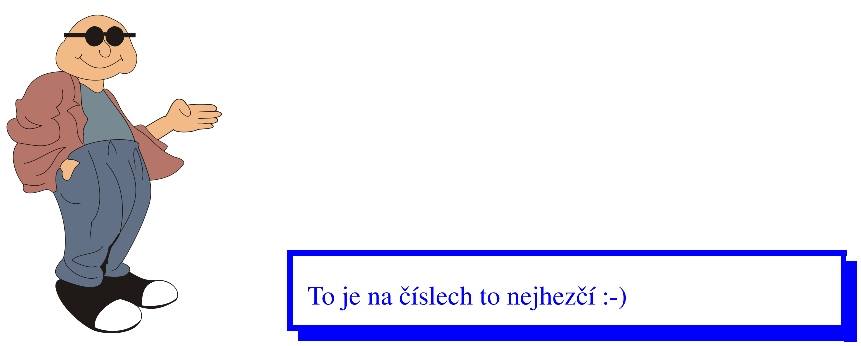
Řešení rovnic $xm = n$ a $x(km) = (kn)$ jsou stejná, a proto i zlomky $\frac{n}{m}$ a $\frac{kn}{km}$ jsou definovány jako stejné.

Protože i zlomky je třeba odčítat, přidají se i záporná čísla a množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel se definuje jako množina zlomků

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}.\ p, q \text{ jsou nesoudělná} \right\}.$$

Na $\mathbb{Q}$ lze opět vhodně rozšířit sčítání a násobení i lineární uspořádání.

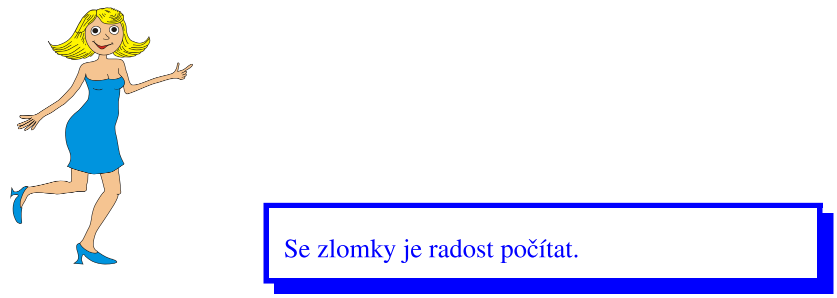




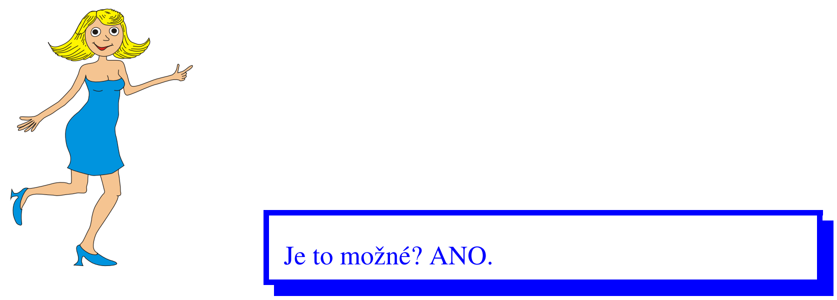
Množina $\mathbb{Q}$ má tedy následující vlastnosti:

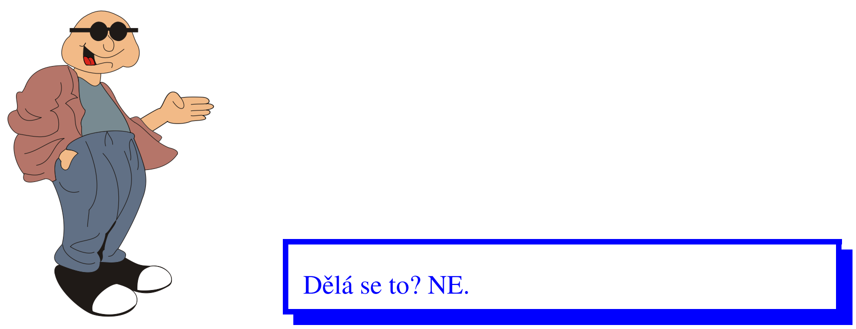
- na $\mathbb{Q}$ existuje operace sčítání a odčítání;
- na $\mathbb{Q}$ existuje operace násobení a dělení (kromě nulou);
- na $\mathbb{Q}$ existuje lineární uspořádání;

Sčítání $a + b$ i násobení $a \cdot b$ (nebo jen ab) v $\mathbb{Q}$ jsou opět komutativní a asociativní a navzájem jsou obě operace distributivní. Uspořádání se zachovává sčítáním (tj., je-li $a < b$, je i $a + c < b + c$ pro libovolné $c \in \mathbb{Q}$) a násobením kladnými čísly; znaménko nerovnosti se obrací při násobení zápornými celými čísly.



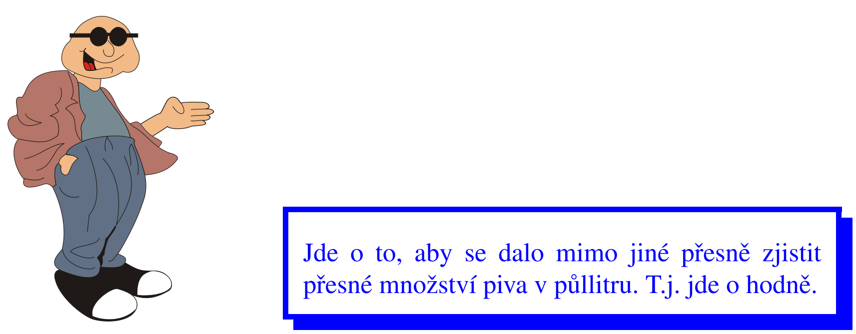
Tyto operace spolu s uspořádáním mají vzájemné vhodné vlastnosti. Nicméně, jak je známo, např. nelze v $\mathbb{Q}$ odmocňovat. Je možné přidat všechny odmocniny, popř. nějaké další prvky pro splnění nějakých dalších algebraických (konečných) operací a dostane se z algebraického hlediska vhodná množina.





Ani tak však nebude možné používat nekonečné operace, např. součet nekonečných řad (řada $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \ldots$ nebude mít součet).

Doplněním takovýchto nekonečných součtů už se získá vhodná množina pro matematickou analýzu.



Přístup pomocí nekonečných součtů není příliš jednoduchý, a proto bude vyložen trochu jiný přístup pomocí uspořádání. V každém případě však je nutné použít operace s nekonečnými množinami.

Pokud ještě nevíte, jak se to dělá, tak se na chvilku zamyslete, jak to udělat.

Nejradši bych to někde koupil, nebo ještě raději zmáčkl nějaké tlačítko.

Radši se na to posilníme.

REÁLNÁ ČÍSLA, SUPREMA A INFIMA

DEFINICE. Nechť A je částí lineárně uspořádané množiny X. Prvek $x \in X$ se nazývá horní mezí množiny A, jestliže pro každý prvek $b \in A$ je $b \leq x$.

DEFINICE. Nejmenší prvek (pokud existuje) množiny všech horních mezí podmnožiny A se nazývá supremum podmnožiny A a značí se $\sup A$.

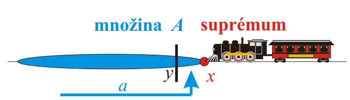
Ten bod, kdy vláček zastaví, je supremum. Může a nemusí být v množině A.

DEFINICE. Zřejmým zpusobem se definují dolní mez a infimum podmnožiny $A \subset X$ ($\inf A$).

Vláček jede zleva.

VĚTA. Mějme podmnožinu A lineárně uspořádané množiny X. Prvek $s \in X$ je supremem A právě když platí:

1. Pro každé $a \in A$ je $a \leq s$;
2. je-li $s' < s$, pak existuje $a \in A$ takové, že $s' < a$.



K „falešnému" suprému s' se najde prvek $a \in A$ větší.

Tohle se mockrát použije.

POZOROVÁNÍ.

1. $\inf \emptyset$ je největší prvek X (pokud existuje),
   $\sup \emptyset$ je nejmenší prvek X (pokud existuje).

2. Pro $A \subset X, A \neq \emptyset$, je $\inf A \leq \sup A$.

3. Pro $A \subset B$ je $\inf B \leq \inf A$, $\sup A \leq \sup B$.

4. $\sup A = \sup\{x \in X; x \leq a \text{ pro nějaké } a \in A\}$
   $\inf A = \inf\{x \in X; x \geq a \text{ pro nějaké } a \in A\}$.

Jde o jednoduchá tvrzení. Je třeba je umět dokázat !

Kdykoliv slyším supremum, píšu si dva body.

DEFINICE. Označme $\mathbb{R}^*$ nejmenší lineárně uspořádanou množinu, která obsahuje lineárně uspořádanou množinu $\mathbb{Q}$ racionálních čísel a ve které existuje $\sup A$ (a tedy i $\inf A$) pro každou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^*$ má tedy největší prvek (značení $+\infty$) a nejmenší prvek (značení $-\infty$). Množina $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty, +\infty\}$ se nazývá množina reálných čísel.

Ten vláček připomíná, že existují suprema. Jezdí sem a tam a na množiny naráží podle potřeby.

.

Rozšířenou množinu reálných čísel $\mathbb{R}^*$ lze chápat jako soustavu podmnožin $\mathbb{Q}$, které mají všechny tu vlastnost, že s každým svým prvkem a obsahují i každé racionální číslo menší než a a obsahují i své supremum v $\mathbb{Q}$, pokud existuje.

To je něco opravdu zajímavého. Je to vlastně konstrukce množiny reálných čísel. Tedy ta množina vskutku existuje !!!!!!!!!!!

V tomto modelu je reálné číslo x menší než reálné číslo y, jestliže podmnožina v $\mathbb{Q}$ příslušná k x je částí podmnožiny příslušné k y.

Číslu $\inf A$ tedy přísluší průnik podmnožin $\mathbb{Q}$ odpovídajících prvkům množiny A.

Aritmetické operace na racionálních číslech lze rozšířit na $\mathbb{R}$ a částečně na $\mathbb{R}^*$. Pro $a \in \mathbb{R}$ platí:

$$
\begin{aligned}
a + (+\infty) &= a - (-\infty) = +\infty\,,\\
a + (-\infty) &= a - (+\infty) = -\infty\,,\\
a \cdot (+\infty) &= \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > 0\,,\\ -\infty & \text{pro } a < 0\,,\end{cases}\\
a \cdot (-\infty) &= \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0\,,\\ +\infty & \text{pro } a < 0\,,\end{cases}\\
\frac{a}{+\infty} &= \frac{a}{-\infty} = 0\,, \frac{\pm\infty}{a} = \frac{1}{a}\cdot \pm\infty \qquad \text{pro } a \neq 0\,,\\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty\,, (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,,\\
(+\infty)\cdot(+\infty) &= (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\,,\\
(+\infty)\cdot(-\infty) &= -\infty
\end{aligned}
$$

To je a není kuchařka. Asi je lepší si to představovat, tak se nespletete.

Některé kombinace čísel a „nekonečen" nebo pouze „nekonečen" v předchozích vzorcích chybějí.

Jde o takzvané neurčité výrazy:

$$0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{a}{0} \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}^*,$$

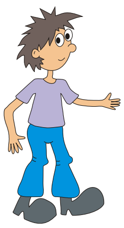
sčítání „nekonečen" ruzných znamének,
např.$(+\infty) + (-\infty)$,

dělení „nekonečen" libovolných znamének,
např.$\frac{\pm\infty}{-\infty}$

V následující části přibudou další operace s nekonečnem a další neurčité výrazy.

Tyto neurčité výrazy se k ničemu nepoužívají, nejdou rozumně definovat a jde o pojmenování obecně zapeklité situace.

Kdo to udělá, je bambula. Například $a/0 =$ cokoliv, protože samozřejmně nevyjde zkouška $a = 0\cdot$ cokoliv $= 0$.



A jednou jsem to zkusil pro $a = 0$, zkouška vyšla ale přesto mě nepochválili. Jednou jsem to zkusil a už nemám chuť.

OBECNÁ MOCNINA A LOGARITMUS

V této části bude ukázáno použití suprem a infim ke konstrukci nových operací s reálnými čísly.

Je známo, že pro reálné číslo a a $n \in \mathbb{N}$ znamená a^n zkrácený zápis násobení n stejných čísel rovných a.

Jestliže se definuje $a^{-n} = 1/a^n$ a $a^0 = 1$, to vše pro $a \neq 0$, je a^n definováno pro $n \in \mathbb{Z}$ a každé $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ (i pro $a = 0$, je-li $n \in \mathbb{N}$).

Mocnina 0^0 se nedefinuje (je to další neurčitý výraz).

Ctíme tradici a používáme „neurčité výrazivo". V podstatě tím máme na mysli, že takový objekt není definován (ve skutečnosti lze definovat různým způsobem, žádný způsob však nedává smysl). Nicméně můžeme zkoumat x^y, kde x i y jsou blízko nuly.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$. Z dříve uvedených vlastností reálných čísel plyne snadno, že $a^n < b^n$ jakmile $0 \leq a < b$. Odtud plyne, že pro každé nezáporné číslo r existuje **nejvýše jedno** číslo a tak, že $a^n = r$.

Toto číslo se označí $\sqrt[n]{r}$ (n-tá odmocnina čísla r).

V tomto případě je jednoduché ukázat existenci odmocniny $\sqrt[n]{a}$ pro $a > 0$ jako $\sup\{q \in \mathbb{Q}; q^n \leq a\}$ (snadno se dodefinuje pro lichá n a záporná a $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$).

Důkaz se provede následovně. Označím $w = \sup\{q \in \mathbb{Q}; q > 0, q^n \leq a\}$ (musí se vědět, že takové q existuje, neboli, že $1/k^n$ může být libovolně malé pro velká $k \in \mathbb{N}$). Pokud $w^n \neq a$, najdeme dvě racionální čísla $q_1 < w < q_2$, která jsou tak blízko sobě, že $q_2^n - q_1^n$ je menší než $|a - w^n|$, což je spor (protože $w^n, a \in (q_1^n, q_2^n)$). Že to lze, plyne z odhadu $q_2^n - q_1^n = (q_2 - q_1)(q_1^{n-1} + q_1^{n-2} q_2 + \ldots + q_2^{n-1}) \leq nk^{n-1}(q_2 - q_1)$, kde $k \in \mathbb{N}, k > q_2$.

Vlastně je to důkaz rovnosti $w = \inf\{q \in \mathbb{Q}; q^n \geq a\}$ (pokud by se w definovalo takto, odpadlo by dokazování toho, že takové q existuje, ale zase by bylo nutné ukázat, že $w > 0$).

Je pěkné, že pomocí suprema a infima dovedeme hledat zajímavá čísla.

V kapitole o spojitých funkcích bude dokázáno, že tato odmocnina existuje pro každé nezáporné číslo r, zatím je vhodné to předpokládat.

Pokud je n liché, lze odmocninu definovat i pro záporná čísla r (proveďte).

Nyní je možné definovat $a^{p/q}$ pro libovolná $a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ jako $\sqrt[q]{x^p}$. V *Otázkách* jsou diskutovány možnosti této definice i pro $a \leq 0$.

Číslo a^r je tedy definováno pro každé kladné a a racionální r.

Rozšířit tuto definici na reálná čísla r je možné mnoha způsoby. Jednou z nich je následující elementární postup.

DEFINICE. Nechť $a \geq 1, r \in \mathbb{R}$. Pak se definuje $a^r = \sup\{a^s; s \in \mathbb{Q}, s \leq r\}$.
Pro $0 < a < 1$ se definuje $a^r = 1/(1/a)^r$.

Číslo a^r se nazývá mocnina čísla a, r je exponent (mocnitel), a je základ.

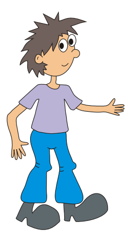
BTW. Doporučuji si to promyslet …

Vlastnosti mocniny se dokazují z této definice snadno pomocí příslušných vlastností pro racionální exponenty. Následující vlastnosti mocnin souvisejí s uspořádáním, vlastnosti související s aritmetickými operacemi jsou uvedeny v *Otázkách*.

POZOROVÁNÍ.

1. Číslo a^r je vždy kladné.
2. $r < s \Leftrightarrow \begin{cases} a^r > a^s, & \text{pro } 0 < a < 1; \\ a^r < a^s, & \text{pro } a > 1. \end{cases}$
3. $0 < a < b \Leftrightarrow \begin{cases} a^r > b^r, & \text{pro } r < 0; \\ a^r < b^r, & \text{pro } r > 0. \end{cases}$

Takže $a^r > 1$ právě když buď $a > 1, r > 0$ nebo $0 < a < 1, r < 0$.



Jéminkote !!!

JOOOOOOO !!!

Ještě nás čekají další "neurčité"mocniny : ∞^0 ,1^∞, 0^0 a následně i obecné mocniny ∞^r nebo r^∞.

Ještě s tím počkáme, abychom tomu lépe rozuměli.

DEFINICE. Podle předchozích vlastností existuje pro každé $w > 0, a > 0, a \neq 1$ nejvýše jedno $r \in \mathbb{R}$ tak, že $w = a^r$. Toto číslo r se označuje $\log_a w$ (logaritmus při základu a).

V kapitole o spojitých funkcích bude dokázáno, že $\log_a w$ existuje pro každé kladné reálné číslo w a každý základ $a > 0, a \neq 1$.

I tady lze ukázat existenci přímo. Je to podobné, jako u odmocnin a použije se Bernoulliova nerovnost.

Pro $a > 1, w > 0$, položíme $r = \sup\{q \in \mathbb{Q}; a^q \leq w\}$ (opět takové q existuje, protože $a = 1 + h, h > 0, 1/(1+h)^n \leq 1/(1+nh)$ a musíme vědět, že poslední výraz je libovolně malý). Pokud $|a^r - w| > 0$, najdeme $q_1 < r < q_2$ tak, že $|a^{q_2} - a^{q_1}|$ je libovolně malý, což je spor, protože w, a^r leží mezi a^{q_2}, a^{q_1}.

To plyne z odhadu $a^{q_2} - a^{q_1} = a^{q_1}(a^{q_2 - q_1} - 1) < w(a^{1/n} - 1)$ pokud $q_2 - q_1 < 1/n$. Výraz $(a^{1/n} - 1)$ lze pro velká n udělat libovolně malý (Bernoulli).

Z vlastností mocniny plynou snadno následující vlastnosti logaritmu:

POZOROVÁNÍ.

1. Číslo $\log_{\mathrm{a}} w$ je kladné právě když buď $w > 1, a > 1$ nebo $0 < w < 1, 0 < a < 1$.

2. $0 < w < u \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\mathrm{a}} w > \log_{\mathrm{a}} u, & \text{pro } 0 < a < 1; \\ \log_{\mathrm{a}} w < \log_{\mathrm{a}} u, & \text{pro } a > 1. \end{cases}$

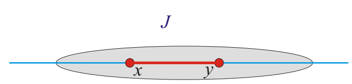
3. $0 < a < b < 1$ nebo $1 < a < b \Rightarrow \begin{cases} \log_{\mathrm{a}} w > \log_{\mathrm{b}} w, & \text{pro } 1 < w; \\ \log_{\mathrm{a}} w < \log_{\mathrm{b}} w, & \text{pro } 0 < w < 1. \end{cases}$

Poznámky 1 Otázky 1 1 1

INTERVALY

DEFINICE. Interval v lineárně uspořádané množině X je taková její aspoň dvoubodová podmnožina, řekněme J, která s každými dvěma svými prvky obsahuje i všechny prvky mezi nimi, tj.

$$x, y \in J,\ x < a < y \implies a \in J\,.$$



To je velice důležité !!!

Je-li J interval v $\mathbb{R}^*$ a označíme $a = \inf J, b = \sup J$, pak J má jeden z následujících tvaru:

- uzavřený interval $[a, b] = \{x; a \le x \le b\}$,
- otevřený interval $(a, b) = \{x; a < x < b\}$,
- polootevřený či polouzavřený interval $\begin{cases} [a, b) & = \{x; a \le x < b\} \\ (a, b] & = \{x; a < x \le b\} \end{cases}$

Někde se uzavřené intervaly místo $[a, b]$ označují $\langle a, b\rangle$. Je to jedno.

To je tím, že máme málo druhů závorek. BTW, já jich několik zahodil.

Potřebujeme označovat otevřené a uzavřené intervaly, uspořádané dvojice čísel, množiny čísel a operace uspořádání. A máme na to málo typů závorek. Teda ještě potřebujeme závorky, samozřejmě.

Neomezené intervaly v $\mathbb{R}^*$ tvaru $[-\infty, +\infty]$ nebo $(a, +\infty], [-\infty, a)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ se také nazývají otevřené intervaly v $\mathbb{R}^*$.

DEFINICE. Podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je shora omezená, jestliže má v $\mathbb{R}$ horní mez, tj. existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $a < x$ pro všechna $a \in A$ (tj. $A \subset (-\infty, x)$).

Zřejmým zpusobem se definuje zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ $\quad (A \subset (x, +\infty))$.

Podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je omezená, jestliže je shora i zdola omezená, tj. existují reálná čísla x, y taková, že $A \subset (x, y)$.

OKOLÍ BODU

Při aproximacích je potřeba znát, kdy jsou nějaké body *blízko* nebo dokonce *libovolně blízko* nějaké hodnotě.

To lze vyjádřit pomocí pojmu okolí, která, podobně jako v normálním jeho významu, mohou být větší či menší a tím lze určovat, které body jsou hodnotě dále nebo blíže.

Matematika většinou zajímají malá, nebo dokonce libovolně malá okolí.

Zde se na chvilku vynořil duch matematické analýzy. Libovolně malá věc patří do říše strašidel.

DEFINICE. Množina U se nazývá okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$, jestliže existuje otevřený interval $J \subset U$ takový, že

- $a \in J$ pro $a \in \mathbb{R}$,
- J je shora neomezený pro $a = +\infty$,
- J je zdola neomezený pro $a = -\infty$.

Podle toho, zda je bod a vlastní nebo nevlastní, lze okolí popsat následovně:

1. $U \subset \mathbb{R}$ je okolí $a \in \mathbb{R}$ právě když existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$ (za ε lze vzít $1/n$ pro vhodné $n \in \mathbb{N}$);
2. $U \subset \mathbb{R}^*$ je okolí $+\infty$ právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $(n, +\infty] \subset U$;
3. $U \subset \mathbb{R}^*$ je okolí $-\infty$ právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $[-\infty, -n) \subset U$;

Uvedené intervaly $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se ze zřejmých důvodů nazývají *symetrická okolí*.

Jak bylo řečeno výše, používají se hlavně menší okolí.

Pořád si nerozumíme, menší klidně, ale než co ???

Stačilo by tedy definovat okolí jako otevřené intervaly použité v předchozí charakterizaci, protože každé jiné okolí takový interval obsahuje.

Navíc by stačilo brát za ε jen některá kladná čísla, např. $1/n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nebo jinou posloupnost kladných čísel blížících se k 0. V některých textech se takto postupuje, ale pro řadu formulací je vhodnější mít okolí obecnějšího tvaru.

Pro podmnožiny A, B reálných čísel označíme

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}, \quad A \cdot B = \{ab; a \in A, b \in B\},$$

čemuž říkáme součet a součin množin

Součet a součin okolí se bude hodit. Dokážeme následující:

VĚTA. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Je-li U okolí součtu $a + b$, existují okolí U_a, U_b bodů a, b resp., tak, že $U_a + U_b \subset U$.
2. Je-li U okolí součinu ab, existují okolí U_a, U_b bodů a, b resp., tak, že $U_a \cdot U_b \subset U$.
3. Je-li $a \neq 0$ a U okolí bodu $1/a$, existuje okolí U_a bodu a tak, že $\{1/x; x \in U_a\} \subset U$.

Důkaz.

1. Nechť $U \supset (a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon)$. Stačí zvolit $U_a = (a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2), U_b = (b - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2)$.
2. Nechť $U \supset (ab - \varepsilon, ab + \varepsilon)$ a $a, b > 0$, kde ε lze volit tak malé, že $ab - \varepsilon > 0$. Je nutné najít kladné δ tak, že $(a - \delta, a + \delta) \cdot (b - \delta, b + \delta) \subset (ab - \varepsilon, ab + \varepsilon)$, k čemuž stačí $\delta^2 + \delta(a + b) < \varepsilon$. Poslední nerovnost lze jistě splnit pro nějaké malé kladné δ. Podobně se provedou další případy nenulových a, b (proveďte). Případ $a = b = 0$ je jednoduchý – stačí zvolit $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Zbývá případ $a = 0, b \neq 0$, např. $b > 0$. Postup je stejný jako v případě kladných a, b (pozor na násobení $(-\delta, 0) \cdot (b - \delta, b + \delta)$).
3. Nechť $a > 0$ a $\varepsilon > 0$ je zvoleno tak malé, že $1/a - \varepsilon > 0$. Hledá se kladné δ tak, že $(1/(a+\delta), 1/(a-\delta)) \subset (1/a - \varepsilon, 1/a + \varepsilon)$. K tomu stačí, aby $\delta < a^2\varepsilon/(1 + a\varepsilon)$.

Předchozí tvrzení platí i pro případ, kdy a, b jsou nevlastní čísla a $a + b, ab$ nebo $1/a$ má smysl. $\diamond$

Např. pro součin, kdy $a > 0$ a $b = +\infty$:
Nechť $p > 0$. Hledá se $\delta > 0, q > 0$ tak, že $(a - \delta, a + \delta) \cdot (q, +\infty) \subset (p, +\infty)$. Stačí vzít $\delta = a/2, q > 2p/a$.

Ostatní případy lze, tuším, přenechat čtenáři.

To tvrzení o součtu okolí je klíčové pro matematickou analýzu.

Obsahuje totiž informaci, že podobně veliká čísla mají podobně veliké součty. Tedy je to základ pro případné aproximace a odhadování.

Já si to tvrzení dokazuji každé ráno jako rozcvičku. Svět je super.

Moc moc jsem si přál, aby neplatilo . . .

2

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Reálná čísla, která nejsou racionální, se nazývají iracionální. Ta se ještě dělí na algebraická (kořeny polynomů s celými koeficienty) a na transcendentní.

Např. číslo π známé ze vzorců pro obvod a obsah kruhu je transcendentní; důkazem tohoto faktu byla dokázána nemožnost tzv. kvadratury kruhu, tj. pomocí kružítka a pravítka sestrojit čtverec se stejným obsahem jako daný kruh.

Přirozených čísel je spočetně mnoho (spočetná množina je taková, která se dá zobrazit prostým zobrazením na $\mathbb{N}$).

Spočetná množina má stejně prvků jako je přirozených čísel.

Snadno se dokáže, že i celých čísel je spočetně mnoho, racionálních čísel je spočetně mnoho, i algebraických čísel je spočetně mnoho.

Všech reálných čísel je ale nespočetně mnoho.

To lze dokázat např. pomocí tzv. Cantorovy diagonální metody, jestliže jsou známy rozvoje reálných čísel, např. desetinné. Tyto rozvoje je vhodné znát i pro jiné účely.

Pro jejich konstrukci (viz desetinný rozvoj) je nutné znát konvergenci posloupností z následující kapitoly.

Konec poznámek 1.

OTÁZKY

Otázky 1:

Odmocniny

Pro nesoudělná čísla $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ lze definovat $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ pro libovolná čísla a, pro která má výraz na pravé straně smysl, tj. $a \in \mathbb{R}$ pro $p > 0, q$ liché nebo $a \neq 0$ pro $p \leq 0, q$ liché nebo $a \geq 0$ pro $p > 0, q$ sudé nebo $a > 0$ pro $p \leq 0, q$ sudé.

Jaký problém nastane, vynechá-li se v předchozí definici nesoudělnost? Uvažte např. případ $1/3 = 2/6$.

Pro jaké zlomky a jaká čísla a lze nesoudělnost vynechat?

Ukažte, že pro $a > 0$ a $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$.
[Návod: je-li $x^n = a, y^m = a, z^{mn} = a^{m+n}$, je $z^{mn} = (xy)^{mn}$ a tedy $z = xy$.]

Podobně ukažte, že $1/\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(1/a)}$, $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ a $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ pro $a, b > 0$ a $m, n \in \mathbb{N}$.

Uvažte, kdy platí uvedené vlastnosti i pro nekladná čísla a, b.

Racionální exponenty

Ukažte pomocí předchozích vlastností pro odmocniny, že pro libovolná $a, b > 0$ a libovolná racionální čísla r, s platí

$$a^{-r} = 1/a^r\,, \quad a^{r+s} = a^r a^s\,, \quad a^r b^r = (ab)^r\,, \quad (a^r)^s = a^{rs}\,.$$

Dokažte následující tvrzení:
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $1 - 1/n < a^r < 1 + 1/n$ pokud $|r| < 1/k$.

[Návod např. pro $a > 1$: pro dané $n \in \mathbb{N}$ existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že $1 + k/n > a$; protože $(1 + 1/n)^k > 1 + k/n$, je $1 + 1/n > \sqrt[k]{a}$.]

Reálné exponenty

1. Z předchozího tvrzení pro racionální exponenty ukažte, že $a^r = \inf\{a^s; s \in \mathbb{Q}, s \geq r\}$ pro $a > 1$.

2. Pro $0 < a < 1$ ověřte rovnosti $a^r = \inf\{a^s; s \in \mathbb{Q}, s \leq r\} = \sup\{a^s; s \in \mathbb{Q}, s \geq r\}$.

3. Dokažte, že výše uvedené vlastnosti pro aritmetické operace mocnin s racionálními exponenty platí i pro reálné exponenty.

[Návod např. pro $a^{r+s} = a^r a^s$: každé racionální $t \leq r + s$ lze psát jako součet $t_1 + t_2$ racionálních čísel $t_1 \leq r, t_2 \leq s$ a odtud plyne $a^{r+s} \leq a^r a^s$ (opačná nerovnost se snadno dokáže sporem); u poslední dokazované rovnosti je nutné rovnost dokázat nejdříve za předpokladu, že r je racionální a poté obecně.]

Později uvidíme, že rovnosti vyplynou i ze spojitosti mocniny.

Logaritmy

Pomocí předchozích vlastností mocniny pro racionální operace dokažte následující vlastnosti logaritmu:

$$\log_{\mathrm{a}} \frac{1}{w} = -\log_{\mathrm{a}} w \,, \log_{\mathrm{a}}(wu) = \log_{\mathrm{a}} w + \log_{\mathrm{a}} u \,, \log_{\mathrm{a}}(b^r) = r \log_{\mathrm{a}} b \,, \log_{\mathrm{a}} w = \log_{\mathrm{a}} b \log_{\mathrm{b}} w \,.$$

[Návod např. pro poslední rovnost: označte $r = \log_{\mathrm{a}} w, t = \log_{\mathrm{a}} b, s = \log_{\mathrm{b}} w$; pak $a^r = w = (a^t)^s = a^{ts}$ a tedy $r = ts$.]

Pozorně jsem to sledoval. Algebraická mlha zachvátila svět . . .

Je to jako střílet na branku. Samo o sobě to je jednoduché, ale hokej to samo o sobě ještě není.

Konec otázek 1.

CVIČENÍ

Cvičení 1:

Když je něco něčeho suprémem, platí dvě věci.

1. Je to horní závorou.

2. Je to nejmenší horní závora.

Ani o slovo míň, ani o slovo víc.

Zkusíme dokázat jednoduché tvrzení:

Příklad. Pro $A \subset [0,1]$ a $B \subset [0,1]$ platí

$$\sup A \ + \ \sup B \ = \sup(A+B) \ ,$$

kde

$$A+B \ = \ \{a+b \in \mathbb{R} \ : \ a \in A, b \in B\} \ .$$

Dokažte.

$A+B$ je množina všech možných součtů z A a B.

Řešení. Označme $s_A = \sup A$, $s_B = \sup B$ a položme $s = s_A + s_B$. Dokážeme, že $s = \sup(A+B)$.

1. Jde o horní závoru?

Vezmeme $a+b \in A+B$, pak $a \leq s_A$, $b \leq s_B$, tedy $a+b \leq s_A + s_B = s$. Tedy ?=ANO.

2. Je to nejmenší horní závora?

Vezmeme $s' < s$ a hledáme prvek $a+b \in A+B$ tak, aby. $s' < a+b$.

Označíme $d = s - s'$ toleranci pro $A+B$. Pro poloviční toleranci $d/2$ najdeme $a \in A$ tak, že $s_A - d/2 < a$ a podobně najdeme $b \in B$ tak, že $s_B - d/2 < b$.

Pak

$$s' = (s_A - d/2) + (s_B - d/2) < a+b \ .$$

Našli jsme hledané $a+b$, tedy ?=ANO.

Úspěšně vyřešil 1 z 10. Nic si z toho nedělejte, není každý den posvícení.

Konec cvičení 1.

Cvičení 2: Příklad. Sestrojte posloupnost intervalů $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ s prázdným průnikem.

Existuje „omezené" i „neomezené" řešení.

Řešení. Zvolíme $I_n = (0, 1/n)$ pro omezené řešení a $I_n = (n, \infty)$ pro neomezené řešení.

Úspěšně vyřešilo 5 z 10. Pohoda.

Příklad. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ není omezená. Pak pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ existuje nekonečná množina $N \subset M$ tak, že

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \; : \; (x \neq y \implies |x - y| > \alpha) \; .$$

Dokažte.

Počkáme 5 minut, aby to človíčkové pochopili.

Řešení. Nechť M není omezená shora. Nechť α je dáno.

Zvolíme libovolně $x_1 \in M$. Pak najdeme $x_2 \in M$ tak aby platilo $x_2 > x_1 + \alpha$ díky neomezenosti M. Pak podobně $x_3 \in M$ tak aby platilo $x_3 > x_2 + \alpha$ a tak dál pomocí indukce.

Položíme $N = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$.

Úspěšně vyřešili 2 z 10. Nevím proč tak málo.

Konec cvičení 2.

UČENÍ

Učení 1:
Konec učení 1.