Zavedení a vlastnosti reálných čísel

Reálná čísla jsou základním kamenem matematické analýzy.

Konstrukce reálných čísel sice není náplní matematické analýzy, ale množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je pro matematickou analýzu základním kamenem a je proto nutné být s vlastnostmi $\mathbb{R}$ v tomto kurzu dobře obeznámen.

V této části bude naznačena konstrukce reálných čísel a budou popsány jejich základní vlastnosti.

PŘIROZENÁ, CELÁ A RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Předpokládá se, že množina $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ přirozených čísel a její vlastnosti jsou známé:

- na $\mathbb{N}$ existuje operace sčítání;
- na $\mathbb{N}$ existuje operace násobení;
- na $\mathbb{N}$ existuje lineární uspořádání;

Sčítání $n+m$ a násobení $n \cdot m$ (nebo jen nm) jsou komutativní (tj., nezáleží na pořadí: $m+n = n+m, mn = nm$) a asociativní (tj., nezáleží na uzávorkování: $m + (n + k) = (m + n) + k, m(nk) = (mn)k$); navzájem jsou obě operace distributivní (tj., $m(n + k) = mn + mk$).

Uspořádání $1 < 2 < 3 < 4 < ...$ se zachovává sčítáním a násobením (tj., je-li $n < m$, je i $n + k < m + k$ a $nk < mk$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$).

Podle principu matematické indukce je $\mathbb{N}$ množina obsahující s každým prvkem prvek o jedničku větší. Navíc je jednička jediný prvek, který není o jedničku větší než nějaký jiný prvek.

Aby bylo možné i odčítat libovolná přirozená čísla (tj. vždy vyřešit rovnici $x + m = n$), musí se přidat 0 a záporná čísla $-1, -2, -3, ...$. Vzniklá množina

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

se nazývá množinou celých čísel a lze na ni vhodně rozšířit operace sčítání a násobení i lineární uspořádání.
Sčítání $n+m$ i násobení $n \cdot m$ (nebo jen nm) v $\mathbb{Z}$ jsou opět komutativní a asociativní a navzájem jsou obě operace distributivní. Uspořádání

$$... < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < ...$$

se zachovává sčítáním (tj., je-li $n < m$, je i $n + k < m + k$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$) a násobením přirozenými čísly; znaménko nerovnosti se obrací při násobení zápornými celými čísly.

Aby bylo možné i dělit libovolná přirozená čísla (tj., vždy vyřešit rovnici $xm = n$), musí se přidat tzv. zlomky $\frac{n}{m}; n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$.

Řešení rovnic $xm = n$ a $x(km) = (kn)$ jsou stejná, a proto i zlomky $\frac{n}{m}$ a $\frac{kn}{km}$ jsou definovány jako stejné.

Protože i zlomky je třeba odčítat, přidají se i záporná čísla a množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel se definuje jako množina zlomků

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}.\ p, q \text{ jsou nesoudělná} \right\}.$$

Na $\mathbb{Q}$ lze opět vhodně rozšířit sčítání a násobení i lineární uspořádání.

Množina $\mathbb{Q}$ má tedy následující vlastnosti:

- na $\mathbb{Q}$ existuje operace sčítání a odčítání;
- na $\mathbb{Q}$ existuje operace násobení a dělení (kromě nulou);
- na $\mathbb{Q}$ existuje lineární uspořádání;

Sčítání $a+b$ i násobení $a \cdot b$ (nebo jen ab) v $\mathbb{Q}$ jsou opět komutativní a asociativní a navzájem jsou obě operace distributivní. Uspořádání se zachovává sčítáním (tj., je-li $a < b$, je i $a+c < b+c$ pro libovolné $c \in \mathbb{Q}$) a násobením kladnými čísly; znaménko nerovnosti se obrací při násobení zápornými celými čísly.

Tyto operace spolu s uspořádáním mají vzájemné vhodné vlastnosti. Nicméně, jak je známo, např. nelze v $\mathbb{Q}$ odmocňovat. Je možné přidat všechny odmocniny, popř. nějaké další prvky pro splnění nějakých dalších algebraických (konečných) operací a dostane se z algebraického hlediska vhodná množina.

Ani tak však nebude možné používat nekonečné operace, např. součet nekonečných řad (řada $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \ldots$ nebude mít součet).

Doplněním takovýchto nekonečných součtů už se získá vhodná množina pro matematickou analýzu.

Přístup pomocí nekonečných součtů není příliš jednoduchý, a proto bude vyložen trochu jiný přístup pomocí uspořádání. V každém případě však je nutné použít operace s nekonečnými množinami.

REÁLNÁ ČÍSLA, SUPREMA A INFIMA

DEFINICE. Nechť A je částí lineárně uspořádané množiny X. Prvek $x \in X$ se nazývá horní mezí množiny A, jestliže pro každý prvek $b \in A$ je $b \leq x$.

DEFINICE. Nejmenší prvek (pokud existuje) množiny všech horních mezí podmnožiny A se nazývá supremum podmnožiny A a značí se $\sup A$.

DEFINICE. Zřejmým zpusobem se definují dolní mez a infimum podmnožiny $A \subset X$ ($\inf A$).

VĚTA. Mějme podmnožinu A lineárně uspořádané množiny X. Prvek $s \in X$ je supremem A právě když platí:

1. Pro každé $a \in A$ je $a \leq s$;
2. je-li $s' < s$, pak existuje $a \in A$ takové, že $s' < a$.

POZOROVÁNÍ.

1. $\inf \emptyset$ je největší prvek X (pokud existuje),
   $\sup \emptyset$ je nejmenší prvek X (pokud existuje).
2. Pro $A \subset X, A \neq \emptyset$, je $\inf A \leq \sup A$.
3. Pro $A \subset B$ je $\inf B \leq \inf A$, $\sup A \leq \sup B$.
4. $\sup A = \sup\{x \in X; x \leq a \text{ pro nějaké } a \in A\}$
   $\inf A = \inf\{x \in X; x \geq a \text{ pro nějaké } a \in A\}$.

DEFINICE. Označme $\mathbb{R}^*$ nejmenší lineárně uspořádanou množinu, která obsahuje lineárně uspořádanou množinu $\mathbb{Q}$ racionálních čísel a ve které existuje $\sup A$ (a tedy i $\inf A$) pro každou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^*$ má tedy největší prvek (značení $+\infty$) a nejmenší prvek (značení $-\infty$). Množina $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty, +\infty\}$ se nazývá množina reálných čísel.

Rozšířenou množinu reálných čísel $\mathbb{R}^*$ lze chápat jako soustavu podmnožin $\mathbb{Q}$, které mají všechny tu vlastnost, že s každým svým prvkem a obsahují i každé racionální číslo menší než a a obsahují i své supremum v $\mathbb{Q}$, pokud existuje.

V tomto modelu je reálné číslo x menší než reálné číslo y, jestliže podmnožina v $\mathbb{Q}$ příslušná k x je částí podmnožiny příslušné k y.

Číslu $\inf A$ tedy přísluší průnik podmnožin $\mathbb{Q}$ odpovídajících prvkům množiny A.

Aritmetické operace na racionálních číslech lze rozšířit na $\mathbb{R}$ a částečně na $\mathbb{R}^*$. Pro $a \in \mathbb{R}$ platí:

$$
\begin{aligned}
a + (+\infty) &= a - (-\infty) = +\infty\,,\\
a + (-\infty) &= a - (+\infty) = -\infty\,,\\
a \cdot (+\infty) &= \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > 0\,,\\ -\infty & \text{pro } a < 0\,,\end{cases}\\
a \cdot (-\infty) &= \begin{cases} -\infty & \text{pro } a > 0\,,\\ +\infty & \text{pro } a < 0\,,\end{cases}\\
\frac{a}{+\infty} &= \frac{a}{-\infty} = 0\,, \frac{\pm\infty}{a} = \frac{1}{a}\cdot \pm\infty \qquad \text{pro } a \neq 0\,,\\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty\,, (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,,\\
(+\infty)\cdot(+\infty) &= (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty\,,\\
(+\infty)\cdot(-\infty) &= -\infty
\end{aligned}
$$

Některé kombinace čísel a „nekonečen" nebo pouze „nekonečen" v předchozích vzorcích chybějí.

Jde o takzvané neurčité výrazy:

$$0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{a}{0} \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}^*,$$

sčítání „nekonečen" ruzných znamének,
např.$(+\infty) + (-\infty)$,

dělení „nekonečen" libovolných znamének,
např.$\frac{\pm\infty}{-\infty}$

V následující části přibudou další operace s nekonečnem a další neurčité výrazy.

OBECNÁ MOCNINA A LOGARITMUS

Je známo, že pro reálné číslo a a $n \in \mathbb{N}$ znamená a^n zkrácený zápis násobení n stejných čísel rovných a.

Jestliže se definuje $a^{-n} = 1/a^n$ a $a^0 = 1$, to vše pro $a \neq 0$, je a^n definováno pro $n \in \mathbb{Z}$ a každé $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ (i pro $a = 0$, je-li $n \in \mathbb{N}$).

Mocnina 0^0 se nedefinuje (je to další neurčitý výraz).

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$. Z dříve uvedených vlastností reálných čísel plyne snadno, že $a^n < b^n$ jakmile $0 \le a < b$. Odtud plyne, že pro každé nezáporné číslo r existuje **nejvýše jedno** číslo a tak, že $a^n = r$.

Toto číslo se označí $\sqrt[n]{r}$ (n-tá odmocnina čísla r).

V tomto případě je jednoduché ukázat existenci odmocniny $\sqrt[n]{a}$ pro $a > 0$ jako $\sup\{q \in \mathbb{Q}; q^n \le a\}$ (snadno se dodefinuje pro lichá n a záporná a $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$).

Důkaz se provede následovně. Označím $w = \sup\{q \in \mathbb{Q}; q > 0, q^n \le a\}$ (musí se vědět, že takové q existuje, neboli, že $1/k^n$ může být libovolně malé pro velká $k \in \mathbb{N}$). Pokud $w^n \neq a$, najdeme dvě racionální čísla $q_1 < w < q_2$, která jsou tak blízko sobě, že $q_2^n - q_1^n$ je menší než $|a - w^n|$, což je spor (protože $w^n, a \in (q_1^n, q_2^n)$). Že to lze, plyne z odhadu $q_2^n - q_1^n = (q_2 - q_1)(q_1^{n-1} + q_1^{n-2}q_2 + \ldots + q_2^{n-1}) \le nk^{n-1}(q_2 - q_1)$, kde $k \in \mathbb{N}, k > q_2$.

Vlastně je to důkaz rovnosti $w = \inf\{q \in \mathbb{Q}; q^n \geq a\}$ (pokud by se w definovalo takto, odpadlo by dokazování toho, že takové q existuje, ale zase by bylo nutné ukázat, že $w > 0$).

Nyní je možné definovat $a^{p/q}$ pro libovolná $a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ jako $\sqrt[q]{x^p}$. V *Otázkách* jsou diskutovány možnosti této definice i pro $a \leq 0$.

Číslo a^r je tedy definováno pro každé kladné a a racionální r.

DEFINICE. Nechť $a \geq 1, r \in \mathbb{R}$. Pak se definuje $a^r = \sup\{a^s; s \in \mathbb{Q}, s \leq r\}$.
Pro $0 < a < 1$ se definuje $a^r = 1/(1/a)^r$.

Číslo a^r se nazývá mocnina čísla a, r je exponent (mocnitel), a je základ.

POZOROVÁNÍ.

1. Číslo a^r je vždy kladné.

2. $r < s \Leftrightarrow \begin{cases} a^r > a^s, & \text{pro } 0 < a < 1; \\ a^r < a^s, & \text{pro } a > 1. \end{cases}$

3. $0 < a < b \Leftrightarrow \begin{cases} a^r > b^r, & \text{pro } r < 0; \\ a^r < b^r, & \text{pro } r > 0. \end{cases}$

Takže $a^r > 1$ právě když buď $a > 1, r > 0$ nebo $0 < a < 1, r < 0$.

DEFINICE. Podle předchozích vlastností existuje pro každé $w > 0, a > 0, a \neq 1$ nejvýše jedno $r \in \mathbb{R}$ tak, že $w = a^r$. Toto číslo r se označuje $\log_a w$ (logaritmus při základu a).

I tady lze ukázat existenci přímo. Je to podobné, jako u odmocnin a použije se Bernoulliova nerovnost.

Pro $a > 1, w > 0$, položíme $r = \sup\{q \in \mathbb{Q}; a^q \leq w\}$ (opět takové q existuje, protože $a = 1 + h, h > 0, 1/(1+h)^n \leq 1/(1+nh)$ a musíme vědět, že poslední výraz je libovolně malý). Pokud $|a^r - w| > 0$, najdeme $q_1 < r < q_2$ tak, že $|a^{q_2} - a^{q_1}|$ je libovolně malý, což je spor, protože w, a^r leží mezi a^{q_2}, a^{q_1}.

To plyne z odhadu $a^{q_2} - a^{q_1} = a^{q_1}(a^{q_2 - q_1} - 1) < w(a^{1/n} - 1)$ pokud $q_2 - q_1 < 1/n$. Výraz $(a^{1/n} - 1)$ lze pro velká n udělat libovolně malý (Bernoulli).

POZOROVÁNÍ.

1. Číslo $\log_a w$ je kladné právě když buď $w > 1, a > 1$ nebo $0 < w < 1, 0 < a < 1$.

2. $0 < w < u \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a w > \log_a u, & \text{pro } 0 < a < 1; \\ \log_a w < \log_a u, & \text{pro } a > 1. \end{cases}$

3. $0 < a < b < 1$ nebo $1 < a < b \Rightarrow \begin{cases} \log_a w > \log_b w, & \text{pro } 1 < w; \\ \log_a w < \log_b w, & \text{pro } 0 < w < 1. \end{cases}$

Poznámky 1 Otázky 1 1 1

INTERVALY

DEFINICE. Interval v lineárně uspořádané množině X je taková její aspoň dvoubodová podmnožina, řekněme J, která s každými dvěma svými prvky obsahuje i všechny prvky mezi nimi, tj.

$$x, y \in J,\ x < a < y \implies a \in J\,.$$

Je-li J interval v $\mathbb{R}^*$ a označíme $a = \inf J, b = \sup J$, pak J má jeden z následujících tvaru:

- uzavřený interval $[a,b] = \{x; a \le x \le b\}$,
- otevřený interval $(a,b) = \{x; a < x < b\}$,
- polootevřený či polouzavřený interval $\left\{ \begin{array}{ll} [a,b) & = \{x; a \le x < b\} \\ (a,b] & = \{x; a < x \le b\} \end{array} \right.$

Neomezené intervaly v $\mathbb{R}^*$ tvaru $[-\infty,+\infty]$ nebo $(a,+\infty], [-\infty,a)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ se také nazývají otevřené intervaly v $\mathbb{R}^*$.

DEFINICE. Podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je shora omezená, jestliže má v $\mathbb{R}$ horní mez, tj. existuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $a < x$ pro všechna $a \in A$ (tj. $A \subset (-\infty, x)$).

Zřejmým zpusobem se definuje zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ $\quad (A \subset (x,+\infty))$.

Podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je omezená, jestliže je shora i zdola omezená, tj. existují reálná čísla x, y taková, že $A \subset (x,y)$.

OKOLÍ BODU

Při aproximacích je potřeba znát, kdy jsou nějaké body *blízko* nebo dokonce *libovolně blízko* nějaké hodnotě.

To lze vyjádřit pomocí pojmu okolí, která, podobně jako v normálním jeho významu, mohou být větší či menší a tím lze určovat, které body jsou hodnotě dále nebo blíže.

DEFINICE. Množina U se nazývá okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$, jestliže existuje otevřený interval $J \subset U$ takový, že

- $a \in J$ pro $a \in \mathbb{R}$,
- J je shora neomezený pro $a = +\infty$,
- J je zdola neomezený pro $a = -\infty$.

Podle toho, zda je bod a vlastní nebo nevlastní, lze okolí popsat následovně:

1. $U \subset \mathbb{R}$ je okolí $a \in \mathbb{R}$ právě když existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$ (za ε lze vzít $1/n$ pro vhodné $n \in \mathbb{N}$);
2. $U \subset \mathbb{R}^*$ je okolí $+\infty$ právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $(n,+\infty] \subset U$;
3. $U \subset \mathbb{R}^*$ je okolí $-\infty$ právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $[-\infty,-n) \subset U$;

Uvedené intervaly $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ se ze zřejmých důvodů nazývají *symetrická okolí*.

Stačilo by tedy definovat okolí jako otevřené intervaly použité v předchozí charakterizaci, protože každé jiné okolí takový interval obsahuje.

Navíc by stačilo brát za ε jen některá kladná čísla, např. $1/n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nebo jinou posloupnost kladných čísel blížících se k 0. V některých textech se takto postupuje, ale pro řadu formulací je vhodnější mít okolí obecnějšího tvaru.

Pro podmnožiny A, B reálných čísel označíme

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}\,, \quad A \cdot B = \{ab; a \in A, b \in B\}\,,$$

čemuž říkáme součet a součin množin

VĚTA. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Je-li U okolí součtu $a+b$, existují okolí U_a, U_b bodů a, b resp., tak, že $U_a + U_b \subset U$.
2. Je-li U okolí součinu ab, existují okolí U_a, U_b bodů a, b resp., tak, že $U_a \cdot U_b \subset U$.
3. Je-li $a \neq 0$ a U okolí bodu $1/a$, existuje okolí U_a bodu a tak, že $\{1/x; x \in U_a\} \subset U$.

Předchozí tvrzení platí i pro případ, kdy a, b jsou nevlastní čísla a $a+b$, ab nebo $1/a$ má smysl.

2