

Posloupnosti a jejich konvergence



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnosti a jejich konvergence



Pojem konvergence je velmi důležitý pro nediskrétní matematiku. Je nezbytný všude, kde je potřeba aproximovat nějaké hodnoty, řešit rovnice přibližně, používat derivace, integrály.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnosti a jejich konvergence



Pojem konvergence je velmi důležitý pro nediskrétní matematiku. Je nezbytný všude, kde je potřeba aproximovat nějaké hodnoty, řešit rovnice přibližně, používat derivace, integrály.



Konvergence znamená, že nějaké dané hodnoty se, zhruba řečeno, blíží k nějaké pevné hodnotě.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Těch daných hodnot musí být (teoreticky) nekonečně mnoho a nejjednodušší případ je samozřejmě pro spočetně mnoho takových hodnot – konvergence v tomto případě se pak nazývá konvergence posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Těch daných hodnot musí být (teoreticky) nekonečně mnoho a nejjednodušší případ je samozřejmě pro spočetně mnoho takových hodnot – konvergence v tomto případě se pak nazývá konvergence posloupnosti.



Na konvergenci posloupnosti je postavena klasická matematická analýza.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POSLOUPNOSTI

Spočetné množiny se poznají tak, že se dají všechny její prvky přiřadit přirozeným číslům, každému číslu jeden prvek.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POSLOUPNOSTI

Spočetné množiny se poznají tak, že se dají všechny její prvky přiřadit přirozeným číslům, každému číslu jeden prvek.



Protože se s přirozenými čísly dobře pracuje, je vhodné za posloupnosti brát rovnou prvky indexované těmito čísly, tj., pokud se pracuje např. v \mathbb{R} , každému přirozenému číslu n se přiřadí nějaké reálné číslo x_n .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

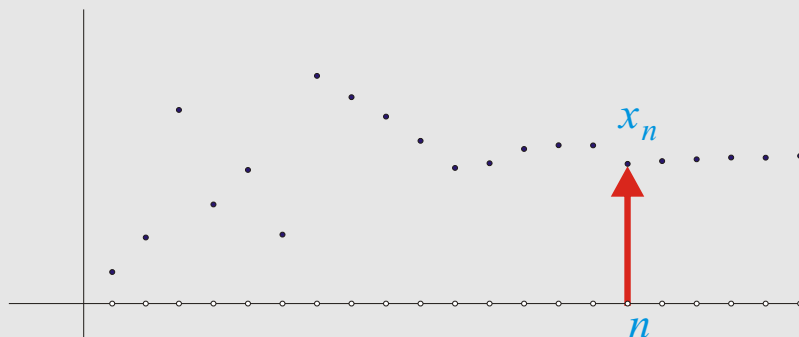
1 2 3 4 5 6 7 8 9

POSLOUPNOSTI

Spočetné množiny se poznají tak, že se dají všechny její prvky přiřadit přirozeným číslům, každému číslu jeden prvek.



Protože se s přirozenými čísly dobře pracuje, je vhodné za posloupnosti brát rovnou prvky indexované těmito čísly, tj., pokud se pracuje např. v \mathbb{R} , každému přirozenému číslu n se přiřadí nějaké reálné číslo x_n .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

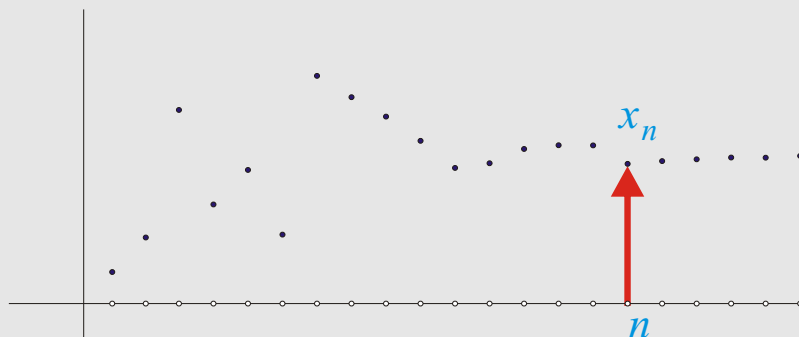
1 2 3 4 5 6 7 8 9

POSLOUPNOSTI

Spočetné množiny se poznají tak, že se dají všechny její prvky přiřadit přirozeným číslům, každému číslu jeden prvek.



Protože se s přirozenými čísly dobře pracuje, je vhodné za posloupnosti brát rovnou prvky indexované těmito čísly, tj., pokud se pracuje např. v \mathbb{R} , každému přirozenému číslu n se přiřadí nějaké reálné číslo x_n .



Nebudeme zkoumat posloupnosti panovníků.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost v množině X (nebo posloupnost prvků množiny X) je soubor $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ prvků X indexovaný přirozenými čísly, tj. posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je zobrazení $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, kde $f(n) = x_n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost v množině X (nebo posloupnost prvků množiny X) je soubor $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ prvků X indexovaný přirozenými čísly, tj. posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je zobrazení $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, kde $f(n) = x_n$.



Někdy se posloupnost značí jako $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{x_n\}_n$ nebo jen $\{x_n\}$ (např. $\{\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, resp. $\{\sqrt{n}\}_{\mathbb{N}}$, nebo $\{\sqrt{n}\}$, je-li zřejmé, pro která čísla n se odmocniny berou); v některých případech (většinou konkrétních) se píše i $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ (např. posloupnost sudých přirozených čísel $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$). Není-li uvedeno přesné indexování, vždy se chápou indexy z \mathbb{N} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny
izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, kde $\{k_n\}$ je nějaká posloupnost přirozených čísel s vlastností $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, kde $\{k_n\}$ je nějaká posloupnost přirozených čísel s vlastností $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$



Příkladem je podposloupnost přirozených čísel dělitelných 8 posloupnosti sudých přirozených čísel (tj., podposloupnost $\{8, 16, 24, 32, 40, \dots\}$ posloupnosti $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$).

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ



Následující vlastnosti ulehčí práci s posloupnostmi při aplikacích.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ



Následující vlastnosti ulehčí práci s posloupnostmi při aplikacích.



V mnoha případech bude možné použít jen posloupnosti s některou vhodnou vlastností, čímž se situace zjednoduší.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel se nazývá



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel se nazývá



- **konstantní**, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k = x_n)$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel se nazývá



- **konstantní**, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k = x_n)$.



- **prostá**, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k \neq x_n)$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel se nazývá



- **konstantní**, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k = x_n)$.



- **prostá**, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k \neq x_n)$.



- **omezená** (resp. **shora omezená** nebo **zdola omezená**), jestliže množina všech bodů x_n má uvedenou vlastnost jako podmnožina \mathbb{R} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

- rostoucí (resp. klesající), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k < x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k > x_n)$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

- rostoucí (resp. klesající), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k < x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k > x_n)$).



- neklesající (resp. nerostoucí), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k \leq x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k \geq x_n)$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

- rostoucí (resp. klesající), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k < x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k > x_n)$).



- neklesající (resp. nerostoucí), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k \leq x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k \geq x_n)$).



Posloupnost, která je buď rostoucí nebo klesající nebo nerostoucí nebo neklesající, se nazývá **monotónní**.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

- rostoucí (resp. klesající), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k < x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k > x_n)$).



- neklesající (resp. nerostoucí), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k \leq x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k \geq x_n)$).



Posloupnost, která je buď rostoucí nebo klesající nebo nerostoucí nebo neklesající, se nazývá **monotónní**.



Posloupnost se nazývá **ryze monotónní**, jestliže je buď rostoucí nebo klesající.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li P nějaká vlastnost posloupností, pak výrok **posloupnost** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **má skoro** P znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že posloupnost $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ má P .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li P nějaká vlastnost posloupností, pak výrok **posloupnost** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **má skoro** P znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že posloupnost $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ má P .



To je veliká úspora času. Lépe si budeme povídat o posloupnostech, když budeme používat pojmy „skoro rostoucí“ a podobně.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li P nějaká vlastnost posloupností, pak výrok **posloupnost** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má skoro P znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že posloupnost $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ má P .



To je veliká úspora času. Lépe si budeme povídat o posloupnostech, když budeme používat pojmy „skoro rostoucí“ a podobně.



Já neumím skoro nic.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li P nějaká vlastnost posloupností, pak výrok **posloupnost** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má skoro P znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že posloupnost $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ má P .



To je veliká úspora času. Lépe si budeme povídat o posloupnostech, když budeme používat pojmy „skoro rostoucí“ a podobně.



Já neumím skoro nic.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Všimněte si, že se čeština a matematika někdy domlouvají trochu krkolomně. V matematice se hraje na pravda x nepravda, ale skoro pravda je teď také povolena.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Všimněte si, že se čeština a matematika někdy domlouvají trochu krkolomně. V matematice se hraje na pravda x nepravda, ale skoro pravda je teď také povolena.



Podobně budeme říkat, že množina obsahuje skoro všechny prvky posloupnosti, když obsahuje prvky posloupnosti od určitého indexu.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ



Jak bylo popsáno na začátku této části, hlavním důvodem práce s posloupnostmi je jejich použití např. k aproximaci řešení rovnic nebo k definicím či charakterizacím nových pojmů jako jsou spojitost a derivace.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ



Jak bylo popsáno na začátku této části, hlavním důvodem práce s posloupnostmi je jejich použití např. k aproximaci řešení rovnic nebo k definicím či charakterizacím nových pojmů jako jsou spojitost a derivace.



K tomu je potřeba mít zaveden pojem konvergence posloupností.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ



Jak bylo popsáno na začátku této části, hlavním důvodem práce s posloupnostmi je jejich použití např. k aproximaci řešení rovnic nebo k definicím či charakterizacím nových pojmů jako jsou spojitost a derivace.



K tomu je potřeba mít zaveden pojem konvergence posloupností.



Jedná se o jakési přibližování.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny
izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při grafickém znázornění některých posloupností v předchozích příkladech bylo vidět, že se příslušné body přibližují k nějaké hodnotě.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při grafickém znázornění některých posloupností v předchozích příkladech bylo vidět, že se příslušné body přibližují k nějaké hodnotě.



Např. u $\{1 - \frac{1}{n}\}$ se při znázornění na přímce přibližovaly body k číslu 1, při znázornění v rovině se graf přibližoval k přímce $y = 1$ – potom se říká, že posloupnost $\{1 - \frac{1}{n}\}$ konverguje k 1.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

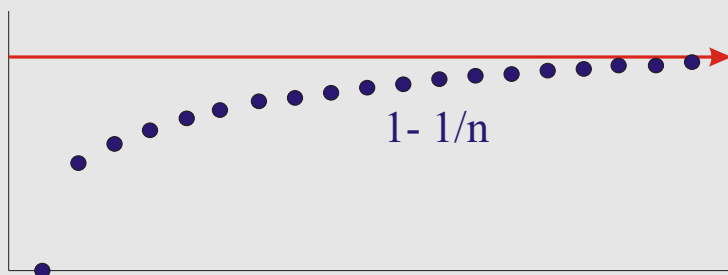
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při grafickém znázornění některých posloupností v předchozích příkladech bylo vidět, že se příslušné body přibližují k nějaké hodnotě.



Např. u $\{1 - \frac{1}{n}\}$ se při znázornění na přímce přibližovaly body k číslu 1, při znázornění v rovině se graf přibližoval k přímce $y = 1$ – potom se říká, že posloupnost $\{1 - \frac{1}{n}\}$ konverguje k 1.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

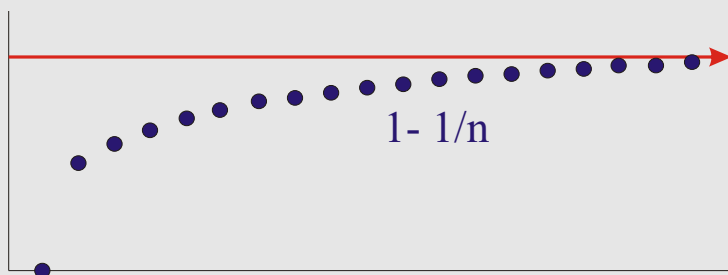
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při grafickém znázornění některých posloupností v předchozích příkladech bylo vidět, že se příslušné body přibližují k nějaké hodnotě.



Např. u $\{1 - \frac{1}{n}\}$ se při znázornění na přímce přibližovaly body k číslu 1, při znázornění v rovině se graf přibližoval k přímce $y = 1$ – potom se říká, že posloupnost $\{1 - \frac{1}{n}\}$ konverguje k 1.



Je samozřejmě nutné dát to-
muto „přibližování“ přesnou
formu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v \mathbb{R} **konverguje** k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo **má za limitu bod** a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje **skoro všechny** prvky posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v \mathbb{R} **konverguje** k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo **má za limitu bod** a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje **skoro všechny** prvky posloupnosti.



Značí se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ nebo $x_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow \infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

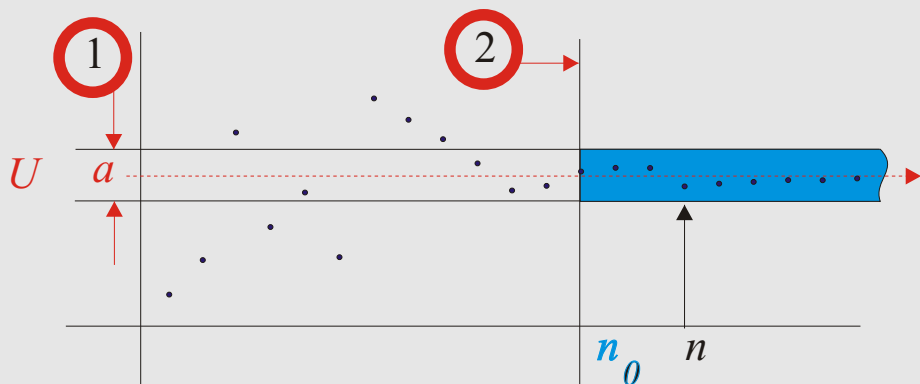
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v \mathbb{R} **konverguje** k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo **má za limitu** bod a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje **skoro všechny** prvky posloupnosti.



Značí se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ nebo $x_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow \infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je-li zřejmé, že se jedná o limitu posloupnosti, je možné použít značení $\lim_n x_n = a$ nebo dokonce $\lim x_n = a$, jsou-li i indexy zřejmé.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné vlastnosti limity posloupnosti



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné vlastnosti limity posloupnosti



Následující tvrzení jsou snadná a budou se používat bez odkazu (snad jen pro první vlastnost rada: dva různé body z \mathbb{R}^* mají disjunktní okolí).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné vlastnosti limity posloupnosti



Následující tvrzení jsou snadná a budou se používat bez odkazu (snad jen pro první vlastnost rada: dva různé body z \mathbb{R}^* mají disjunktní okolí).



Máme hezkou definici, budeme mít hezké důkazy.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:



1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:



1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;



2. je-li posloupnost $\{x_n\}$ konstantní, $x_n = a$, pak $\lim x_n = a$;



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:



1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;



2. je-li posloupnost $\{x_n\}$ konstantní, $x_n = a$, pak $\lim x_n = a$;



3. jestliže $\lim x_n = a$, pak $\lim x_{k_n} = a$ pro každou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$;



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...
limita a uspořádání

2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:



1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;



2. je-li posloupnost $\{x_n\}$ konstantní, $x_n = a$, pak $\lim x_n = a$;



3. jestliže $\lim x_n = a$, pak $\lim x_{k_n} = a$ pro každou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$;



4. jestliže z každé podposloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k a , pak $\{x_n\}$ konverguje k a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:



1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;



2. je-li posloupnost $\{x_n\}$ konstantní, $x_n = a$, pak $\lim x_n = a$;



3. jestliže $\lim x_n = a$, pak $\lim x_{k_n} = a$ pro každou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$;



4. jestliže z každé podposloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k a , pak $\{x_n\}$ konverguje k a .



5. jestliže $\{x_n\}$ konverguje v \mathbb{R} , pak $\{x_n\}$ je omezená posloupnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dvě další tvrzení jsou sice jednoduchá z hlediska důkazu, ale důležitá z hlediska uvědomění si různých možností přístupu ke konvergenci.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dvě další tvrzení jsou sice jednoduchá z hlediska důkazu, ale důležitá z hlediska uvědomění si různých možností přístupu ke konvergenci.



První věta charakterizuje konkrétní vlastní limitu, kdežto druhá věta charakterizuje konvergenci k neznámému vlastnímu číslu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:



1. $\lim x_n = a;$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:



1. $\lim x_n = a;$



2. $\lim(x_n - a) = 0;$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:



1. $\lim x_n = a;$



2. $\lim(x_n - a) = 0;$



3. $\lim |x_n - a| = 0;$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:



1. $\lim x_n = a$;



2. $\lim(x_n - a) = 0$;



3. $\lim |x_n - a| = 0$;



4. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$;



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:



1. $\lim x_n = a$;



2. $\lim(x_n - a) = 0$;



3. $\lim |x_n - a| = 0$;



4. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$;



5. $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) = a$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Je-li U okolí bodu 0, je posunutí $a + U = \{a + u; u \in U\}$ okolím bodu a a tedy $\{x_n\}$ leží skoro celá v $a + U$. To znamená, že $\{x_n - a\}$ leží skoro celá v U .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Je-li U okolí bodu 0, je posunutí $a + U = \{a + u; u \in U\}$ okolím bodu a a tedy $\{x_n\}$ leží skoro celá v $a + U$. To znamená, že $\{x_n - a\}$ leží skoro celá v U .



$2 \Leftrightarrow 3$: Je-li U symetrické okolí bodu 0, pak $|x| \in U \Leftrightarrow x \in U$ — odtud ihned plyne tvrzení.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Je-li U okolí bodu 0, je posunutí $a + U = \{a + u; u \in U\}$ okolím bodu a a tedy $\{x_n\}$ leží skoro celá v $a + U$. To znamená, že $\{x_n - a\}$ leží skoro celá v U .



$2 \Leftrightarrow 3$: Je-li U symetrické okolí bodu 0, pak $|x| \in U \Leftrightarrow x \in U$ — odtud ihned plyne tvrzení.



$2 \Rightarrow 4$: $U = \{y; |y| < \varepsilon\}$ je okolí bodu 0 a tedy podle (2) skoro všechny členy $\{x_n - a\}$ (tj. od jistého indexu n_0) leží v U , což je podmínka (4).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Je-li U okolí bodu 0, je posunutí $a + U = \{a + u; u \in U\}$ okolím bodu a a tedy $\{x_n\}$ leží skoro celá v $a + U$. To znamená, že $\{x_n - a\}$ leží skoro celá v U .



$2 \Leftrightarrow 3$: Je-li U symetrické okolí bodu 0, pak $|x| \in U \Leftrightarrow x \in U$ — odtud ihned plyne tvrzení.



$2 \Rightarrow 4$: $U = \{y; |y| < \varepsilon\}$ je okolí bodu 0 a tedy podle (2) skoro všechny členy $\{x_n - a\}$ (tj. od jistého indexu n_0) leží v U , což je podmínka (4).



$4 \Rightarrow 5$: Necht' ε je libovolné kladné číslo. Podle (4) mají všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ s indexy většími než n_0 vzájemnou vzdálenost menší než 2ε a tedy

$$\left| \inf_{n \geq k} x_n - \sup_{n \geq k} x_n \right| \leq 2\varepsilon$$

pro každé $k > n_0$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Je-li U okolí bodu 0, je posunutí $a + U = \{a + u; u \in U\}$ okolím bodu a a tedy $\{x_n\}$ leží skoro celá v $a + U$. To znamená, že $\{x_n - a\}$ leží skoro celá v U .



$2 \Leftrightarrow 3$: Je-li U symetrické okolí bodu 0, pak $|x| \in U \Leftrightarrow x \in U$ — odtud ihned plyne tvrzení.



$2 \Rightarrow 4$: $U = \{y; |y| < \varepsilon\}$ je okolí bodu 0 a tedy podle (2) skoro všechny členy $\{x_n - a\}$ (tj. od jistého indexu n_0) leží v U , což je podmínka (4).



$4 \Rightarrow 5$: Necht' ε je libovolné kladné číslo. Podle (4) mají všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ s indexy většími než n_0 vzájemnou vzdálenost menší než 2ε a tedy

$$\left| \inf_{n \geq k} x_n - \sup_{n \geq k} x_n \right| \leq 2\varepsilon$$

pro každé $k > n_0$.



Protože posloupnost $\{\inf_{n \geq k} x_n\}_k$ je neklesající a posloupnost $\{\sup_{n \geq k} x_n\}_k$ nerostoucí (do-
kažte), nemohou se vzdálenosti mezi $\inf_{n \geq k} x_n$ a $\sup_{n \geq k} x_n$ zvětšovat a tedy

$$\left| \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) - \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) \right| \leq 2\varepsilon .$$

To je však nerovnost mezi dvěma čísly a platí pro každé $\varepsilon > 0$. Tudíž musí být levá strana poslední nerovnosti rovna 0.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy díky 4 platí

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) = a .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy díky 4 platí

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) = a .$$



5 \Rightarrow 1: Necht' U je okolí bodu a tvaru intervalu. Podle **vlastností** suprem a infim existuje k tak, že $\inf_{n \geq k} x_n \in U$ a $\sup_{n \geq k} x_n \in U$. Pro $m \geq k$ je $\inf_{n \geq k} x_n \leq x_m \leq \sup_{n \geq k} x_n$ a tedy leží v U , protože U je interval. \diamond



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy díky 4 platí

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) = a .$$



5 \Rightarrow 1: Necht' U je okolí bodu a tvaru intervalu. Podle **vlastností** suprem a infim existuje k tak, že $\inf_{n \geq k} x_n \in U$ a $\sup_{n \geq k} x_n \in U$. Pro $m \geq k$ je $\inf_{n \geq k} x_n \leq x_m \leq \sup_{n \geq k} x_n$ a tedy leží v U , protože U je interval. \diamond



Je to řada úvah, které si nejde zapamatovat. Mají však vnitřní ideu. Pokud ji pochopíte, důkazy pomocí této myšlenky sestavíte.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy díky 4 platí

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) = a .$$



5 \Rightarrow 1: Necht' U je okolí bodu a tvaru intervalu. Podle **vlastností** supremu a infimu existuje k tak, že $\inf_{n \geq k} x_n \in U$ a $\sup_{n \geq k} x_n \in U$. Pro $m \geq k$ je $\inf_{n \geq k} x_n \leq x_m \leq \sup_{n \geq k} x_n$ a tedy leží v U , protože U je interval. \diamond



Je to řada úvah, které si nejde zapamatovat. Mají však vnitřní ideu. Pokud ji pochopíte, důkazy pomocí této myšlenky sestavíte.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bojím bojím ...



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

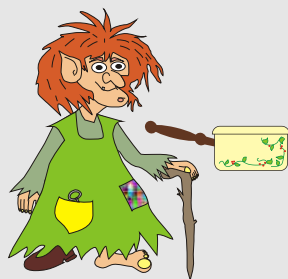
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bojím bojím ...

Vnitřní ideu nám tady podu-
šenou pod pokličkou. ...



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0.$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0.$



Pokud vidíte limitu jako ob-
rázek, řadu věcí děláte jed-
noduše.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0.$



Pokud vidíte limitu jako ob-
rázek, řadu věcí děláte jed-
noduše.



Ach, jak jsou si ty všechny
nuly podobné ...



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0$.



Pokud vidíte limitu jako ob-
rázek, řadu věcí děláte jed-
noduše.



Ach, jak jsou si ty všechny
nuly podobné ...



POZNÁMKA. Je možné dodat obdobu vlastnosti (4) pro nevlastní body (dokažte):
 $\lim x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) právě když

$$\forall p \in \mathbb{R} \exists n_0 (n > n_0 \Rightarrow x_n > p) \quad (\text{resp. } x_n < p).$$

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ekvivalence (1) a (5) předchozího tvrzení a ekvivalence (1) a (3) následujícího tvrzení platí i pro nevlastní a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel jsou ekvivalentní:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel jsou ekvivalentní:



1. $\{x_n\}$ konverguje v \mathbb{R} ;



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel jsou ekvivalentní:



1. $\{x_n\}$ konverguje v \mathbb{R} ;



2. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$;



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel jsou ekvivalentní:



1. $\{x_n\}$ konverguje v \mathbb{R} ;



2. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$;



3. $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) \in \mathbb{R}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Jestliže $\{x_n\}$ konverguje, např. k a , pak podle předchozího tvrzení, vlastnosti (4), platí $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2)$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Jestliže $\{x_n\}$ konverguje, např. k a , pak podle předchozího tvrzení, vlastnosti (4), platí $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2)$.



To znamená, že pro toto ε a $n, m > n_0$ je

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

což ukazuje vlastnost 2.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$2 \Rightarrow 3$: toto je stejné jako v předchozí větě důkaz $4 \Rightarrow 5$ (podstatné tam byly vzdálenosti mezi prvky posloupnosti, nikoli limita).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 \Rightarrow 3: toto je stejné jako v předchozí větě důkaz 4 \Rightarrow 5 (podstatné tam byly vzdálenosti mezi prvky posloupnosti, nikoli limita).



3 \Rightarrow 1: je opět stejné jako v předchozí větě důkaz 5 \Rightarrow 1, označí-li se za a číslo $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$. \diamond



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podmínka 2 ($\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$) se nazývá **Bolzanova–Cauchyova** podmínka a posloupnost splňující tuto podmínku se nazývá **cauchyovská**.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podmínka 2 ($\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$) se nazývá **Bolzanova–Cauchyova** podmínka a posloupnost splňující tuto podmínku se nazývá **cauchyovská**.



Bolzanova–Cauchyova podmínka bude často použita v situacích, kdy bude potřeba ukázat, že posloupnost (např. integrálů, funkcí) konverguje, aniž je možné nebo nutné zjistit její limitu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti definice

podposloupnost vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podmínka 2 ($\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$) se nazývá **Bolzano–Cauchyova** podmínka a posloupnost splňující tuto podmínku se nazývá **cauchyovská**.



Bolzano–Cauchyova podmínka bude často použita v situacích, kdy bude potřeba ukázat, že posloupnost (např. integrálů, funkcí) konverguje, aniž je možné nebo nutné zjistit její limitu.



To je superdůležité. Když neznám limitu, tak alespoň ukážu konvergenci.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podmínka 2 ($\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$) se nazývá **Bolzano–Cauchyova** podmínka a posloupnost splňující tuto podmínku se nazývá **cauchyovská**.



Bolzano–Cauchyova podmínka bude často použita v situacích, kdy bude potřeba ukázat, že posloupnost (např. integrálů, funkcí) konverguje, aniž je možné nebo nutné zjistit její limitu.



To je superdůležité. Když neznám limitu, tak alespoň ukážu konvergenci.



Bolzano–Cauchyova podmínka popisuje situaci, kdy se posloupnost již jaksi "ustálila" a nic podstatného nevyvádí.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Já se prý taky ustálil.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Já se prý taky ustálil.



Cauchyovská posloupnost
je prostě hodná.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Já se prý taky ustálil.



Cauchyovská posloupnost
je prostě hodná.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Asi taky nosí růžové šatičky.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a aritmetické operace



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a aritmetické operace



Následující tvrzení ukazuje, že se limita posloupností chová přirozeně k aritmetickým operacím reálných čísel.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a aritmetické operace



Následující tvrzení ukazuje, že se limita posloupností chová přirozeně k aritmetickým operacím reálných čísel.



Součet, součin a podíl posloupností se definuje po indexech, tj., např. pro součet, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a aritmetické operace



Následující tvrzení ukazuje, že se limita posloupností chová přirozeně k aritmetickým operacím reálných čísel.



Součet, součin a podíl posloupností se definuje po indexech, tj., např. pro součet, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.



Následuje věta o limitě součtu a součinu. Bývala to pěkná otázka ke zkoušení. Nicméně při použití věty o součtu okolí tu nezbyla žádná šťáva. Je to čajíček.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny
izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a aritmetické operace



Následující tvrzení ukazuje, že se limita posloupností chová přirozeně k aritmetickým operacím reálných čísel.



Součet, součin a podíl posloupností se definuje po indexech, tj., např. pro součet, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.



Následuje věta o limitě součtu a součinu. Bývala to pěkná otázka ke zkoušení. Nicméně při použití věty o součtu okolí tu nezbyla žádná šťáva. Je to čajíček.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nejdu nevhod?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak platí



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak platí



1. $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak platí



1. $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;



2. $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak platí



1. $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;



2. $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;



3. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$, pokud má pravá strana smysl;



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' má smysl $\lim x_n + \lim y_n$, tj. existují $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ a výraz $a + b$ má smysl.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' má smysl $\lim x_n + \lim y_n$, tj. existují $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ a výraz $a + b$ má smysl.



Necht' U je okolí bodu $a + b$. Podle **tvrzení o sčítání okolí** existují okolí V bodu a a okolí W bodu b tak, že součet bodu z V a bodu z W leží v U (tj. $V + W \subset U$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Necht' má smysl $\lim x_n + \lim y_n$, tj. existují $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ a výraz $a + b$ má smysl.



Necht' U je okolí bodu $a + b$. Podle **tvrzení o sčítání okolí** existují okolí V bodu a a okolí W bodu b tak, že součet bodu z V a bodu z W leží v U (tj. $V + W \subset U$).



Pak skoro všechny členy $\{x_n\}$ leží ve V a skoro všechny členy $\{y_n\}$ leží ve W . Jejich součty, to znamená i skoro všechny členy $\{x_n + y_n\}$, leží ve $V + W$ a tedy v U , což znamená, že $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Tím je dokázáno tvrzení (1).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se v předchozím důkazu píše násobení místo sčítání a použije **tvrzení o násobení okolí**, dostane se důkaz tvrzení (2).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se v předchozím důkazu píše násobení místo sčítání a použije **tvrzení o násobení okolí**, dostane se důkaz tvrzení (2).



Jde to snadno.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se v předchozím důkazu píše násobení místo sčítání a použije tvrzení o násobení okolí, dostane se důkaz tvrzení (2).



Jde to snadno.



Já jdu sama nesnadno.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jestliže má pravá strana (3) smysl, pak $\lim y_n \neq 0$, což znamená, že skoro všechny členy $\{y_n\}$ jsou nenulové (jinak by existovala podposloupnost samých 0 a tedy by musela i celá posloupnost mít limitu 0).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže má pravá strana (3) smysl, pak $\lim y_n \neq 0$, což znamená, že skoro všechny členy $\{y_n\}$ jsou nenulové (jinak by existovala podposloupnost samých 0 a tedy by musela i celá posloupnost mít limitu 0).



Pak i zlomky $\frac{x_n}{y_n}$ mají od jistého indexu počínaje smysl. Protože $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$ stačí, vzhledem k limite součinu v (2), předpokládat že $\{x_n\}$ je konstantní posloupnost s hodnotou 1.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže má pravá strana (3) smysl, pak $\lim y_n \neq 0$, což znamená, že skoro všechny členy $\{y_n\}$ jsou nenulové (jinak by existovala podposloupnost samých 0 a tedy by musela i celá posloupnost mít limitu 0).



Pak i zlomky $\frac{x_n}{y_n}$ mají od jistého indexu počínaje smysl. Protože $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$ stačí, vzhledem k limite součinu v (2), předpokládat že $\{x_n\}$ je konstantní posloupnost s hodnotou 1.



Podle [tvrzení o podílu okolí](#) je důkaz obdobný jako v předchozích dvou případech. \diamond

[Poznámky 5](#) [Příklady 5](#) [Otázky 5](#)

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a uspořádání



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a uspořádání



Tato část ukazuje chování konvergence posloupností k uspořádání na reálných číslech a existenci limity monotónních posloupností.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a uspořádání



Tato část ukazuje chování konvergence posloupností k uspořádání na reálných číslech a existenci limity monotónních posloupností.



Zjistíme, že větší posloupnost nemá menší limitu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita a uspořádání



Tato část ukazuje chování konvergence posloupností k uspořádání na reálných číslech a existenci limity monotónních posloupností.



Zjistíme, že větší posloupnost nemá menší limitu.



To je jako co?



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.



1. Jestliže $\lim x_n < \lim y_n$, potom je $x_n < y_n$ pro skoro všechna n .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.



1. Jestliže $\lim x_n < \lim y_n$, potom je $x_n < y_n$ pro skoro všechna n .



2. Jestliže $x_n \leq y_n$ pro skoro všechna n , potom $\lim x_n \leq \lim y_n$ pokud obě limity existují.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.



1. Jestliže $\lim x_n < \lim y_n$, potom je $x_n < y_n$ pro skoro všechna n .



2. Jestliže $x_n \leq y_n$ pro skoro všechna n , potom $\lim x_n \leq \lim y_n$ pokud obě limity existují.



Důkaz. Necht' $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a < b$ a U, V jsou disjunktní otevřené intervaly, $U \ni a, V \ni b$. Pak každý prvek U je menší než každý prvek V (dokažte). Protože skoro všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ (resp. $\{y_n\}$) leží v U (resp. ve V), platí uvedené tvrzení (1).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.



1. Jestliže $\lim x_n < \lim y_n$, potom je $x_n < y_n$ pro skoro všechna n .



2. Jestliže $x_n \leq y_n$ pro skoro všechna n , potom $\lim x_n \leq \lim y_n$ pokud obě limity existují.



Důkaz. Necht' $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a < b$ a U, V jsou disjunktní otevřené intervaly, $U \ni a, V \ni b$. Pak každý prvek U je menší než každý prvek V (dokažte). Protože skoro všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ (resp. $\{y_n\}$) leží v U (resp. ve V), platí uvedené tvrzení (1).



Tvrzení (2) plyne ihned z (1). Kdyby totiž $x_n \leq y_n$ pro skoro všechna n a $\lim x_n > \lim y_n$, pak podle (1) (s obrácenou nerovností) by pro skoro všechna n platilo $x_n > y_n$, což by byl spor s předpokladem. \diamond



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $\{x_n\}, \{a_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $x_n \leq a_n \leq y_n$ pro skoro všechna n . Jestliže existují $\lim x_n, \lim y_n$ a rovnají se, pak existuje i $\lim a_n$ a rovná se předchozím limitám.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

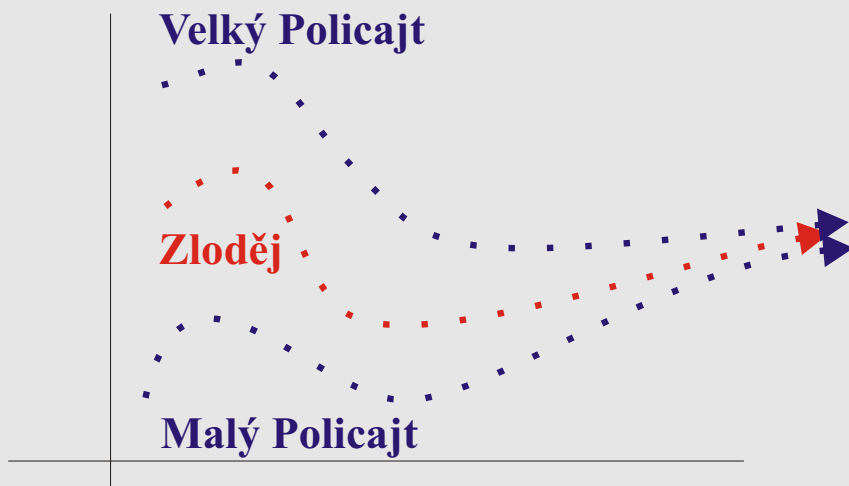
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $\{x_n\}, \{a_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $x_n \leq a_n \leq y_n$ pro skoro všechna n . Jestliže existují $\lim x_n, \lim y_n$ a rovnají se, pak existuje i $\lim a_n$ a rovná se předchozím limitám.



Jestliže je zloděj mezi dvěma policajty, pak při dopadení policajt i zloděj jedno jsou.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $\{x_n\}$ je omezená posloupnost a $\{y_n\}$ konverguje k 0. Potom $\lim x_n y_n = 0$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel.

1. Je-li $\{x_n\}$ neklesající, pak $\lim x_n = \sup x_n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel.

1. Je-li $\{x_n\}$ neklesající, pak $\lim x_n = \sup x_n$.



2. Je-li $\{x_n\}$ nerostoucí, pak $\lim x_n = \inf x_n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel.

1. Je-li $\{x_n\}$ neklesající, pak $\lim x_n = \sup x_n$.



2. Je-li $\{x_n\}$ nerostoucí, pak $\lim x_n = \inf x_n$.



Důkaz. Necht' je posloupnost $\{x_n\}$ neklesající. Potom $\inf_{n \geq k} x_n = x_k$ a $\sup_{n \geq k} x_n$ je stejné pro všechna k a rovná se nějakému a . Potom ale

$$\sup_k \inf_{n \geq k} x_n = \sup_k x_k = a, \quad \inf_k \sup_{n \geq k} x_n = \inf_k a = a.$$

Podle **charakterizace** limity posloupnosti pomocí suprem a infim tedy $\lim x_n$ existuje a rovná se a , tj. číslu $\sup_n x_n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{x_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel.

1. Je-li $\{x_n\}$ neklesající, pak $\lim x_n = \sup x_n$.



2. Je-li $\{x_n\}$ nerostoucí, pak $\lim x_n = \inf x_n$.



Důkaz. Necht' je posloupnost $\{x_n\}$ neklesající. Potom $\inf_{n \geq k} x_n = x_k$ a $\sup_{n \geq k} x_n$ je stejné pro všechna k a rovná se nějakému a . Potom ale

$$\sup_k \inf_{n \geq k} x_n = \sup_k x_k = a, \quad \inf_k \sup_{n \geq k} x_n = \inf_k a = a.$$

Podle **charakterizace** limity posloupnosti pomocí supremu a infimu tedy $\lim x_n$ existuje a rovná se a , tj. číslu $\sup_n x_n$.



Pro nerostoucí posloupnost $\{x_n\}$ je důkaz obdobný, nebo lze použít předchozí důkaz pro posloupnost $\{-x_n\}$. ◇



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Monotónní posloupnost má vždy limitu. Omezená monotónní posloupnost vždy konverguje v \mathbb{R} .

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6 Cvičení 6 Učení 6

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HROMADNÝ BOD



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HROMADNÝ BOD



Posloupnost $\{x_n\}$ nemusí konvergovat, ale některé její podposloupnosti konvergovat mohou.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HROMADNÝ BOD



Posloupnost $\{x_n\}$ nemusí konvergovat, ale některé její podposloupnosti konvergovat mohou.



Jejich limity (nazývané hromadné body) mohou někdy nahrazovat neexistující limitu celé posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HROMADNÝ BOD



Posloupnost $\{x_n\}$ nemusí konvergovat, ale některé její podposloupnosti konvergovat mohou.



Jejich limity (nazývané hromadné body) mohou někdy nahrazovat neexistující limitu celé posloupnosti.



Protože každá nekonečná množina obsahuje prosté posloupnosti, lze definovat hromadné body množiny (i nespočetné) jako hromadné body těchto posloupností.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

HROMADNÝ BOD



Posloupnost $\{x_n\}$ nemusí konvergovat, ale některé její podposloupnosti konvergovat mohou.



Jejich limity (nazývané hromadné body) mohou někdy nahrazovat neexistující limitu celé posloupnosti.



Protože každá nekonečná množina obsahuje prosté posloupnosti, lze definovat hromadné body množiny (i nespočetné) jako hromadné body těchto posloupností.



Jsou to body, které jsou k dané množině velmi blízko.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hromadný bod posloupnosti



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hromadný bod posloupnosti



Okolí limity musí obsahovat skoro všechny členy posloupnosti. U hromadného bodu je podmínka zeslabena na nekonečně mnoho členů posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hromadný bod posloupnosti



Okolí limity musí obsahovat skoro všechny členy posloupnosti. U hromadného bodu je podmínka zeslabena na nekonečně mnoho členů posloupnosti.



Když budeme na tabuli kreslit jednotlivé body posloupnosti $x_n = 1/n$ křídou, bude za chvíli na tabuli hromada křídý.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Prvek a z \mathbb{R}^* se nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže každé okolí U bodu a obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ (tj., existuje nekonečná podmnožina $S \subset \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in U$ pro $s \in S$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Prvek a z \mathbb{R}^* se nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže každé okolí U bodu a obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ (tj., existuje nekonečná podmnožina $S \subset \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in U$ pro $s \in S$).



Jsou to body, které jsou atakovány prvky posloupnosti s libovolně vysokým indexem.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.



1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, právě když existuje její podposloupnost $\{x_{k_n}\}$, která konverguje k bodu a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.



1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, právě když existuje její podposloupnost $\{x_{k_n}\}$, která konverguje k bodu a .



2. Hodnota $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$ ($= \lim_k \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$) je nejmenším hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (značí se $\liminf x_n$ nebo $\underline{\lim} x_n$ a čte se limes inferior).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.



1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, právě když existuje její podposloupnost $\{x_{k_n}\}$, která konverguje k bodu a .



2. Hodnota $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) (= \lim_k \left(\inf_{n \geq k} x_n \right))$ je nejmenším hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (značí se $\liminf x_n$ nebo $\underline{\lim} x_n$ a čte se limes inferior).



3. Hodnota $\inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) (= \lim_k \left(\sup_{n \geq k} x_n \right))$ je největším hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (značí se $\limsup x_n$ nebo $\overline{\lim} x_n$ a čte se limes superior).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. (1) Jestliže k a konverguje vybraná posloupnost z $\{x_n\}$, pak každé okolí bodu a obsahuje skoro všechny členy této podposloupnosti, tedy nekonečně mnoho členů z $\{x_n\}$, a proto je a hromadným bodem $\{x_n\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. (1) Jestliže k a konverguje vybraná posloupnost z $\{x_n\}$, pak každé okolí bodu a obsahuje skoro všechny členy této podposloupnosti, tedy nekonečně mnoho členů z $\{x_n\}$, a proto je a hromadným bodem $\{x_n\}$.



Naopak, necht' a je hromadným bodem $\{x_n\}$ a U_n , pro $n \in \mathbb{N}$, jsou okolí bodu a takové, že $U_{n+1} \subset U_n, \bigcap U_n = \{a\}$, např. $U_n = (a - 1/n, a + 1/n)$ pro a vlastní. Lze předpokládat, že $x_n \neq a$ pro skoro všechna n (jinak by existovala konstantní podposloupnost s hodnotou a a důkaz by byl hotov).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. (1) Jestliže k a konverguje vybraná posloupnost z $\{x_n\}$, pak každé okolí bodu a obsahuje skoro všechny členy této podposloupnosti, tedy nekonečně mnoho členů z $\{x_n\}$, a proto je a hromadným bodem $\{x_n\}$.



Naopak, necht' a je hromadným bodem $\{x_n\}$ a U_n , pro $n \in \mathbb{N}$, jsou okolí bodu a takové, že $U_{n+1} \subset U_n, \bigcap U_n = \{a\}$, např. $U_n = (a - 1/n, a + 1/n)$ pro a vlastní. Lze předpokládat, že $x_n \neq a$ pro skoro všechna n (jinak by existovala konstantní podposloupnost s hodnotou a a důkaz by byl hotov).



Každé okolí U_n obsahuje nekonečně členů z $\{x_n\}$. Lze tedy vybrat prostou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ tak, že $x_{k_n} \in U_n$. Zřejmě $\{x_{k_n}\}$ konverguje k a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(2) Necht' $a = \lim_k \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$ a U je otevřený interval okolo a . Tedy pro skoro všechna k je $\inf_{n \geq k} x_n \in U$. Jestliže infimum množiny náleží do otevřeného intervalu, musí do intervalu náležet i nějaký prvek této množiny (dokažte).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(2) Necht' $a = \lim_k \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$ a U je otevřený interval okolo a . Tedy pro skoro všechna k je $\inf_{n \geq k} x_n \in U$. Jestliže infimum množiny náleží do otevřeného intervalu, musí do intervalu náležet i nějaký prvek této množiny (dokažte).



Tedy pro každé k existuje $n_k \geq k$ tak, že $x_{n_k} \in U$ (použijte **vlastnosti** infima). Protože index n_k se může opakovat ve výběru jen konečně krát, obsahuje U nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ a tedy a je jejím hromadným bodem.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(2) Necht' $a = \lim_k \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$ a U je otevřený interval okolo a . Tedy pro skoro všechna k je $\inf_{n \geq k} x_n \in U$. Jestliže infimum množiny náleží do otevřeného intervalu, musí do intervalu náležet i nějaký prvek této množiny (dokažte).



Tedy pro každé k existuje $n_k \geq k$ tak, že $x_{n_k} \in U$ (použijte **vlastnosti** infima). Protože index n_k se může opakovat ve výběru jen konečně krát, obsahuje U nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ a tedy a je jejím hromadným bodem.



Necht' $b < a$ a V je intervalové okolí bodu b , které je disjunktní s nějakým intervalovým okolím U bodu a . Podle předchozího odstavce je pro skoro všechna k , např. pro $k > n_0$, $\inf_{n \geq k} x_n \in U$. Tedy jen členy x_1, x_2, \dots, x_{n_0} mohou ležet ve V a proto b není hromadný bod $\{x_n\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

(2) Necht' $a = \lim_k \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$ a U je otevřený interval okolo a . Tedy pro skoro všechna k je $\inf_{n \geq k} x_n \in U$. Jestliže infimum množiny náleží do otevřeného intervalu, musí do intervalu náležet i nějaký prvek této množiny (dokažte).




Tedy pro každé k existuje $n_k \geq k$ tak, že $x_{n_k} \in U$ (použijte **vlastnosti** infima). Protože index n_k se může opakovat ve výběru jen konečně krát, obsahuje U nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ a tedy a je jejím hromadným bodem.



Necht' $b < a$ a V je intervalové okolí bodu b , které je disjunktní s nějakým intervalovým okolím U bodu a . Podle předchozího odstavce je pro skoro všechna k , např. pro $k > n_0$, $\inf_{n \geq k} x_n \in U$. Tedy jen členy x_1, x_2, \dots, x_{n_0} mohou ležet ve V a proto b není hromadný bod $\{x_n\}$.



Část (3) se dokáže podobně jako část (2) nebo se (2) použije na posloupnost $\{-x_n\}$. 



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

1. Každá posloupnost má hromadný bod.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

1. Každá posloupnost má hromadný bod.



2. Posloupnost má limitu právě když má jediný hromadný bod.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

1. Každá posloupnost má hromadný bod.



2. Posloupnost má limitu právě když má jediný hromadný bod.



Je to pořád dokola. Doufám, že jsem to nepopletla. Myšlenka je tam jasná.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následují dvě důležitá tvrzení.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následují dvě důležitá tvrzení.



To první je jednoduchým důsledkem předchozího důsledku (1) a tvrzení (1) předchodí věty pro omezené posloupnosti, ale vzhledem k jeho významu je uvedeno znovu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následují dvě důležitá tvrzení.



To první je jednoduchým důsledkem předchozího důsledku (1) a tvrzení (1) předchodí věty pro omezené posloupnosti, ale vzhledem k jeho významu je uvedeno znovu.



Důkaz druhého tvrzení je složitější a ukazuje princip používaný často pro důkaz existence.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následují dvě důležitá tvrzení.



To první je jednoduchým důsledkem předchozího důsledku (1) a tvrzení (1) předchází věty pro omezené posloupnosti, ale vzhledem k jeho významu je uvedeno znovu.



Důkaz druhého tvrzení je složitější a ukazuje princip používaný často pro důkaz existence.



Je to velice užitečná věta !!!



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.

1. (**Bolzanova–Weierstrassova věta**) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergující v \mathbb{R} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.

1. (**Bolzanova–Weierstrassova věta**) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergující v \mathbb{R} .



2. (**Cantorova věta**) Je-li K_n klesající posloupnost uzavřených omezených intervalů na \mathbb{R} , pak $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů K_n konvergují k 0, je $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$ jednobodový.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA.

1. (**Bolzanova–Weierstrassova věta**) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergující v \mathbb{R} .



2. (**Cantorova věta**) Je-li K_n klesající posloupnost uzavřených omezených intervalů na \mathbb{R} , pak $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů K_n konvergují k 0, je $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$ jednobodový.



Ty věty ani nemohou neplatit. Tedy pokud jsme v \mathbb{R} .

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důkaz. (2). Necht' $x_n \in K_n$ pro každé n . Pak $\{x_n\}$ je omezená a má hromadný bod $a \in \mathbb{R}$. Nyní se ukáže, že $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. (2). Necht' $x_n \in K_n$ pro každé n . Pak $\{x_n\}$ je omezená a má hromadný bod $a \in \mathbb{R}$. Nyní se ukáže, že $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$.



Pokud $a \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$, pak existuje n tak, že $a \notin K_n$ a najde se otevřený interval U okolo a disjunktní s K_n (a tedy disjunktní s každým K_k pro $k > n$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. (2). Necht' $x_n \in K_n$ pro každé n . Pak $\{x_n\}$ je omezená a má hromadný bod $a \in \mathbb{R}$. Nyní se ukáže, že $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$.



Pokud $a \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$, pak existuje n tak, že $a \notin K_n$ a najde se otevřený interval U okolo a disjunkt s K_n (a tedy disjunkt s každým K_k pro $k > n$).



To je ale spor, neboť U musí obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ a tedy musí protínat nekonečně mnoho množin K_k .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. (2). Necht' $x_n \in K_n$ pro každé n . Pak $\{x_n\}$ je omezená a má hromadný bod $a \in \mathbb{R}$. Nyní se ukáže, že $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$.



Pokud $a \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$, pak existuje n tak, že $a \notin K_n$ a najde se otevřený interval U okolo a disjunktní s K_n (a tedy disjunktní s každým K_k pro $k > n$).



To je ale spor, neboť U musí obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ a tedy musí protínat nekonečně mnoho množin K_k .



Pokud délky intervalů K_n konvergují k 0, nemůže obsahovat jejich průnik dva různé body (ty mají kladnou vzdálenost). \diamond



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Děkuji za potlesk. Patří však
výše uvedeným pánům.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hromadný bod množiny



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hromadný bod množiny



Jednoduchou modifikací hromadného bodu posloupnosti se dostane hromadný bod množiny:



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hromadný bod množiny



Jednoduchou modifikací hromadného bodu posloupnosti se dostane hromadný bod množiny:



DEFINICE. Prvek a z \mathbb{R}^* se nazývá **hromadný bod** množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže každé okolí bodu a obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny A .

Prvek $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A se nazývá **izolovaný bod** množiny A .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hromadný bod množiny



Jednoduchou modifikací hromadného bodu posloupnosti se dostane hromadný bod množiny:



DEFINICE. Prvek a z \mathbb{R}^* se nazývá **hromadný bod** množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže každé okolí bodu a obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny A .

Prvek $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A se nazývá **izolovaný bod** množiny A .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a .



2. Bod $+\infty$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když A není shora omezená. Podobně pro $-\infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a .



2. Bod $+\infty$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když A není shora omezená. Podobně pro $-\infty$.



3. Konečná množina nemá žádný hromadný bod.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a .



2. Bod $+\infty$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když A není shora omezená. Podobně pro $-\infty$.



3. Konečná množina nemá žádný hromadný bod.



4. Bod je hromadným bodem skoro prosté posloupnosti právě když je hromadným bodem množiny hodnot této posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a .



2. Bod $+\infty$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když A není shora omezená. Podobně pro $-\infty$.



3. Konečná množina nemá žádný hromadný bod.



4. Bod je hromadným bodem skoro prosté posloupnosti právě když je hromadným bodem množiny hodnot této posloupnosti.



5. Je-li a hromadným bodem množiny A a $B \supset A$, je a hromadným bodem i množiny B .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z \mathbb{R}^* je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a .



2. Bod $+\infty$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když A není shora omezená. Podobně pro $-\infty$.



3. Konečná množina nemá žádný hromadný bod.



4. Bod je hromadným bodem skoro prosté posloupnosti právě když je hromadným bodem množiny hodnot této posloupnosti.



5. Je-li a hromadným bodem množiny A a $B \supset A$, je a hromadným bodem i množiny B .



6. $a \in A$ je izolovaným bodem A právě když existuje okolí U bodu a takové, že $U \cap A = \{a\}$.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Hromada je vidět na dálku.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí vlastnost (4) ukázala vztah hromadných bodů posloupností k hromadným bodům odpovídajících spočetných množin.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí vlastnost (4) ukázala vztah hromadných bodů posloupností k hromadným bodům odpovídajících spočetných množin.



Následující tvrzení ukazuje vztah hromadných bodů libovolných (i nespočetných) množin k hromadným bodům posloupností.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$:

1. a je hromadný bod množiny A ;



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$:

1. a je hromadný bod množiny A ;



2. existuje posloupnost v $A \setminus \{a\}$ konvergující k a ;



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$:

1. a je hromadný bod množiny A ;



2. existuje posloupnost v $A \setminus \{a\}$ konvergující k a ;



3. existuje prostá posloupnost v A konvergující k a ;



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$:

1. a je hromadný bod množiny A ;



2. existuje posloupnost v $A \setminus \{a\}$ konvergující k a ;



3. existuje prostá posloupnost v A konvergující k a ;



4. existuje ryze monotónní posloupnost v A konvergující k a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Necht' a je hromadný bod A a $\{U_n\}$ je klesající spočetná soustava okolí bodu a s průnikem $\{a\}$. Každé U_n obsahuje bod $x_n \in A \setminus \{a\}$. Je zřejmé, že $\{x_n\}$ je hledaná posloupnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Necht' a je hromadný bod A a $\{U_n\}$ je klesající spočetná soustava okolí bodu a s průnikem $\{a\}$. Každé U_n obsahuje bod $x_n \in A \setminus \{a\}$. Je zřejmé, že $\{x_n\}$ je hledaná posloupnost.



Protože každá konvergentní posloupnost s členy nerovnajícími se limitě obsahuje prostou a tedy i ryze monotónní podposloupnost, jsou vlastnosti (2), (3) a (4) ekvivalentní. Tyto vlastnosti triviálně implikují vlastnost (1). \diamond



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Každá nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má hromadný bod a každá omezená nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má vlastní hromadný bod.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Každá nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má hromadný bod a každá omezená nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má vlastní hromadný bod.



Každé tvrzení má svou hodnotu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Každá nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má hromadný bod a každá omezená nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má vlastní hromadný bod.



Každé tvrzení má svou hodnotu.



Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Každá nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má hromadný bod a každá omezená nekonečná podmnožina v \mathbb{R} má vlastní hromadný bod.



Každé tvrzení má svou hodnotu.



Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8



Kdo si ty posloupnosti asi vymyslel?

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZNÁMKY

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Indexování.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Indexování.



Není nutné trvat na indexování od 1 do ∞ .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Soubor $\{n!\}_{n=0}^{\infty}$ není podle definice posloupnost, ale lze snadno posunout indexy, aby posloupnost vznikla: $\{(n-1)!\}_{n=1}^{\infty}$. Podobně je tomu např. se soubory $\{p_m\}_{m=3}^{\infty}$, $\{a_k\}_{k=-10}^{\infty}$. I soubory $\{x_i\}_{i=-1}^{-\infty}$, $\{x_{\pi}, x_{3\pi}, x_{5\pi}, x_{7\pi}, \dots\}$ se přirozeně upraví do tvaru $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Navíc u posledního souboru není indexová množina dána, ale je zřejmé, jak se chápe.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Soubor $\{n!\}_{n=0}^{\infty}$ není podle definice posloupnost, ale lze snadno posunout indexy, aby posloupnost vznikla: $\{(n-1)!\}_{n=1}^{\infty}$. Podobně je tomu např. se soubory $\{p_m\}_{m=3}^{\infty}$, $\{a_k\}_{k=-10}^{\infty}$. I soubory $\{x_i\}_{i=-1}^{-\infty}$, $\{x_{\pi}, x_{3\pi}, x_{5\pi}, x_{7\pi}, \dots\}$ se přirozeně upraví do tvaru $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Navíc u posledního souboru není indexová množina dána, ale je zřejmé, jak se chápe.



Ve všech těchto uvedených případech (a pokud nemůže dojít k nedorozumění) je vhodnější chápat uvedené zápisy jako posloupnost, i když indexy nejsou zadány nebo nejsou tvaru $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Soubor $\{n!\}_{n=0}^{\infty}$ není podle definice posloupnost, ale lze snadno posunout indexy, aby posloupnost vznikla: $\{(n-1)!\}_{n=1}^{\infty}$. Podobně je tomu např. se soubory $\{p_m\}_{m=3}^{\infty}$, $\{a_k\}_{k=-10}^{\infty}$. I soubory $\{x_i\}_{i=-1}^{-\infty}$, $\{x_{\pi}, x_{3\pi}, x_{5\pi}, x_{7\pi}, \dots\}$ se přirozeně upraví do tvaru $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Navíc u posledního souboru není indexová množina dána, ale je zřejmé, jak se chápe.



Ve všech těchto uvedených případech (a pokud nemůže dojít k nedorozumění) je vhodnější chápat uvedené zápisy jako posloupnost, i když indexy nejsou zadány nebo nejsou tvaru $n \in \mathbb{N}$.



Pro účely konvergence lze za posloupnost brát dokonce libovolný soubor $\{x_s\}_{s \in S}$, kde S je nekonečná spočetná množina (uspořádání indexů není podstatné).



LEKCE03-POS
Posloupnosti
definice
podposloupnost
vlastnosti
konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude
limita
vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská
limita součtu,...
limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie
hromadný bod posl.
charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor
hrom.bod množiny
izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj
číslo e
uzavřená množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost a množina hodnot posloupnosti. Je nutné rozlišovat mezi posloupností a její množinou hodnot.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost a množina hodnot posloupnosti. Je nutné rozlišovat mezi posloupností a její množinou hodnot.



Posloupnost je vždy spočetná, její množina hodnot může být i jednobodová (např. posloupnost samých nul $\{0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost a množina hodnot posloupnosti. Je nutné rozlišovat mezi posloupností a její množinou hodnot.



Posloupnost je vždy spočetná, její množina hodnot může být i jednobodová (např. posloupnost samých nul $\{0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$).



Navíc mohou mít i různé posloupnosti stejné množiny hodnot. Např. $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots\}$, kde číslo n se opakuje n -krát za sebou



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost a množina hodnot posloupnosti. Je nutné rozlišovat mezi posloupností a její množinou hodnot.



Posloupnost je vždy spočetná, její množina hodnot může být i jednobodová (např. posloupnost samých nul $\{0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$).



Navíc mohou mít i různé posloupnosti stejné množiny hodnot. Např. $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots\}$, kde číslo n se opakuje n -krát za sebou



Dovedete určit k -tý člen?



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost a množina hodnot posloupnosti. Je nutné rozlišovat mezi posloupností a její množinou hodnot.



Posloupnost je vždy spočetná, její množina hodnot může být i jednobodová (např. posloupnost samých nul $\{0, 0, 0, 0, 0, \dots\}$).



Navíc mohou mít i různé posloupnosti stejné množiny hodnot. Např. $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots\}$, kde číslo n se opakuje n -krát za sebou



Dovedete určit k -tý člen?



je jiná posloupnost než $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, i když množina použitých bodů (tj. množina hodnot posloupnosti) je stejná.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zadávání posloupností. Posloupnost se obvykle zadává nějakým předpisem, např.
 $x_n = n!$ pro $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zadávání posloupností. Posloupnost se obvykle zadává nějakým předpisem, např. $x_n = n!$ pro $n \in \mathbb{N}$.



Někdy lze posloupnost zadat uvedením několika prvních členů, popř. dodat slovní doprovod (právě v uvedeném příkladu $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots\}$ je to jednodušší než zadat n -tý člen předpisem).



LEKCE03-POS
Posloupnosti
definice
podposloupnost
vlastnosti
konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude
limita
vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská
limita součtu,...
limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie
hromadný bod posl.
charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor
hrom.bod množiny
izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj
číslo e
uzavřená množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Specifikum posloupností je zadání rekurentní. Zadá se první člen (nebo několik prvních členů) a poté vzorec na výpočet dalších členů. Např. $x_1 = 2, x_{n+1} = (x_n + 1/x_n)/2$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Specifikum posloupností je zadání rekurentní. Zadá se první člen (nebo několik prvních členů) a poté vzorec na výpočet dalších členů. Např. $x_1 = 2, x_{n+1} = (x_n + 1/x_n)/2$.



Pokud se nepodaří odhalit předpis na definování x_n přímo bez pomoci předchozích členů, je v tomto případě obtížné napsat čemu se rovná např. x_{1000} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Specifikum posloupností je zadání rekurentní. Zadá se první člen (nebo několik prvních členů) a poté vzorec na výpočet dalších členů. Např. $x_1 = 2, x_{n+1} = (x_n + 1/x_n)/2$.



Pokud se nepodaří odhalit předpis na definování x_n přímo bez pomoci předchozích členů, je v tomto případě obtížné napsat čemu se rovná např. x_{1000} .



Nicméně, rekurentně zadané posloupnosti se v praxi často vyskytují (viz např. Newtonova metoda řešení rovnic)



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Velice důležitým případem je zadání posloupnosti pomocí reálné funkce f definované např. na $(0, \infty)$; pak $x_n = f(n)$ a pro práci s posloupností lze použít tvrzení pro funkce, které pro posloupnosti neplatí nebo nemají smysl (např. derivace a výpočet limit posloupností pomocí L'Hospitalova pravidla).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podposloupnosti. Je vhodné si uvědomovat, že podposloupnost je opět posloupnost. Někdy se místo podposloupnosti hovoří o *vybrané posloupnosti* – vybírají se totiž jen některé členy původní posloupnosti.

Konec poznámek 1.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

V prosté posloupnosti $\{x_n\}$ jsou hodnoty x_n v jednoznačném vztahu se svými indexy, tj. žádný bod se v posloupnosti neopakuje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konstantní posloupnost má naopak jen jednu hodnotu a ta se nekonečněkrát opakuje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konstantní posloupnost má naopak jen jednu hodnotu a ta se nekonečněkrát opakuje.



Konstantní posloupnost se někdy nazývá stacionární.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konstantní posloupnost má naopak jen jednu hodnotu a ta se nekonečněkrát opakuje.

↓
Konstantní posloupnost se někdy nazývá stacionární.



Někdy se stává matematická analýza pouhou hrou se slovy. Stacionární auto prostě nejede.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je vhodné si uvědomit, že pojmy *nerostoucí*, *neklesající* neznamenaají opak pojmů *rostoucí*, *klesající* – podobně pro *konstantní* versus *prostá*.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je vhodné si uvědomit, že pojmy *nerostoucí*, *neklesající* neznamenaají opak pojmu *rostoucí*, *klesající* – podobně pro *konstantní* versus *prostá*.



Posloupnost je např. *nerostoucí*, jestliže v žádném přechodu od indexu n k indexu $n + 1$ hodnota posloupnosti nevzroste, kdežto posloupnost je *rostoucí*, jestliže v každém takovémto přechodu příslušná hodnota vzroste



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti
konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je vhodné si uvědomit, že pojmy *nerostoucí*, *neklesající* neznamenaají opak pojmů *rostoucí*, *klesající* – podobně pro *konstantní* versus *prostá*.



Posloupnost je např. *nerostoucí*, jestliže v žádném přechodu od indexu n k indexu $n + 1$ hodnota posloupnosti nevzroste, kdežto posloupnost je *rostoucí*, jestliže v každém takovémto přechodu příslušná hodnota vzroste



Jaké jsou příslušné negace?



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti
konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zřejmě je posloupnost omezená právě když je současně shora a zdola omezená.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zřejmě je posloupnost omezená právě když je současně shora a zdola omezená.



Podobnou definici vlastnosti skoro lze zavést i pro spočetné množiny; např. výrok „skoro všechny body spočetné množiny A leží v množině U “ znamená, že jen konečně mnoho bodů z A leží mimo U .

Konec poznámek 2.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Vychází se z posloupností v \mathbb{R} , ale konvergence těchto posloupností je definována v \mathbb{R}^* , neboť je to výhodné, jak se ukáže později.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Vychází se z posloupností v \mathbb{R} , ale konvergence těchto posloupností je definována v \mathbb{R}^* , neboť je to výhodné, jak se ukáže později.



Nicméně, konvergentní posloupnost znamená v mnoha textech konvergenci v \mathbb{R} (podobně jako je tomu u konvergence řad nebo integrálů). V tomto textu je snaha vždy popsat, v jaké množině je konvergence použita.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost, která nekonverguje, se v některých textech nazývá *divergentní*.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost, která nekonverguje, se v některých textech nazývá *divergentní*.



Musí se dávat pozor, protože posloupnost konvergující k $+\infty$ podle naší definice je v mnoha textech považována za posloupnost, která nekonverguje a je divergentní.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost, která nekonverguje, se v některých textech nazývá *divergentní*.



Musí se dávat pozor, protože posloupnost konvergující k $+\infty$ podle naší definice je v mnoha textech považována za posloupnost, která nekonverguje a je divergentní.



Já od přírody konverguju k divergenci.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost, která nekonverguje, se v některých textech nazývá *divergentní*.



Musí se dávat pozor, protože posloupnost konvergující k $+\infty$ podle naší definice je v mnoha textech považována za posloupnost, která nekonverguje a je divergentní.



Já od přírody konverguju k divergenci.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takže se k nekonečnu může
konvergovat i divergovat.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nezáleží na uspořádání indexů posloupnosti. Definice limity a posloupnosti $\{x_n\}$ říká, že pro každé okolí U bodu a existuje jen konečně mnoho členů posloupnosti, které neleží v U .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nezáleží na uspořádání indexů posloupnosti. Definice limity a posloupnosti $\{x_n\}$ říká, že pro každé okolí U bodu a existuje jen konečně mnoho členů posloupnosti, které neleží v U .



Pro tuto definici stačí posloupnost definovat jako soubor indexovaný libovolnou spočetnou množinou (viz *Otázky*), neboť nezáleží na uspořádání indexů.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přepíše-li se definice do jiného tvaru, např. že existuje index n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $x_n \in U$, je indexování pomocí přirozených čísel potřebné.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stačí používat jen některá okolí. Jestliže dané okolí obsahuje skoro všechny členy posloupnosti, má stejnou vlastnost i každé větší okolí.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stačí používat jen některá okolí. Jestliže dané okolí obsahuje skoro všechny členy posloupnosti, má stejnou vlastnost i každé větší okolí.



Stačí tedy tuto vlastnost ověřovat jen pro takový systém \mathcal{U} okolí bodu a , že každé jiné okolí už obsahuje množinu z \mathcal{U} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stačí používat jen některá okolí. Jestliže dané okolí obsahuje skoro všechny členy posloupnosti, má stejnou vlastnost i každé větší okolí.



Stačí tedy tuto vlastnost ověřovat jen pro takový systém \mathcal{U} okolí bodu a , že každé jiné okolí už obsahuje množinu z \mathcal{U} .



To je např. systém $\{U_n\}_{\mathbb{N}}$, kde $U_n = \{x; |x - a| < 1/n\}$ pro vlastní bod a , $U_n = \{x : x > n\}$ pro $a = +\infty$, $U_n = \{x; x < -n\}$ pro $a = -\infty$. Místo $\{1/n\}$ (resp $\{n\}$) lze vzít i jinou posloupnost kladných čísel konvergující k 0 (resp. k $+\infty$).



LEKCE03-POS
Posloupnosti
definice
podposloupnost
vlastnosti
konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude
limita
vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská
limita součtu,...
limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie
hromadný bod posl.
charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor
hrom.bod množiny
izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj
číslo e
uzavřená množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence posloupnosti k $a \in \mathbb{R}$ má přirozený význam, zobrazí-li se buď na ose x (pak všechny její členy se blíží k a ve smyslu vzdálenosti na přímce) nebo jako graf v rovině (graf se blíží k přímce $y = a$, tj. tato přímka je jakousi asymptotou grafu posloupnosti).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

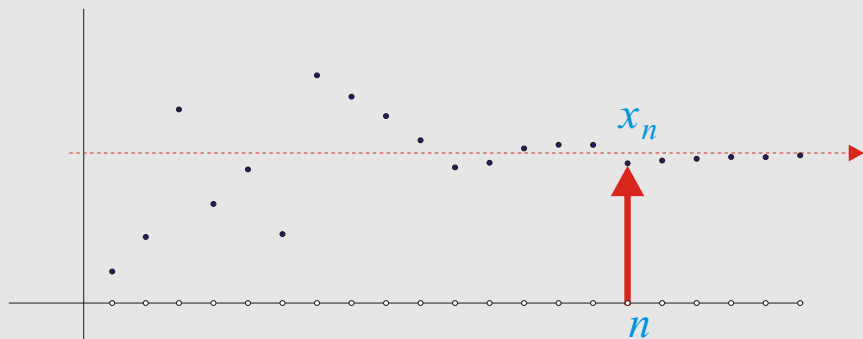
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence posloupnosti k $a \in \mathbb{R}$ má přirozený význam, zobrazí-li se buď na ose x (pak všechny její členy se blíží k a ve smyslu vzdálenosti na přímce) nebo jako graf v rovině (graf se blíží k přímce $y = a$, tj. tato přímka je jakousi asymptotou grafu posloupnosti).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence k $+\infty$ znamená, že hodnoty posloupnosti rostou nade všechny meze.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

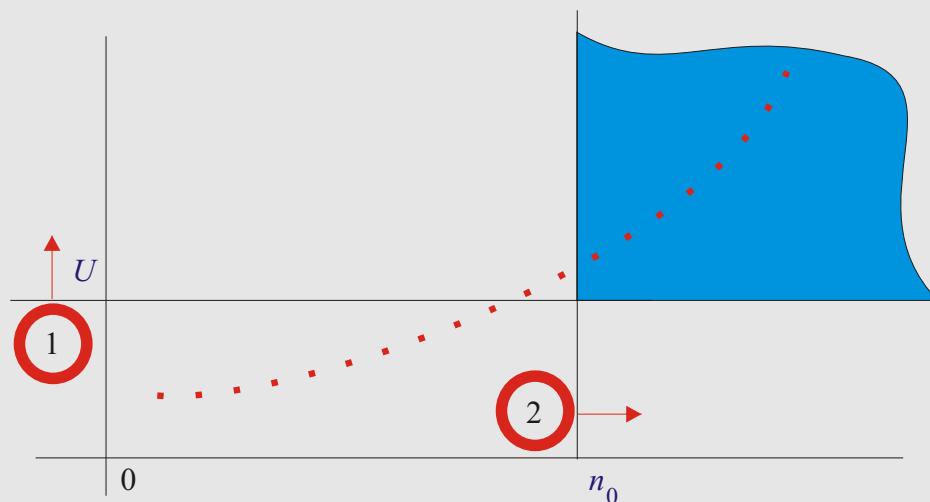
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence k $+\infty$ znamená, že hodnoty posloupnosti rostou nade všechny meze.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Není nutné, aby se všechny členy posloupnosti blížily stejně rychle, např. liché členy se mohou k limitě blížit rychleji než sudé členy (tj. pro dané okolí limity se nachází mimo něj mnohem méně lichých členů než sudých členů posloupnosti).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

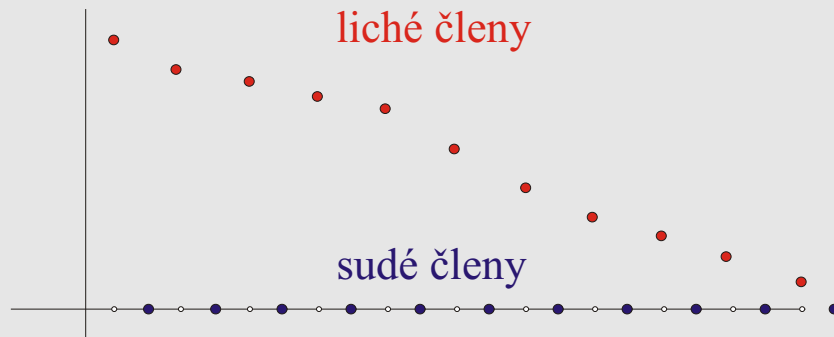
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Není nutné, aby se všechny členy posloupnosti blížily stejně rychle, např. liché členy se mohou k limitě blížit rychleji než sudé členy (tj. pro dané okolí limity se nachází mimo něj mnohem méně lichých členů než sudých členů posloupnosti).



Konec poznámek 3.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

Poznámky k charakterizaci vlastní limity. Vlastnost 2 v předchozí charakterizaci konkrétní limity říká, že konvergence nezávisí na posunutí (nebo že konvergence k libovolnému vlastnímu bodu lze definovat pomocí konvergence k 0 a pomocí aritmetické operace, zde odčítání).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Třetí vlastnost charakterizuje konvergenci pomocí vzdálenosti bodů (vzdálenost mezi prvky posloupnosti a limitou se blíží k 0).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Čtvrtá vlastnost je přepis definice, vyjádříme-li okolí pomocí nerovností. Tato charakterizace se často nazývá ε, n_0 -charakterizace limity posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Čtvrtá vlastnost je přepis definice, vyjádříme-li okolí pomocí nerovností. Tato charakterizace se často nazývá ε, n_0 -charakterizace limity posloupnosti.



Tu je dobré si pamatovat.
Podobná bude i u funkcí.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poslední vlastnost platí i pro nevlastní body a vyjadřuje vztah konvergence k uspořádání.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bolzanova–Cauchyova podmínka se používá spíše v důkazech než pro konkrétní posloupnosti. Pro konkrétní posloupnosti se častěji používají jiná tvrzení.

Konec poznámek 4.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Výrok *pokud má pravá strana smysl* znamená dvoje: jednak musí limity na pravé straně existovat a s těmito limity (tj. čísly) má daná aritmetická operace smysl, tj. vzniklý výraz není neurčitý (např. se nerovná $\infty - \infty$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Výrok *pokud má pravá strana smysl* znamená dvoje: jednak musí limity na pravé straně existovat a s těmito limitami (tj. čísly) má daná aritmetická operace smysl, tj. vzniklý výraz není neurčitý (např. se nerovná $\infty - \infty$).



Tvrzení říká, že pokud má pravá strana smysl, pak má i levá strana smysl a obě strany se rovnají.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

Výrok *pokud má pravá strana smysl* znamená dvoje: jednak musí limity na pravé straně existovat a s těmito limity (tj. čísly) má daná aritmetická operace smysl, tj. vzniklý výraz není neurčitý (např. se nerovná $\infty - \infty$).



Tvrzení říká, že pokud má pravá strana smysl, pak má i levá strana smysl a obě strany se rovnají.



V případě, že obě limity na pravé straně jsou vlastní, pak aritmetická operace na pravé straně má vždycky smysl, kromě dělení nulou pro limity podílu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při počítání limity např. součtu se tedy formálně napíše, že se tato limita rovná součtu limit, i když v tuto chvíli ještě rovnost není známa.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při počítání limity např. součtu se tedy formálně napíše, že se tato limita rovná součtu limit, i když v tuto chvíli ještě rovnost není známa.



Teprve po ověření existence a smyslu pravé strany je možné se vrátit a potvrdit rovnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při počítání limity např. součtu se tedy formálně napíše, že se tato limita rovná součtu limit, i když v tuto chvíli ještě rovnost není známa.



Teprve po ověření existence a smyslu pravé strany je možné se vrátit a potvrdit rovnost.



V případě, že pravá strana z nějakého důvodu nemá smysl, je nutné rovnost škrtnout a nelze ji použít.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limity

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limity součtu,...

limity a uspořádání
2 policajti

limity a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hromadný bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při počítání limity např. součtu se tedy formálně napíše, že se tato limita rovná součtu limit, i když v tuto chvíli ještě rovnost není známa.



Teprve po ověření existence a smyslu pravé strany je možné se vrátit a potvrdit rovnost.



V případě, že pravá strana z nějakého důvodu nemá smysl, je nutné rovnost škrtnout a nelze ji použít.



Někdy je možné u rovnítka napsat otazník (?) a po ověření či vyvrácení napsat \neq ANO nebo \neq NE.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V rovnosti pro limity podílu by se správně měl přidat předpoklad, že všechna y_n jsou nenulová.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V rovnosti pro limity podílu by se správně měl přidat předpoklad, že všechna y_n jsou nenulová.



Nicméně, jak bylo použito v důkazu, jen konečně mnoho členů y_n může být nulových (protože pravá strana má smysl a její jmenovatel je tedy nenulový).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V rovnosti pro limity podílu by se správně měl přidat předpoklad, že všechna y_n jsou nenulová.



Nicméně, jak bylo použito v důkazu, jen konečně mnoho členů y_n může být nulových (protože pravá strana má smysl a její jmenovatel je tedy nenulový).



Těchto konečně mnoho členů nemá pro limitu význam a je možné posunout posloupnosti až od nějakého indexu nebo několik prvních členů změnit.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V rovnosti pro limity podílu by se správně měl přidat předpoklad, že všechna y_n jsou nenulová.



Nicméně, jak bylo použito v důkazu, jen konečně mnoho členů y_n může být nulových (protože pravá strana má smysl a její jmenovatel je tedy nenulový).



Těchto konečně mnoho členů nemá pro limitu význam a je možné posunout posloupnosti až od nějakého indexu nebo několik prvních členů změnit.



Posloupnost vlastně „žije“ u nekonečna, tedy její začátek není podstatný.

Konec poznámek 5.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny
izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 6 :

Jestliže chápeme první tvrzení ve větě o zachovávání nerovností jako $A \Rightarrow B$, pak druhé tvrzení je tvaru $\neg B \Rightarrow \neg A$ a tudíž jsou obě tvrzení ekvivalentní.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 6 :

Jestliže chápeme první tvrzení ve větě o zachovávání nerovností jako $A \Rightarrow B$, pak druhé tvrzení je tvaru $\neg B \Rightarrow \neg A$ a tudíž jsou obě tvrzení ekvivalentní.



Snadno se najdou příklady, že v druhém tvrzení ve větě o zachovávání nerovností není možné změnit neostré nerovnosti na ostré (viz *Otázky*).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 6 :

Jestliže chápeme první tvrzení ve větě o zachovávání nerovností jako $A \Rightarrow B$, pak druhé tvrzení je tvaru $\neg B \Rightarrow \neg A$ a tudíž jsou obě tvrzení ekvivalentní.



Snadno se najdou příklady, že v druhém tvrzení ve větě o zachovávání nerovností není možné změnit neostré nerovnosti na ostré (viz *Otázky*).



Je nutné si pamatovat, že nerovnosti mezi posloupnostmi mohou přejít limitou v rovnost.

Konec poznámek 6.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.
charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 7 :

Z vlastností hromadných bodů vyplývá, že množina H hromadných bodů posloupnosti $\{x_n\}$ leží v intervalu $[\liminf x_n, \limsup x_n]$ a oba krajní body do H náležejí.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost může mít jediný hromadný bod (pokud uvažujeme jen hromadné body z \mathbb{R} , pak nemusí mít žádný hromadný bod – uvědomte si příklad), nebo může mít za hromadné body celou rozšířenou reálnou přímku (resp. \mathbb{R}).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost může mít jediný hromadný bod (pokud uvažujeme jen hromadné body z \mathbb{R} , pak nemusí mít žádný hromadný bod – uvědomte si příklad), nebo může mít za hromadné body celou rozšířenou reálnou přímku (resp. \mathbb{R}).



V *Otázkách* je uvedena charakterizace množin, které jsou množinami hromadných bodů posloupností.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět jsou k dispozici dvě ekvivalentní definice hromadných bodů posloupnosti: pomocí okolí a pomocí limit podposloupností.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět jsou k dispozici dvě ekvivalentní definice hromadných bodů posloupnosti: pomocí okolí a pomocí limit podposloupností.



Jako vždy v těchto případech je vhodné mít na mysli obě možnosti a využívat jednu z nich nebo obě podle specifické situace.

Konec poznámek 7.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 8 :

Je možné zde opakovat stejnou poznámku jako u hromadných bodů posloupnosti: jsou dvě ekvivalentní definice hromadných bodů množiny, a to pomocí okolí a pomocí limity posloupnosti, a používají se obě dvě podle momentální vhodnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět se ukazuje rozdíl mezi posloupností a množinou hodnot jejích členů. Konstantní posloupnost má hromadný bod (svou hodnotu), kdežto jednobodová množina nemá žádný hromadný bod.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Opět se ukazuje rozdíl mezi posloupností a množinou hodnot jejích členů. Konstantní posloupnost má hromadný bod (svou hodnotu), kdežto jednobodová množina nemá žádný hromadný bod.



Jsou to jednoduchosti.

Konec poznámek 8.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Příklady posloupností:

aritmetická posloupnost $\{a + nd\}_{n=0}^{\infty}$,

geometrická posloupnost $\{aq^n\}_{n=0}^{\infty}$,

$\{n^2\}$, $\{1/n\}$, $\{\sin(n)\}$, $\{\frac{2^n}{n!}\}$, $\{\sqrt[n]{n}\}$,

posloupnost ploch pravidelných n -úhelníků vepsaných do kružnice.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentně zadané posloupnosti:

aritmetická posloupnost $x_0 = a, x_{n+1} = x_n + d,$

geometrická posloupnost $x_0 = a, x_{n+1} = x_n q$

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = (x_{n-2} + x_{n-1})/2$ pro $n \geq 3.$

Fibonacciova posloupnost $\{x_n\}$, kde $x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ pro $n \geq 3.$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grafické znázornění posloupnosti: Znázornit posloupnost lze dvěma způsoby. Jednak jako body na přímce (v tomto znázornění však není vidět opakování bodů):



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

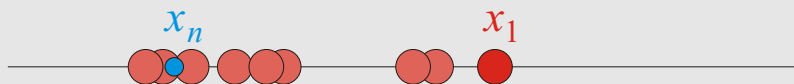
Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grafické znázornění posloupnosti: Znázornit posloupnost lze dvěma způsoby. Jednak jako body na přímce (v tomto znázornění však není vidět opakování bodů):



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

...jednak jako graf, tj. množinu bodů $\{(n, x_n); n \in \mathbb{N}\}$ v rovině:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

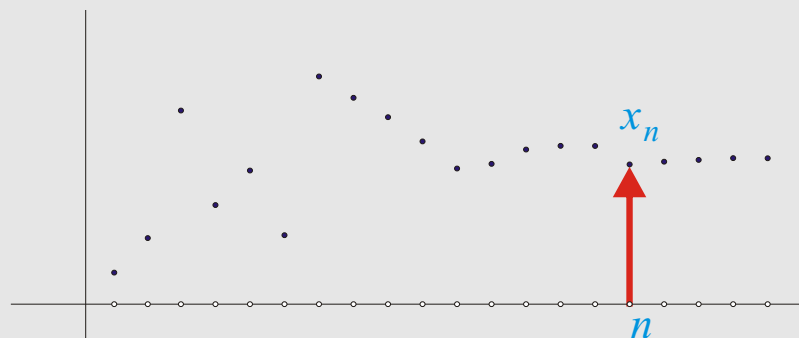
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

...jednak jako graf, tj. množinu bodů $\{(n, x_n); n \in \mathbb{N}\}$ v rovině:



Konec příkladů 1.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

Určete, které z následujících posloupností jsou (ryze) monotónní nebo (shora, zdola) omezené:

$$\{\sqrt{n}\}, \quad \{\sin(1/n)\}, \quad \{\sqrt[n]{2}\}, \quad \{(n-3)^2\}, \quad \left\{\frac{n!}{3^n}\right\}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

Určete, které z následujících posloupností jsou (ryze) monotónní nebo (shora, zdola) omezené:

$$\{\sqrt{n}\}, \quad \{\sin(1/n)\}, \quad \{\sqrt[n]{2}\}, \quad \{(n-3)^2\}, \quad \left\{\frac{n!}{3^n}\right\}.$$



Které z nich jsou skoro monotónní a nejsou monotónní?



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U rekurentně zadané posloupnosti $x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = (x_{n-2} + x_{n-1})/2$, ukažte, že podposloupnost členů s lichými indexy je rostoucí a podposloupnost členů se sudými indexy je klesající.

Konec příkladů 2.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Ověřte následující skutečnosti:

Posloupnost samých jedniček $\{1, 1, 1, \dots\}$ má limitu rovnu 1.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost střídajících se nul a jedniček $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ nemá limitu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost (klesající) $\{1/n\}$ má za limitu 0.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost, kde se střídají 0 a $1/n$ (tj. $\{0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, \dots\}$) má za limitu 0.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost $\{1/2^n\}$ má za limitu 0.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost $\{2^n\}$ má za limitu $+\infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost $\{a^n\}$ má za limitu 0 nebo 1 nebo $+\infty$ podle toho, zda je $|a| < 1$, $a = 1$, $a > 1$, resp. Je-li $a \leq -1$, nemá posloupnost $\{a^n\}$ limitu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtete omezenou „plochu“ mezi parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 1$ následujícím způsobem: Počítejte plochu pod parabolou nad intervalem $[0, 1]$ pomocí limity posloupnosti $\{s_n\}$, kde s_n je součet ploch obdélníčků s vrcholy $(i/n, 0), ((i + 1)/n, 0), ((i + 1)/n, (i/n)^2), (i/n, (i/n)^2)$, kde i probíhá $0, 1, \dots, n - 1$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že každé reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel a limitou posloupnosti iracionálních čísel. Použijte model \mathbb{R} vytvořený v kapitole o reálných číslech.

Konec příkladů 3.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

Najděte podle vlastnosti (4) pro dané ε nejmenší možné n_0 pro ověření $\lim 1/n = 0$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte posloupnosti $\{\inf_{n \geq k} x_n\}_k$ a $\{\sup_{n \geq k} x_n\}_k$ pro $x_n = 1/n$ nebo $x_n = n/(n+1)$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ověřte, že platí Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnost $\{1/n\}$ a že neplatí pro posloupnost $\{\sqrt{n}\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje, kde $\{x_n\}$ je zadána rekurentně:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

Konec příkladů 4.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

Použití věty o limitě součtu pro $\lim(n + \frac{1}{n})$:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

Použití věty o limitě součtu pro $\lim(n + \frac{1}{n})$:



- napíše se pravá strana $\lim n + \lim \frac{1}{n}$
- spočtou se limity na pravé straně $\lim n = \infty, \lim \frac{1}{n} = 0$
- ověří se smysl součtu $\infty + 0 = \infty$
- napíše se výsledek $\lim(n + \frac{1}{n}) = \infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

Použití věty o limitě součtu pro $\lim(n + \frac{1}{n})$:



- napíše se pravá strana $\lim n + \lim \frac{1}{n}$
- spočtou se limity na pravé straně $\lim n = \infty, \lim \frac{1}{n} = 0$
- ověří se smysl součtu $\infty + 0 = \infty$
- napíše se výsledek $\lim(n + \frac{1}{n}) = \infty$.



V praxi se postupuje rychleji: píšou se postupně (zatím formální, neověřené) rovnosti

$$\lim \left(n + \frac{1}{n} \right) = \lim n + \lim \frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

Použití věty o limitě součtu pro $\lim(n + \frac{1}{n})$:



- napíše se pravá strana $\lim n + \lim \frac{1}{n}$
- spočtou se limity na pravé straně $\lim n = \infty, \lim \frac{1}{n} = 0$
- ověří se smysl součtu $\infty + 0 = \infty$
- napíše se výsledek $\lim(n + \frac{1}{n}) = \infty$.



V praxi se postupuje rychleji: píšou se postupně (zatím formální, neověřené) rovnosti

$$\lim \left(n + \frac{1}{n} \right) = \lim n + \lim \frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty .$$



Protože poslední a předposlední rovnosti mají smysl, má smysl i rovnost první.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

Použití věty o limitě součtu pro $\lim(n + \frac{1}{n})$:



- napíše se pravá strana $\lim n + \lim \frac{1}{n}$
- spočtou se limity na pravé straně $\lim n = \infty, \lim \frac{1}{n} = 0$
- ověří se smysl součtu $\infty + 0 = \infty$
- napíše se výsledek $\lim(n + \frac{1}{n}) = \infty$.



V praxi se postupuje rychleji: píšou se postupně (zatím formální, neověřené) rovnosti

$$\lim \left(n + \frac{1}{n} \right) = \lim n + \lim \frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty .$$



Protože poslední a předposlední rovnosti mají smysl, má smysl i rovnost první.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Proto se někdy používá to rovnítko s otazníkem.

$$\lim \left(n + \frac{1}{n} \right) \stackrel{?}{=} \lim n + \lim \frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty, ? = \text{ANO}$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita polynomu. Necht' je posloupnost zadána hodnotami polynomu stupně aspoň 1 v bodech $n \in \mathbb{N}$, tj, $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$, kde $k \in \mathbb{N}$ a a_0, a_1, \dots, a_k jsou reálná čísla, $a_k \neq 0$. Ukažte, že $\lim x_n = \pm\infty$, kde znaménko výsledku je znaménko čísla a_k . Odtud vyplývá, že $\lim 1/x_n = 0$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita podílu polynomů. Necht' dvě posloupnosti jsou zadány polynomy, $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$ a $y_n = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0$, kde opět $k, l \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita podílu polynomů. Necht' dvě posloupnosti jsou zadány polynomy, $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$ a $y_n = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0$, kde opět $k, l \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$.



Úkolem je spočítat $\lim \frac{x_n}{y_n}$. Při přímém použití věty o limitě podílu se na pravé straně dostane neurčitý výraz (podíl nekonečen). Je tedy nutné podíl $\frac{x_n}{y_n}$ nejdříve upravit, např. krácením zlomku výrazem x^m , kde $m = \min(k, l)$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita podílu polynomů. Necht' dvě posloupnosti jsou zadány polynomy, $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$ a $y_n = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0$, kde opět $k, l \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$.



Úkolem je spočítat $\lim \frac{x_n}{y_n}$. Při přímém použití věty o limitě podílu se na pravé straně dostane neurčitý výraz (podíl nekonečen). Je tedy nutné podíl $\frac{x_n}{y_n}$ nejdříve upravit, např. krácením zlomku výrazem x^m , kde $m = \min(k, l)$.



Ukažte, že potom lze použít větu o limitě podílu a výsledkem je

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 0, & k < l; \\ \frac{a_k}{b_l}, & k = l; \\ \pm\infty, & k > l, \end{cases}$$

kde znaménko u ∞ je stejné jako znaménko $\frac{a_k}{b_l}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limity s odmocninami. Limity, kde jsou ve výrazech rozdíly odmocnin vedoucích k neurčitým výrazům $\infty - \infty$, jako např. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, se často dají počítat rozšířením (jako zlomku) vhodnými výrazy, které rozdíly odmocnin postupně převedou na rozdíly polynomů. Např. uvedený výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ se chápe jako zlomek s jmenovatelem 1 a rozšíří se výrazem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$; dostane se zlomek

$$\frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

na který již lze použít přímo větu o podílu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro odmocniny vyšších řádů se použije vzorec $a^k - b^k = (a - b)(a^{k+1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro odmocniny vyšších řádů se použije vzorec $a^k - b^k = (a - b)(a^{k+1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.



Např.

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2 - 1}}{n}$$

se spočítá tak, že se zlomek rozšíří výrazem $\sqrt[3]{(n^2 + n)^2} + \sqrt[3]{n^2 + n}\sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{(n^2 - 1)^2}$ a v čitateli se dostane $(n^2 + n) - (n^2 - 1) = n + 1$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro odmocniny vyšších řádů se použije vzorec $a^k - b^k = (a - b)(a^{k+1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.



Např.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2 - 1}}{n}$$

se spočítá tak, že se zlomek rozšíří výrazem $\sqrt[3]{(n^2 + n)^2} + \sqrt[3]{n^2 + n}\sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{(n^2 - 1)^2}$ a v čitateli se dostane $(n^2 + n) - (n^2 - 1) = n + 1$.



Dopočtěte příklad do konce.

Konec příkladů 5.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 6 :

Vypočtěte pomocí druhého Důsledku $\lim \frac{\sin n}{n}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí prvního Důsledku lze spočítat $\lim n \sin(1/n) = 1$ [návod: z jednotkové kružnice použijte nerovnosti $\sin(1/n) < 1/n < \operatorname{tg}(1/n)$].



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost $\{\sqrt[n]{a}\}$ je pro $a > 1$ klesající a tedy konvergentní k číslu $c \geq 1$. Protože pro $c > 1$ je $\lim c^n = +\infty$, musí být $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost $\{\sqrt[n]{a}\}$ je pro $a > 1$ klesající a tedy konvergentní k číslu $c \geq 1$. Protože pro $c > 1$ je $\lim c^n = +\infty$, musí být $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.



Předchozí výsledek $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ platí i pro $0 < a < 1$ – stačí použít předchozí výsledek pro $1/a$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost $\{\sqrt[n]{a}\}$ je pro $a > 1$ klesající a tedy konvergentní k číslu $c \geq 1$. Protože pro $c > 1$ je $\lim c^n = +\infty$, musí být $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.



Předchozí výsledek $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ platí i pro $0 < a < 1$ – stačí použít předchozí výsledek pro $1/a$.



Podobně lze dokázat $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ [pro důkaz monotónnosti je vhodné použít Bernoulliho nerovnost].



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že $\lim p^n/n! = 0$ pro každé $p \in \mathbb{R}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že $\lim p^n/n! = 0$ pro každé $p \in \mathbb{R}$.



[Návod: Posloupnost $\{\frac{p^n}{n!}\}$ pro $p > 1$ je posloupnost nezáporných čísel, která jsou od nějakého indexu shora omezena posloupností $r(1/2)^{n-l}$, kde $r > 0, l \in \mathbb{N}$ a $l \geq 2p$.]



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Výpočet limit posloupností zadaných rekurentně bývá obtížnější.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Výpočet limit posloupností zadaných rekurentně bývá obtížnější.



V jednodušších případech lze nejprve ukázat, že posloupnost má nějakou limitu a potom je možné zlimitovat rekurentní vzorec; získá se tak nějaký vztah pro limitu, z kterého se dá limita vypočítat.



- LEKCE03-POS**
- Posloupnosti
- definice
 - podposloupnost
- vlastnosti
 - konstantní
 - prostá
 - omezená
 - monotónní
 - skoro všude
- limita
 - vlastnosti
 - charakterizace 1
 - charakterizace 2
 - Bolzano Cauchy
 - cauchyovská
- limita součtu,...
- limita a uspořádání
 - 2 policajti
 - limita a monotonie
- hromadný bod posl.
 - charakterizace
 - liminf
 - limsup
 - Bolzano-Wei.
 - Cantor
- hrom.bod množiny
 - izolovaný bod
 - vlastnosti h.b.m.
 - charakterizace
 - h.b.m.
 - des-rozvoj
- číslo e
- uzavřená množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n$. Pak $x_2 = 3, x_3 = 4.33, x_4 = 5.56$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n$. Pak $x_2 = 3, x_3 = 4.33, x_4 = 5.56$.



Je posloupnost $\{x_n\}$ rostoucí?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n$. Pak $x_2 = 3, x_3 = 4.33, x_4 = 5.56$.



Je posloupnost $\{x_n\}$ rostoucí?



Vidíme, že

$$x_n \leq x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n, \quad \text{je totéž co } \frac{1}{x_n} \geq -1,$$

což opravdu platí, protože se začíná s kladným číslem x_1 , a proto všechna čísla x_n jsou kladná.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n$. Pak $x_2 = 3, x_3 = 4.33, x_4 = 5.56$.



Je posloupnost $\{x_n\}$ rostoucí?



Vidíme, že

$$x_n \leq x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n, \quad \text{je totéž co } \frac{1}{x_n} \geq -1,$$

což opravdu platí, protože se začíná s kladným číslem x_1 , a proto všechna čísla x_n jsou kladná.



Existuje tedy $\lim x_n = A$ (podle věty o limitě monotónní posloupnosti).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní se provede limita obou stran rekurentního vzorce:

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(1 + x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad \text{tedy } A = 1 + A + \frac{1}{A}$$

(poslední výraz má vždy smysl, protože A nemůže být 0).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní se provede limita obou stran rekurentního vzorce:

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(1 + x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad \text{tedy } A = 1 + A + \frac{1}{A}$$

(poslední výraz má vždy smysl, protože A nemůže být 0).



Tento vztah platí pro $A = \pm\infty$ nebo pro $A = -1$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ je tedy rovna buď $-\infty$ nebo -1 nebo $+\infty$. Protože čísla x_n jsou kladná, je $\lim x_n = +\infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní se provede limita obou stran rekurentního vzorce:

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(1 + x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad \text{tedy } A = 1 + A + \frac{1}{A}$$

(poslední výraz má vždy smysl, protože A nemůže být 0).



Tento vztah platí pro $A = \pm\infty$ nebo pro $A = -1$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ je tedy rovna buď $-\infty$ nebo -1 nebo $+\infty$. Protože čísla x_n jsou kladná, je $\lim x_n = +\infty$.



Pokud by např. $x_1 = -1/2$ (obecně $x_1 \in (-1, 0)$), bude posloupnost $\{x_n\}$ klesající a $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 < -1$ bude posloupnost $\{x\}$ rostoucí a opět $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 = -1$ bude posloupnost $\{x_n\}$ konstantní.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní se provede limita obou stran rekurentního vzorce:

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(1 + x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad \text{tedy } A = 1 + A + \frac{1}{A}$$

(poslední výraz má vždy smysl, protože A nemůže být 0).



Tento vztah platí pro $A = \pm\infty$ nebo pro $A = -1$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ je tedy rovna buď $-\infty$ nebo -1 nebo $+\infty$. Protože čísla x_n jsou kladná, je $\lim x_n = +\infty$.



Pokud by např. $x_1 = -1/2$ (obecně $x_1 \in (-1, 0)$), bude posloupnost $\{x_n\}$ klesající a $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 < -1$ bude posloupnost $\{x\}$ rostoucí a opět $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 = -1$ bude posloupnost $\{x_n\}$ konstantní.



Tento postup není jednoduchý, ale je zapotřebí. Je to prostě matematika. Uhodnout výsledek nestačí.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní se provede limita obou stran rekurentního vzorce:

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(1 + x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad \text{tedy } A = 1 + A + \frac{1}{A}$$

(poslední výraz má vždy smysl, protože A nemůže být 0).



Tento vztah platí pro $A = \pm\infty$ nebo pro $A = -1$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ je tedy rovna buď $-\infty$ nebo -1 nebo $+\infty$. Protože čísla x_n jsou kladná, je $\lim x_n = +\infty$.



Pokud by např. $x_1 = -1/2$ (obecně $x_1 \in (-1, 0)$), bude posloupnost $\{x_n\}$ klesající a $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 < -1$ bude posloupnost $\{x\}$ rostoucí a opět $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 = -1$ bude posloupnost $\{x_n\}$ konstantní.



Tento postup není jednoduchý, ale je zapotřebí. Je to prostě matematika. Uhodnout výsledek nestačí.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Já jsem to spočítal rychleji
pomocí kalkulačky.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je posloupnost dána rekurentním vzorcem $x_{n+1} = 1/(x_n + 1)$ a $x_1 = 0$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je posloupnost dána rekurentním vzorcem $x_{n+1} = 1/(x_n + 1)$ a $x_1 = 0$.



Potom je

$$x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.67, x_5 = 0.6, x_6 = 0.625, x_7 = 0.615, \dots$$

a tedy posloupnost není monotónní.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je posloupnost dána rekurentním vzorcem $x_{n+1} = 1/(x_n + 1)$ a $x_1 = 0$.



Potom je

$$x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.67, x_5 = 0.6, x_6 = 0.625, x_7 = 0.615, \dots$$

a tedy posloupnost není monotónní.



Ale podposloupnost $\{x_{2n+1}\}$ je rostoucí a podposloupnost $\{x_{2n}\}$ je klesající (dokažte to) a obě podposloupnosti tedy mají vlastní limity $\lim x_{2n+1} = B$, $\lim x_{2n} = C$ (proč jsou limity vlastní?).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je posloupnost dána rekurentním vzorcem $x_{n+1} = 1/(x_n + 1)$ a $x_1 = 0$.



Potom je

$$x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.67, x_5 = 0.6, x_6 = 0.625, x_7 = 0.615, \dots$$

a tedy posloupnost není monotónní.



Ale podposloupnost $\{x_{2n+1}\}$ je rostoucí a podposloupnost $\{x_{2n}\}$ je klesající (dokažte to) a obě podposloupnosti tedy mají vlastní limity $\lim x_{2n+1} = B$, $\lim x_{2n} = C$ (proč jsou limity vlastní?).



Protože $x_{n+2} = (1 + x_n)/(2 + x_n)$, musí B i C splňovat rovnici $x = (1 + x)/(2 + x)$, což znamená $x^2 + x - 1 = 0$, a tedy $B = C = (\sqrt{5} - 1)/2$, přibližně 0.618. (Proč nelze použít druhý kořen dané kvadratické rovnice?)



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonic

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je posloupnost dána rekurentním vzorcem $x_{n+1} = 1/(x_n + 1)$ a $x_1 = 0$.



Potom je

$$x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.67, x_5 = 0.6, x_6 = 0.625, x_7 = 0.615, \dots$$

a tedy posloupnost není monotónní.



Ale podposloupnost $\{x_{2n+1}\}$ je rostoucí a podposloupnost $\{x_{2n}\}$ je klesající (dokažte to) a obě podposloupnosti tedy mají vlastní limity $\lim x_{2n+1} = B$, $\lim x_{2n} = C$ (proč jsou limity vlastní?).



Protože $x_{n+2} = (1 + x_n)/(2 + x_n)$, musí B i C splňovat rovnici $x = (1 + x)/(2 + x)$, což znamená $x^2 + x - 1 = 0$, a tedy $B = C = (\sqrt{5} - 1)/2$, přibližně 0.618. (Proč nelze použít druhý kořen dané kvadratické rovnice?)



To se nám to pěkně motalo,
co?

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V praxi je rekurentně zadaná posloupnost buď rovnou monotónní, nebo je to poskládané ze dvou monotónních.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V praxi je rekurentně zadaná posloupnost buď rovnou monotónní, nebo je to poskládané ze dvou monotónních.



Ten, kdo neověřuje požadovanou a očekávanou monotónnost, případně jinak rád zlobí si zkusí rekurentní posloupnost $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Destinný rozvoj reálného čísla



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Destinný rozvoj reálného čísla



Pro dané reálné číslo r se označí r_0 největší celé číslo menší než r ; pak $r - r_0 < 1 = 10/10$. Dále se označí r_1 největší z čísel $0, 1, \dots, 9$, pro které je $r_0 + \frac{r_1}{10} < r$; pak $r - (r_0 + \frac{r_1}{10}) < 1/10 = 10/100$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Destinný rozvoj reálného čísla



Pro dané reálné číslo r se označí r_0 největší celé číslo menší než r ; pak $r - r_0 < 1 = 10/10$. Dále se označí r_1 největší z čísel $0, 1, \dots, 9$, pro které je $r_0 + \frac{r_1}{10} < r$; pak $r - (r_0 + \frac{r_1}{10}) < 1/10 = 10/100$.



Indukcí je možné pokračovat dále a sestrojít posloupnost $\{r_n\}_{\mathbb{N}}$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$, tak, že číslo

$$s_n = r_0 + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^3} + \dots + \frac{r_n}{10^n}$$

je menší než r o méně než 10^{-n} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Destinný rozvoj reálného čísla



Pro dané reálné číslo r se označí r_0 největší celé číslo menší než r ; pak $r - r_0 < 1 = 10/10$. Dále se označí r_1 největší z čísel $0, 1, \dots, 9$, pro které je $r_0 + \frac{r_1}{10} < r$; pak $r - (r_0 + \frac{r_1}{10}) < 1/10 = 10/100$.



Indukcí je možné pokračovat dále a sestrojít posloupnost $\{r_n\}_{\mathbb{N}}$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$, tak, že číslo

$$s_n = r_0 + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^3} + \dots + \frac{r_n}{10^n}$$

je menší než r o méně než 10^{-n} .



Posloupnost $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ je neklesající.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Destinný rozvoj reálného čísla



Pro dané reálné číslo r se označí r_0 největší celé číslo menší než r ; pak $r - r_0 < 1 = 10/10$. Dále se označí r_1 největší z čísel $0, 1, \dots, 9$, pro které je $r_0 + \frac{r_1}{10} < r$; pak $r - (r_0 + \frac{r_1}{10}) < 1/10 = 10/100$.



Indukcí je možné pokračovat dále a sestrojít posloupnost $\{r_n\}_{\mathbb{N}}$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$, tak, že číslo

$$s_n = r_0 + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^3} + \dots + \frac{r_n}{10^n}$$

je menší než r o méně než 10^{-n} .



Posloupnost $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ je neklesající.



Posloupnost $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ je vidět na kalkulačce "odleva".



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Destinný rozvoj reálného čísla



Pro dané reálné číslo r se označí r_0 největší celé číslo menší než r ; pak $r - r_0 < 1 = 10/10$. Dále se označí r_1 největší z čísel $0, 1, \dots, 9$, pro které je $r_0 + \frac{r_1}{10} < r$; pak $r - (r_0 + \frac{r_1}{10}) < 1/10 = 10/100$.



Indukcí je možné pokračovat dále a sestrojít posloupnost $\{r_n\}_{\mathbb{N}}$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$, tak, že číslo

$$s_n = r_0 + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^3} + \dots + \frac{r_n}{10^n}$$

je menší než r o méně než 10^{-n} .



Posloupnost $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ je neklesající.



Posloupnost $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ je vidět na kalkulačce "odleva".



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože posloupnost $\{10^{-n}\}$ konverguje k 0, konverguje $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ k r .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože posloupnost $\{10^{-n}\}$ konverguje k 0, konverguje $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ k r .



Tato skutečnost se stručně zapisuje symbolem $r = r_0, r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$ a nazývá se **dese-tinný rozvoj** čísla r .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože posloupnost $\{10^{-n}\}$ konverguje k 0, konverguje $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ k r .



Tato skutečnost se stručně zapisuje symbolem $r = r_0, r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$ a nazývá se **dese-tinný rozvoj čísla r** .



Každé číslo tedy má dese-tinný rozvoj (takto sestro-jený je určen jednoznačně).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se pro posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$ definuje s_n předchozí rovností, je posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a má tedy nějakou limitu (supremum) r .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se pro posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$ definuje s_n předchozí rovností, je posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a má tedy nějakou limitu (supremum) r .



Posloupnost $\{r_n\}$ ale nemusí být desetinný rozvoj definovaný v předchozím odstavci (např. číslo 1 má za desetinný rozvoj $1.0000\dots$ a posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$, kde $r_0 = 0$ a $r_n = 9$ pro $n > 0$, má za příslušné číslo r také číslo 1.



LEKCE03-POS

Posloupnosti definice

podposloupnost vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se pro posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$ definuje s_n předchozí rovností, je posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a má tedy nějakou limitu (supremum) r .



Posloupnost $\{r_n\}$ ale nemusí být desetinný rozvoj definovaný v předchozím odstavci (např. číslo 1 má za desetinný rozvoj $1.0000\dots$ a posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$, kde $r_0 = 0$ a $r_n = 9$ pro $n > 0$, má za příslušné číslo r také číslo 1.



Často se i tyto situace označují jako desetinné rozvoje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti definice

podposloupnost vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se pro posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$ definuje s_n předchozí rovností, je posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a má tedy nějakou limitu (supremum) r .



Posloupnost $\{r_n\}$ ale nemusí být desetinný rozvoj definovaný v předchozím odstavci (např. číslo 1 má za desetinný rozvoj $1.0000\dots$ a posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$, kde $r_0 = 0$ a $r_n = 9$ pro $n > 0$, má za příslušné číslo r také číslo 1.



Často se i tyto situace označují jako desetinné rozvoje.



Mnoho povyku pro nic ;-)



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže se pro posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$ obsahující čísla $0, 1, 2, \dots, 9$ definuje s_n předchozí rovností, je posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a má tedy nějakou limitu (supremum) r .



Posloupnost $\{r_n\}$ ale nemusí být desetinný rozvoj definovaný v předchozím odstavci (např. číslo 1 má za desetinný rozvoj $1.0000\dots$ a posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$, kde $r_0 = 0$ a $r_n = 9$ pro $n > 0$, má za příslušné číslo r také číslo 1.



Často se i tyto situace označují jako desetinné rozvoje.



Mnoho povyku pro nic ;-)



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jo, je to jedno. I když rovnost $1 = 0.999999 \dots$ mi dělá radost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eulerovo číslo e



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eulerovo číslo e



Nyní bude spočtena velmi důležitá limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eulerovo číslo e



Nyní bude spočtena velmi důležitá limita $\lim_n (1 + 1/n)^n$.



Výraz v limitě se rozvine pomocí binomického rozvoje a upraví na tvar

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eulerovo číslo e



Nyní bude spočtena velmi důležitá limita $\lim_n (1 + 1/n)^n$.



Výraz v limitě se rozvine pomocí binomického rozvoje a upraví na tvar

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$



Z této úpravy lze zjistit dvě skutečnosti. Jednak, že daná posloupnost je rostoucí (jako činitelé se zde vyskytují členy $1 - k/n$, což v dalším členu posloupnosti dává $1 - k/(n+1)$, což je větší číslo; navíc výraz pro $n+1$ má ještě přidáný kladný poslední člen) a jednak, že je omezená shora.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eulerovo číslo e



Nyní bude spočtena velmi důležitá limita $\lim_n (1 + 1/n)^n$.



Výraz v limitě se rozvine pomocí binomického rozvoje a upraví na tvar

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$



Z této úpravy lze zjistit dvě skutečnosti. Jednak, že daná posloupnost je rostoucí (jako činitelé se zde vyskytují členy $1 - k/n$, což v dalším členu posloupnosti dává $1 - k/(n+1)$, což je větší číslo; navíc výraz pro $n+1$ má ještě přidáný kladný poslední člen) a jednak, že je omezená shora.



Poslední skutečnost možná vyžaduje vysvětlení: vynechají-li se ve výrazu na pravé straně všechny závorky, výraz se zvětší – protože $n! \geq 2^n$, dostává se



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eulerovo číslo e



Nyní bude spočtena velmi důležitá limita $\lim_n (1 + 1/n)^n$.



Výraz v limitě se rozvine pomocí binomického rozvoje a upraví na tvar

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$



Z této úpravy lze zjistit dvě skutečnosti. Jednak, že daná posloupnost je rostoucí (jako činitelé se zde vyskytují členy $1 - k/n$, což v dalším členu posloupnosti dává $1 - k/(n+1)$, což je větší číslo; navíc výraz pro $n+1$ má ještě přidáný kladný poslední člen) a jednak, že je omezená shora.



Poslední skutečnost možná vyžaduje vysvětlení: vynechají-li se ve výrazu na pravé straně všechny závorky, výraz se zvětší – protože $n! \geq 2^n$, dostává se



$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Takže $\lim_n (1 + 1/n)^n$ existuje a rovná se kladnému číslu mezi 2 a 3. Dá se dokázat, že je to transcendentní číslo rovné 2,718... Nazývá se Eulerovo číslo a značí se e .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Takže $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ existuje a rovná se kladnému číslu mezi 2 a 3. Dá se dokázat, že je to transcendentní číslo rovné 2,718... Nazývá se Eulerovo číslo a značí se e .



Po dobrém nebo po zlém to musí umět všichni.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Takže $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ existuje a rovná se kladnému číslu mezi 2 a 3. Dá se dokázat, že je to transcendentní číslo rovné 2,718... Nazývá se Eulerovo číslo a značí se e .



Po dobrém nebo po zlém to musí umět všichni.



Éééééé. To umím :-)

Konec příkladů 6.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 7 :

Posloupnost $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ střídajících se nul a jedniček má dva hromadné body: 0 a 1.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jaké má hromadné body posloupnost $\{\cos(\pi n/4)\}$?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte prostou posloupnost s hromadnými body $\{-1, 0, 2\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte posloupnost $\{x_n\}$ s hromadnými body $\{1/k\}_{k \in \mathbb{N}}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte posloupnost $\{x_n\}$ s hromadnými body $\{1/k\}_{k \in \mathbb{N}}$.



Bude 0 také hromadným bodem $\{x_n\}$?



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost obsahující všechna racionální čísla jako členy (existuje taková posloupnost?).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost obsahující všechna racionální čísla jako členy (existuje taková posloupnost?).



Pak každé číslo z \mathbb{R}^* je hromadný bod $\{x_n\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nalezněte \liminf a \limsup posloupností použitých v příkladech.

Konec příkladů 7.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

\liminf

\limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 8 :

Jaké hromadné body má interval $(0, 1)$?



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jaké hromadné body má množina racionálních bodů v intervalu $(0, 1)$?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jaké hromadné body má množina iracionálních bodů v intervalu $(0, 1)$?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte podmnožinu $(0, 1)$ mající jediný hromadný bod. Může být tato množina nespočetná?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že neexistuje množina A mající za hromadné body právě množinu $\{1/k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Konec příkladů 8.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OTÁZKY

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Převeďte posloupnost $\{\sqrt{1-2n}\}_{n=-3}^{-\infty}$ do posloupnosti indexované přirozenými čísly.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Převeďte posloupnost $\{\sqrt{1-2n}\}_{n=-3}^{-\infty}$ do posloupnosti indexované přirozenými čísly.



U posloupností uvedených v předchozích *Příkladech* napište např. pátý člen.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Převeďte posloupnost $\{\sqrt{1-2n}\}_{n=-3}^{-\infty}$ do posloupnosti indexované přirozenými čísly.



U posloupností uvedených v předchozích *Příkladech* napište např. pátý člen.



Zkuste u uvedených rekurentně zadaných posloupností v předchozích *Příkladech* najít „nerekurentní“ vyjádření x_n .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Převeďte posloupnost $\{\sqrt{1-2n}\}_{n=-3}^{-\infty}$ do posloupnosti indexované přirozenými čísly.



U posloupností uvedených v předchozích *Příkladech* napište např. pátý člen.



Zkuste u uvedených rekurentně zadaných posloupností v předchozích *Příkladech* najít „nerekurentní“ vyjádření x_n .



Znázorněte graficky (oběma způsoby) posloupnosti $\{1-2/n\}$, $\{\sqrt{n}\}$, $\{(1+(-1)^n)/2\}$.

Konec otázek 1.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

Necht' P je některá z vlastností: (ryze) monotónní, prostá, konstantní, omezená. Ukažte, že každá podposloupnost posloupnosti s P má taky P .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Může mít posloupnost $\{x_n\}$, kde množina všech x_n je nekonečná, konstantní podposloupnost?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li posloupnost skoro prostá, je množina hodnot této posloupnosti nekonečná. Platí opak?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Každá ryze monotónní posloupnost je prostá. Každá monotónní posloupnost je buď skoro konstantní nebo obsahuje ryze monotónní podposloupnost (se skoro stejnou množinou hodnot). Dokažte.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že skoro konstantní posloupnost má konečnou množinu hodnot. Platí opak?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Charakterizujte posloupnosti, které obsahují prostou podposloupnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Charakterizujte posloupnosti, které neobsahují konstantní podposloupnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že každá posloupnost obsahuje monotónní podposloupnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že každá prostá posloupnost obsahuje ryze monotónní podposloupnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že každá skoro neklesající posloupnost je zdola omezená. Uveďte příklad, že nemusí být omezená.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Posloupnost je konstantní právě když je neklesající a nerostoucí. Dokažte.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že posloupnost $\{x_n\}$ je omezená (nebo shora, zdola omezená) právě když existuje kladné číslo k tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|x_n| \leq k$ (resp. $x_n \leq k$, resp. $-x_n \leq k$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že posloupnost je omezená (nebo shora, zdola omezená) právě když je skoro omezená (resp. skoro shora, zdola omezená).

Konec otázek 2.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

Dokažte následující tvrzení:

Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a , pak konverguje k a i každá posloupnost získaná z $\{x_n\}$ změnou, vynecháním nebo přidáním konečně mnoha členů.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přehází-li se indexy u posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k a , konverguje i výsledná posloupnost k a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť $\{x_n\}$ konverguje k a . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď S_n neprázdná konečná podmnožina intervalu $[n, n + 1)$ a $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Pak posloupnost $\{y_s\}_{s \in S}$, kde $y_s = x_n$ pro $s \in S_n$, konverguje k a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť $\{x_n\}$ konverguje k a . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď S_n neprázdná konečná podmnožina intervalu $[n, n + 1)$ a $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Pak posloupnost $\{y_s\}_{s \in S}$, kde $y_s = x_n$ pro $s \in S_n$, konverguje k a .



(Posloupnost $\{y_s\}_{s \in S}$ vznikla z $\{x_n\}$ tak, že každý bod se konečněkrát opakuje.).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť $\{x_n\}$ konverguje k a . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď S_n neprázdná konečná podmnožina intervalu $[n, n + 1)$ a $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Pak posloupnost $\{y_s\}_{s \in S}$, kde $y_s = x_n$ pro $s \in S_n$, konverguje k a .



(Posloupnost $\{y_s\}_{s \in S}$ vznikla z $\{x_n\}$ tak, že každý bod se konečněkrát opakuje.).



Je možné vzít i prázdné množiny S_n , ale ne všechny (kolik?).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a a $\{x_n\}$ není skoro konstantní, pak existuje prostá podposloupnost konvergující k a , která má stejnou množinu hodnot jako $\{x_n\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a a $\{x_n\}$ není skoro konstantní, pak existuje ryze monotónní podposloupnost konvergující k a .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a a $\{x_n\}$ není skoro konstantní, pak existuje ryze monotónní podposloupnost konvergující k a .



Lze vždy požadovat, aby tato podposloupnost měla stejnou množinu hodnot jako $\{x_n\}$?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže podposloupnosti $\{x_n\}_{n \in S}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus S}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergují k a , pak $\{x_n\}$ konverguje k a . (Jinými slovy, jestliže spojíme dohromady konečně mnoho posloupností konvergující k a , pak i výsledná posloupnost konverguje k a .)



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže podposloupnosti $\{x_n\}_{n \in S}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus S}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergují k a , pak $\{x_n\}$ konverguje k a . (Jinými slovy, jestliže spojíme dohromady konečně mnoho posloupností konvergující k a , pak i výsledná posloupnost konverguje k a .)



Ukažte na příkladě, že to neplatí pro spojení nekonečně mnoha posloupností.



LEKCE03-POS
Posloupnosti
definice
podposloupnost
vlastnosti
konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude
limita
vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská
limita součtu,...
limita a uspořádání
2 polícajti
limita a monotonie
hromadný bod posl.
charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor
hrom.bod množiny
izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj
číslo e
uzavřená množina
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita posloupnosti je $+\infty$ právě když žádná podposloupnost není shora omezená.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limita posloupnosti je $+\infty$ právě když žádná podposloupnost není shora omezená.



Jak je tomu pro limitu rovnou $-\infty$?

Konec otázek 3.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :

Ukažte, že pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ je posloupnost $\{\inf_{n \geq k} x_n\}_k$ neklesající a posloupnost $\{\sup_{n \geq k} x_n\}_k$ nerostoucí.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uved'te příklad, že i pro prostou posloupnost $\{x_n\}$ nemusejí být posloupnosti $\{\inf_{n \geq k} x_n\}_k$ a $\{\sup_{n \geq k} x_n\}_k$ ryze monotónní. Kdy jsou ryze monotónní? Mohou být obě ryze monotónní?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right) \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right)$.

Konec otázek 4.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :

Ukažte pomocí limity součinu, že pro $p \in \mathbb{R}$ je $\lim p \cdot x_n = p \cdot \lim x_n$, pokud má pravá strana smysl (tj. pokud existuje $\lim x_n$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte pomocí limity součtu a předchozího tvrzení, že $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n$ jakmile má pravá strana smysl.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte matematickou indukcí, že pro libovolné přirozené číslo k a k posloupností $\{x_{1,n}\}, \{x_{2,n}\}, \dots, \{x_{k,n}\}$ platí

$$\lim_n \sum_{i=1}^k x_{i,n} = \sum_{i=1}^k \lim_n x_{i,n} ,$$

má-li pravá strana smysl.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte matematickou indukcí, že pro libovolné přirozené číslo k a k posloupností $\{x_{1,n}\}, \{x_{2,n}\}, \dots, \{x_{k,n}\}$ platí

$$\lim_n \sum_{i=1}^k x_{i,n} = \sum_{i=1}^k \lim_n x_{i,n} ,$$

má-li pravá strana smysl.



Podobně pro konečný součin posloupností.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte větu o limitě součinu posloupností pomocí ε, n_0 -charakterizace limity.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte příklady posloupností $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ tak, že $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 0$ a $\lim x_n/y_n$ je předem dané číslo z \mathbb{R}^* nebo, že $\lim x_n/y_n$ neexistuje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte příklady posloupností $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ tak, že $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = +\infty$ a $\lim x_n \cdot y_n$ je předem dané číslo z \mathbb{R}^* nebo, že $\lim x_n \cdot y_n$ neexistuje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si, že tvrzení v *Otázkách 1* předchozí kapitoly o reálných číslech uvedené hned před částí *Reálné exponenty* říká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$ pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Ukažte pomocí tohoto tvrzení, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} r_n}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si, že tvrzení v *Otázkách 1* předchozí kapitoly o reálných číslech uvedené hned před částí *Reálné exponenty* říká, že $\lim_n a^{r_n} = 1$ pokud $\lim_n r_n = 0$.

Ukažte pomocí tohoto tvrzení, že $\lim_n a^{r_n} = a^{\lim r_n}$.



Těžší je dokázat pro $r \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n > 0$, že $\lim a_n^r = (\lim a_n)^r$.

Konec otázek 5.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 6 :

Ukažte, že pro případ nevlastních limit lze první Důsledek zformulovat jednodušeji:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 6 :

Ukažte, že pro případ nevlastních limit lze první Důsledek zformulovat jednodušeji:



Jestliže $x_n \leq y_n$ pro skoro všechna n a $\lim x_n = +\infty$, pak i $\lim y_n = +\infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 6 :

Ukažte, že pro případ nevlastních limit lze první Důsledek zformulovat jednodušeji:



Jestliže $x_n \leq y_n$ pro skoro všechna n a $\lim x_n = +\infty$, pak i $\lim y_n = +\infty$.



Jak vypadá formulace pro $-\infty$?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Platí obdoba druhého důsledku pro nevlastní limity? (Tj., jestliže $\{x_n\}$ je omezená a $\{y_n\}$ konverguje k $+\infty$, pak $\lim x_n y_n = +\infty$?)



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže $\lim x_n = \sup\{x_n\}$, pak lze posloupnost $\{x_n\}$ přeházet tak, že vznikne neklesající posloupnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V druhé části první věty nelze použít ostré nerovnosti. Uveďte příklad posloupností $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ takové, že $x_n < y_n$ pro všechna n a $\lim x_n = \lim y_n$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že jestliže $\lim x_n < p$, pak skoro všechny prvky posloupnosti $\{x_n\}$ jsou menší než p . Podobně pro obrácenou nerovnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte následující zobecnění věty o zachování nerovností limitami: *Necht' existují limity posloupností $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$. Jestliže pro skoro každé n je $x_n \leq y_n$ pro nekonečně mnoho indexů k , je $\lim x_n \leq \lim y_n$.*



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte následující zobecnění věty o zachovávání nerovností limitami: *Necht' existují limity posloupností $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$. Jestliže pro skoro každé n je $x_n \leq y_n$ pro nekonečně mnoho indexů k , je $\lim x_n \leq \lim y_n$.*



Je-li tedy v předchozím tvrzení navíc požadavek, aby i skoro každé y_n nebylo větší než nekonečně mnoho x_k , pak $\lim x_n = \lim y_n$.

Konec otázek 6.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 7 :

Uved'te příklad posloupnosti $\{x_n\}$, která nemá limitu v \mathbb{R}^* a žádný hromadný bod v \mathbb{R} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uved'te příklad prosté posloupnosti $\{x_n\}$, která má přesně dva hromadné body (tj. $\liminf x_n$ a $\limsup x_n \neq \liminf x_n$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro libovolnou konečnou množinu K v \mathbb{R} najděte posloupnost mající za hromadné body právě body z K .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Říká se o mně, že jsem uzavřená. To však není jisté. Skutečnost je takováto:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Říká se o mně, že jsem uzavřená. To však není jisté. Skutečnost je takováto:



*Necht' pro každé $n \in \mathbb{N}$ je a_n hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$. Pak každý hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, tj. množina hromadných bodů je uzavřená v \mathbb{R} (Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá **uzavřená**, jestliže platí $(\{x_n\} \subset A, x_n \rightarrow a \Rightarrow a \in A)$).



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Říká se o mně, že jsem uzavřená. To však není jisté. Skutečnost je takováto:



*Necht' pro každé $n \in \mathbb{N}$ je a_n hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$. Pak každý hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, tj. množina hromadných bodů je uzavřená v \mathbb{R} (Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá **uzavřená**, jestliže platí $(\{x_n\} \subset A, x_n \rightarrow a \Rightarrow a \in A)$).



Je uzavřený interval uzavřenou množinou?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámka.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámka.



Platí i opak: Je-li F uzavřená množina v \mathbb{R} , pak existuje prostá posloupnost $\{x_n\}$ tak, že F je množina všech jejích hromadných bodů v \mathbb{R} .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámka.



Platí i opak: Je-li F uzavřená množina v \mathbb{R} , pak existuje prostá posloupnost $\{x_n\}$ tak, že F je množina všech jejích hromadných bodů v \mathbb{R} .



To je vše. Byl to čajíček,
příště přitvrdíme ...

Konec otázek 7.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 8 :

Jak lze zeslabit v tvrzení (4) předchozího Pozorování předpoklad, že $\{x_n\}$ je prostá?



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro libovolnou konečnou množinu K v \mathbb{R} najděte množinu mající za hromadné body právě body z K .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní

- prostá

- omezená

- monotónní

- skoro všude

limita

- vlastnosti

- charakterizace 1

- charakterizace 2

- Bolzano Cauchy

- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace

- liminf

- limsup

- Bolzano-Wei.

- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod

- vlastnosti h.b.m.

- charakterizace

- h.b.m.

- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li $A \subset [a, b]$, pak každý hromadný bod množiny A leží v $[a, b]$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li $A \subset F$ a F je uzavřená množina, pak každý hromadný bod množiny A leží v F .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že množina hromadných bodů dané množiny je uzavřená.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že množina hromadných bodů dané množiny je uzavřená.



Poznámka: Každá uzavřená množina v \mathbb{R} je množinou hromadných bodů v \mathbb{R} nějaké (spočetné) množiny.

Konec otázek 8.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní posloupnosti



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní posloupnosti



Rozebereme si definici konvergence:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní posloupnosti



Rozebereme si definici konvergence:



DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v \mathbb{R} **konverguje** k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo **má za limitu bod** a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje **skoro všechny** prvky posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní posloupnosti



Rozebereme si definici konvergence:



DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v \mathbb{R} **konverguje** k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo **má za limitu bod** a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje **skoro všechny** prvky posloupnosti.



Značí se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ nebo $x_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow \infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní posloupnosti



Rozebereme si definici konvergence:



DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v \mathbb{R} **konverguje** k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo **má za limitu bod** a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje **skoro všechny** prvky posloupnosti.



Značí se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ nebo $x_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow \infty$.



Je třeba vidět i obrázek.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud takové okolí má tvar $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, potřebujeme pro skoro všechny prvky posloupnosti odhad



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud takové okolí má tvar $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, potřebujeme pro skoro všechny prvky posloupnosti odhad



$$|a - x_n| < \varepsilon .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud takové okolí má tvar $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, potřebujeme pro skoro všechny prvky posloupnosti odhad



$$|a - x_n| < \varepsilon .$$



Takový odhad je jednoduchý velmi zřídka.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.



Řešení. Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $n_\varepsilon = 1/\varepsilon$ a pro indexy větší než n_ε již platí odhad

$$|0 - x_n| < \varepsilon .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.



Řešení. Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $n_\varepsilon = 1/\varepsilon$ a pro indexy větší než n_ε již platí odhad

$$|0 - x_n| < \varepsilon.$$



Takové a podobné limity si je třeba pamatovat k řešení příkladů „vyšší kvality“.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Úspěšně vyřešilo 10 z 10.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně lze spočítat příklady pro $x_n = 1/(n - 1)$, $x_n = 1/(2n + 1)$, $x_n = 1/\sqrt{n}$,
 $x_n = 1/n^3$, $x_n = 0$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně lze spočítat příklady pro $x_n = 1/(n - 1)$, $x_n = 1/(2n + 1)$, $x_n = 1/\sqrt{n}$,
 $x_n = 1/n^3$, $x_n = 0$.



Je to samozřejmost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdykoliv budeme potřebovat, lze konvergující posloupnosti sčítat, odčítat, násobit a dělit.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdykoliv budeme potřebovat, lze konvergující posloupnosti sčítat, odčítat, násobit a dělit.



Jestli se takhle bude pracovat s tak krásnou větou jako je věta o algebře limit, tak se neznám.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když počítáme limity, píšeme u rovnítka značku „V“, aby bylo patrné, že se jedná o podmíněčnou rovnost.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když počítáme limity, píšeme u rovnítka značku „V“, aby bylo patrné, že se jedná o podmíněčnou rovnost.



„Jestliže se nakonec dopočítáme, byla to rovnost.“



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když počítáme limity, píšeme u rovnítka značku „V“, aby bylo patrné, že se jedná o podmíněčnou rovnost.



„Jestliže se nakonec dopočítáme, byla to rovnost.“



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n^3 + 1} \stackrel{V}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 1} = 0 + 0 = 0.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když počítáme limity, píšeme u rovnítka značku „V“, aby bylo patrné, že se jedná o podmíněčnou rovnost.



„Jestliže se nakonec dopočítáme, byla to rovnost.“



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n^3 + 1} \stackrel{V}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 1} = 0 + 0 = 0.$$



Zde „V“ znamenalo větu o limitě součtu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ještě častěji používáme odhad: větší posloupnost má větší limitu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ještě častěji používáme odhad: větší posloupnost má větší limitu.



Nebo stejnou. Já se asi rozčílím.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)/n = 0$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)/n = 0$



Jde o větu „mizející krát nulová“.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)/n = 0$



Jde o větu „mizející krát nulová“.



Taky jde použít „policajty" $0 \leftarrow -1/n \leq \sin(n)/n \leq 1/n \rightarrow 0$, pro $n \rightarrow \infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva sčítance. Pro
 n členů to nedělejte.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva sčítance. Pro n členů to nedělejte.

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (0 + 0 + \cdots + 0) = 0 .$$

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva sčítance. Pro n členů to nedělejte.



$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (0 + 0 + \dots + 0) = 0 .$$



Kdo to udělá, ten si koleduje o moji pozornost.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Jde limitit dva činitele. Pro
 n členů to nedělejte.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva činitele. Pro n členů to nedělejte.

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{2} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1) = 1.$$

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva činitele. Pro n členů to nedělejte.



$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{2} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1) = 1.$$



Kdo to udělá, budou se mu smát.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva sčítance,
které jsou zcela samostatné.
Pro propojené členy to ne-
dělejte.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva sčítance,
které jsou zcela samostatné.
Pro propojené členy to ne-
dělejte.

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(0 + \sqrt[n]{2}\right)^n \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (0 + 1)^n = 1.$$

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde limitit dva sčítance,
které jsou zcela samostatné.
Pro propojené členy to ne-
dělejte.



$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(0 + \sqrt[n]{2}\right)^n \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (0 + 1)^n = 1.$$



Kdo to udělá, bude působit
jemně komicky.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Používáme pouze dovolené
operace podepřené nějakou
větou.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Používáme pouze dovolené
operace podepřené nějakou
větou.



Tak to mám ráda.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní škály posloupností



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní škály posloupností

↓
Některé posloupnosti jsou rychleji mizející než jiné.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní škály posloupností

↓
Některé posloupnosti jsou rychleji mizející než jiné.



Já si ty drobečky někdy
prohlížím patřičně zvětšené.
Místo $x_n \rightarrow 0$ koukám na
 $1/x_n \rightarrow \infty$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Základní škály posloupností

↓
Některé posloupnosti jsou rychleji mizející než jiné.



Já si ty drobečky někdy
prohlížím patřičně zvětšené.
Místo $x_n \rightarrow 0$ koukám na
 $1/x_n \rightarrow \infty$.

↓
Například místo drobečků $1/n$ máme chlapáky n .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní se lehce přesvědčíme,
která posloupnost rychleji ,
,utíká" k nekonečnu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Píšeme

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^n + \binom{n}{2} 1^n + \dots \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Píšeme

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^n + \binom{n}{2} 1^n + \dots \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$



Tedy 2^n je časem mnohem větší než n , n^3 , n^5 a určitě i než jiné polynomy.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Píšeme

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^n + \binom{n}{2} 1^n + \dots \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$



Tedy 2^n je časem mnohem větší než n , n^3 , n^5 a určitě i než jiné polynomy.



Tedy

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně se chovají posloupnosti q^n pokud $|q| < 1$. Samozřejmě je $1/q = 1 + c$ a zase mocniny převálcuji polynom n .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně se chovají posloupnosti q^n pokud $|q| < 1$. Samozřejmě je $1/q = 1 + c$ a zase mocniny převálčují polynom n .



Podobně se usvědčí $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, popřípadě $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně se chovají posloupnosti q^n pokud $|q| < 1$. Samozřejmě je $1/q = 1 + c$ a zase mocniny převálčují polynom n .



Podobně se usvědčí $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, popřípadě $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.



Opravdu, pokud $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$, pak po umocnění jde x_n k nule.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další jednoduchá posloupnost s limitou k zapamatování (a dokázání) je



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další jednoduchá posloupnost s limitou k zapamatování (a dokázání) je



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Další jednoduchá posloupnost s limitou k zapamatování (a dokázání) je



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$



Mocniny jsou pomalejší než faktoriál.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Také platí



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Také platí



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{5^n} = 0.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Také platí



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{5^n} = 0.$$



Polynomy jsou pomalejší než mocniny.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Superdůležitá limita je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Superdůležitá limita je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



Již jsme ji zkoumali. Položme nyní

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Superdůležitá limita je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



Již jsme ji zkoumali. Položme nyní

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$



Pak pomocí indukce ukážeme

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < b_3 < b_2 < b_1.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Superdůležitá limita je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



Již jsme ji zkoumali. Položme nyní

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$



Pak pomocí indukce ukážeme

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < b_3 < b_2 < b_1.$$



Tím pádem (monotónní a omezené) posloupnosti $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mají limitu e (společnou, protože $b_n = a_n(1 + 1/n)$). Automaticky $2 < e < 3$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Také následující posloupnost je užitečná (její odvození není snadné)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Také následující posloupnost je užitečná (její odvození není snadné)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$



Je to trošku pracné, ale hlavní je ten výsledek. Ještě se s ním setkáme.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkoumejme chování

$$x_n = n!$$

a srovnejme ji s ostatními rychle rostoucími posloupnostmi.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkoumejme chování

$$x_n = n!$$

a srovnejme ji s ostatními rychle rostoucími posloupnostmi.



Je to nejzáludnější posloupnost co znám.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkoumejme chování

$$x_n = n!$$

a srovnejme ji s ostatními rychle rostoucími posloupnostmi.



Je to nejzáludnější posloupnost co znám.



Platí užitečný odhad

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

(První nerovnost se dokáže indukcí, druhá pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.)



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kdo chce lepší odhad, dostane

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kdo chce lepší odhad, dostane

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n .$$



Tak se dostaneme k pěkným odhadům $\sqrt[n]{n!}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kdo chce lepší odhad, dostane

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n .$$



Tak se dostaneme k pěkným odhadům $\sqrt[n]{n!}$.



To je již však čisté čarování. Uááááá !!!



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentní posloupnosti



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentní posloupnosti



Uvažujme posloupnost $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentní posloupnosti



Uvažujme posloupnost $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...



Jde o rekurentní posloupnost splňující

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentní posloupnosti



Uvažujme posloupnost $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...



Jde o rekurentní posloupnost splňující

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} .$$



Platí $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < 2$ (důkaz pozorováním vzorečku a indukcí).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentní posloupnosti



Uvažujme posloupnost $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...



Jde o rekurentní posloupnost splňující

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} .$$



Platí $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < 2$ (důkaz pozorováním vzorečku a indukcí).



Monotónní omezená posloupnost $\{x_n\}$ má konečnou limitu, označme ji A .



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentní posloupnosti



Uvažujme posloupnost $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...



Jde o rekurentní posloupnost splňující

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} .$$



Platí $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < 2$ (důkaz pozorováním vzorečku a indukcí).



Monotónní omezená posloupnost $\{x_n\}$ má konečnou limitu, označme ji A .



Zlimitíme rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

vyjádřený ve tvaru

$$(x_{n+1})^2 = 2 + x_n$$

a dostaneme po chvilce přemýšlení $A = 2$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rekurentní posloupnosti



Uvažujme posloupnost $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ...



Jde o rekurentní posloupnost splňující

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} .$$



Platí $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < 2$ (důkaz pozorováním vzorečku a indukcí).



Monotónní omezená posloupnost $\{x_n\}$ má konečnou limitu, označme ji A .



Zlimitíme rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

vyjádřený ve tvaru

$$(x_{n+1})^2 = 2 + x_n$$

a dostaneme po chvilce přemýšlení $A = 2$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vyřešil jeden z 10.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

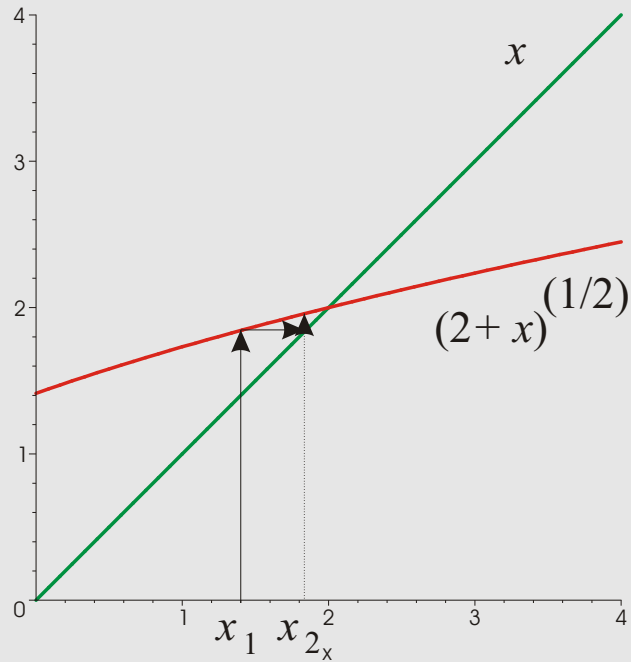
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o putování po grafu funkce $f(x) = \sqrt{2+x}$ systémem, při kterém zvolíme x_1 , pak na grafu f zahňeme doprava a na grafu identity zahňeme dolů a najdeme x_2 . Pak z x_2 postupujeme dále. Tak sestrojíme hledanou rekurentní posloupnost $\{x_n\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



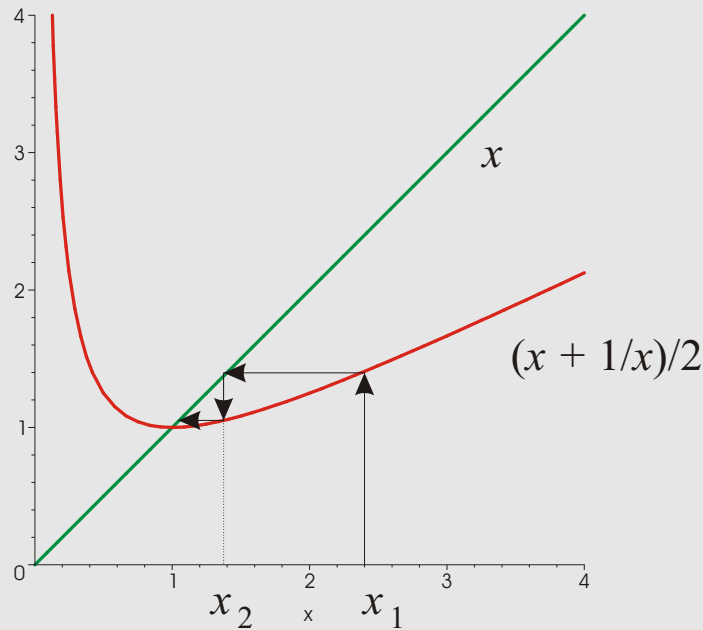
Příklad. Zkoumejte rekurentní posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) .$$



- LEKCE03-POS**
- Posloupnosti
- definice
 - podposloupnost
- vlastnosti
 - konstantní
 - prostá
 - omezená
 - monotónní
 - skoro všude
- limita
 - vlastnosti
 - charakterizace 1
 - charakterizace 2
 - Bolzano Cauchy
 - cauchyovská
- limita součtu,...
- limita a uspořádání
 - 2 policajti
 - limita a monotonie
- hromadný bod posl.
 - charakterizace
 - liminf
 - limsup
 - Bolzano-Wei.
 - Cantor
- hrom.bod množiny
 - izolovaný bod
 - vlastnosti h.b.m.
 - charakterizace
 - h.b.m.
 - des-rozvoj
- číslo e
- uzavřená množina
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Jde o putování po grafu funkce $f(x) = (x + 1/x)/2$ systémem, při kterém zvolíme x_1 , pak na grafu f zahněme doleva a na grafu identity zahněme dolů a najdeme x_2 . Pak z x_2 postupujeme dále. Tak sestrojíme hledanou rekurentní posloupnost $\{x_n\}$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

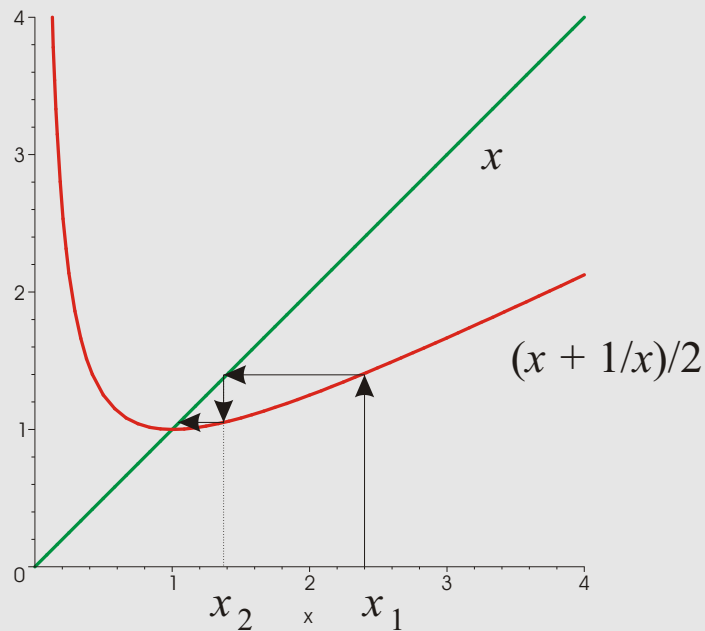
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Jde o putování po grafu funkce $f(x) = (x + 1/x)/2$ systémem, při kterém zvolíme x_1 , pak na grafu f zahneme doleva a na grafu identity zahneme dolů a najdeme x_2 . Pak z x_2 postupujeme dále. Tak sestrojíme hledanou rekurentní posloupnost $\{x_n\}$.



Limita bude jednička (jde o monotónní a omezenou posloupnost) a hodnota limity se zjistí zlimitěním rekurentního vztahu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

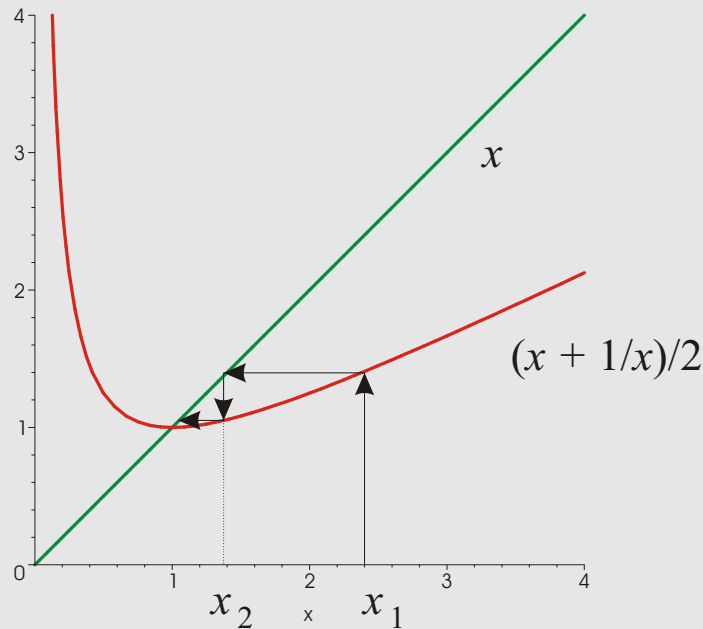
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Jde o putování po grafu funkce $f(x) = (x + 1/x)/2$ systémem, při kterém zvolíme x_1 , pak na grafu f zahneme doleva a na grafu identity zahneme dolů a najdeme x_2 . Pak z x_2 postupujeme dále. Tak sestrojíme hledanou rekurentní posloupnost $\{x_n\}$.



Limita bude jednička (jde o monotónní a omezenou posloupnost) a hodnota limity se zjistí zlimitěním rekurentního vztahu.



Pokud začneme vlevo od jedničky, posloupnost bude monotónní od indexu 2.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti
limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Máme hezké řešení.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Posloupnost splňuje $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{6}{1+x_n}$. Zjistěte limitu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Posloupnost splňuje $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{6}{1+x_n}$. Zjistěte limitu.



Sestrojená posloupnost není monotónní, ale podposloupnost s lichými (i sudými) indexy je monotónní a omezená. Spočteme limity těchto monotónních posloupností a zjistíme, že původní posloupnost konverguje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

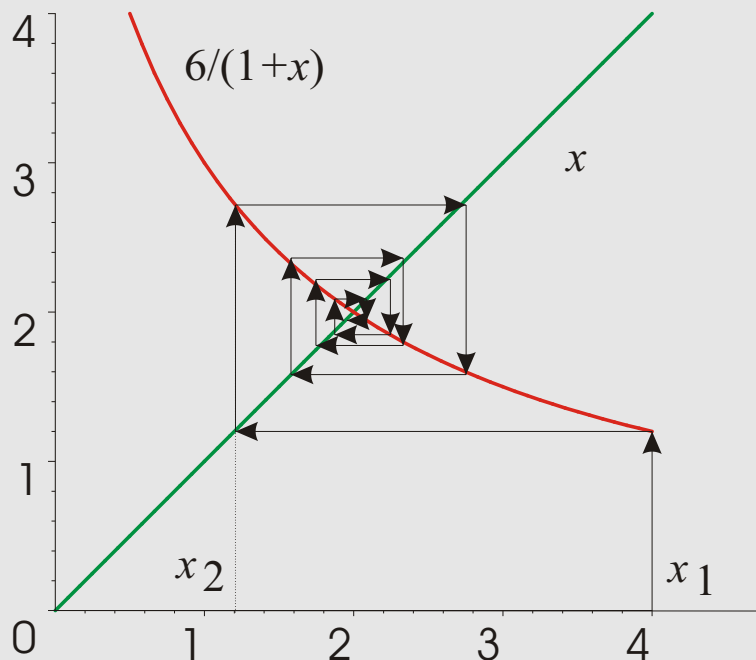
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Posloupnost splňuje $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{6}{1+x_n}$. Zjistěte limitu.



Sestrojená posloupnost není monotónní, ale podposloupnost s lichými (i sudými) indexy je monotónní a omezená. Spočteme limity těchto monotónních posloupností a zjistíme, že původní posloupnost konverguje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Počasí bylo každý rok „průměrné“ (průměr za poslední dva roky). Zjistěte, k jakému počasí to spěje.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Počasí bylo každý rok „průměrné“ (průměr za poslední dva roky). Zjistěte, k jakému počasí to spěje.



Řešení. Označme $x_1 = A$, $x_2 = B$. Platí

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Počasí bylo každý rok „průměrné“ (průměr za poslední dva roky). Zjistěte, k jakému počasí to spěje.



Řešení. Označme $x_1 = A$, $x_2 = B$. Platí

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}.$$



Nabízí se konstantní řešení $y_n = 1$. To nevyhovuje svými prvními členy.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Počasí bylo každý rok „průměrné“ (průměr za poslední dva roky). Zjistěte, k jakému počasí to spěje.



Řešení. Označme $x_1 = A$, $x_2 = B$. Platí

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}.$$



Nabízí se konstantní řešení $y_n = 1$. To nevyhovuje svými prvními členy.



Další řešení se nabízí $z_n = (-1/2)^n$. To také nevyhovuje svými prvními členy.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najdeme konstanty α a β takové, aby $x_n = \alpha y_n + \beta z_n$ bylo hledané počásí. Jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých α a β s parametry A a B

$$A = \alpha 1 + \beta \frac{-1}{2} \quad (1)$$

$$B = \alpha 1 + \beta \frac{1}{4} \quad (2)$$

(porovnáváme první dva členy posloupností).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najdeme konstanty α a β takové, aby $x_n = \alpha y_n + \beta z_n$ bylo hledané počásí. Jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých α a β s parametry A a B

$$A = \alpha 1 + \beta \frac{-1}{2} \quad (1)$$

$$B = \alpha 1 + \beta \frac{1}{4} \quad (2)$$

(porovnáváme první dva členy posloupností).



Zjistíme α a β a spočítáme limitu x_n .



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najdeme konstanty α a β takové, aby $x_n = \alpha y_n + \beta z_n$ bylo hledané počásí. Jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých α a β s parametry A a B

$$A = \alpha 1 + \beta \frac{-1}{2} \quad (1)$$

$$B = \alpha 1 + \beta \frac{1}{4} \quad (2)$$

(porovnáváme první dva členy posloupností).



Zjistíme α a β a spočítáme limitu x_n .



Spočítáme, že se počásí ustálí na $(A + 2B)/3$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonic

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najdeme konstanty α a β takové, aby $x_n = \alpha y_n + \beta z_n$ bylo hledané počásí. Jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých α a β s parametry A a B

$$A = \alpha 1 + \beta \frac{-1}{2} \quad (1)$$

$$B = \alpha 1 + \beta \frac{1}{4} \quad (2)$$

(porovnáváme první dva členy posloupností).



Zjistíme α a β a spočítáme limitu x_n .



Spočítáme, že se počásí ustálí na $(A + 2B)/3$.



Nevyřešil nikdo.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak hledat dvě „nezávislá“ řešení y_n a z_n v libovolné rekurentní situaci?



Použijeme metodu „há-dání“. Hledáme řešení ve vhodném tvaru. Funguje to pro určité typy příkladů (zde ano).



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak hledat dvě „nezávislá“ řešení y_n a z_n v libovolné rekurentní situaci?



Použijeme metodu „há-dání“. Hledáme řešení ve vhodném tvaru. Funguje to pro určité typy příkladů (zde ano).



Hledáme posloupnost ve tvaru $y_n = c^n$ pro vhodnou konstantu c . Dostaneme v našem případě rovnici

$$c^{n+2} = \frac{c^n + c^{n+1}}{2},$$

což po vydělení c^n vede na kvadratickou rovnici, která dává řešení $1, -1/2$.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak hledat dvě „nezávislá“ řešení y_n a z_n v libovolné rekurentní situaci?



Použijeme metodu „há-dání“. Hledáme řešení ve vhodném tvaru. Funguje to pro určité typy příkladů (zde ano).



Hledáme posloupnost ve tvaru $y_n = c^n$ pro vhodnou konstantu c . Dostaneme v našem případě rovnici

$$c^{n+2} = \frac{c^n + c^{n+1}}{2},$$

což po vydělení c^n vede na kvadratickou rovnici, která dává řešení $1, -1/2$.



Jednička vede na y_n , druhé řešení na z_n . Lineární kombinací těchto dvou „bázových“ řešení dostaneme řešení pro libovolnou hodnotu počátečních podmínek A, B .

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řešení pomocí typování výsledku ve vhodném tvaru používali i velcí matematici.



Já jsu malá.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte obecný člen posloupnosti

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte obecný člen posloupnosti

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



Rekurentní vztah je

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte obecný člen posloupnosti

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



Rekurentní vztah je

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} .$$



Má překvapivé řešení.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Najděte obecný člen posloupnosti

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...



Rekurentní vztah je

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} .$$



Má překvapivé řešení.



Má překrásné řešení.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné posloupnosti



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné posloupnosti



Platí řada tvrzení pro obecné posloupnosti.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné posloupnosti



Platí řada tvrzení pro obecné posloupnosti.



Příklad. Pro posloupnost kladných čísel x_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1/2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné posloupnosti



Platí řada tvrzení pro obecné posloupnosti.



Příklad. Pro posloupnost kladných čísel x_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1/2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 .$$



Řešení. Necht' pro všechna n platí $x_{n+1}/x_n < 3/4$. Pak $x_n < c(3/4)^n$ pro vhodnou konstantu.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obecné posloupnosti



Platí řada tvrzení pro obecné posloupnosti.



Příklad. Pro posloupnost kladných čísel x_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1/2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$



Řešení. Necht' pro všechna n platí $x_{n+1}/x_n < 3/4$. Pak $x_n < c(3/4)^n$ pro vhodnou konstantu.



Tedy geometrická posloupnost je větší. Konvergenci k nule máme díky policajtům. Místo $1/2$ lze vzít libovolné číslo $0 < q < 1$. Pro $q = 1$ to již nejde.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonicita

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$



Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$



Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$



Příklad. Pro posloupnost kladných čísel x_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} ,$$

existuje-li limita vpravo.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$



Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n .$$



Příklad. Pro posloupnost kladných čísel x_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} ,$$

existuje-li limita vpravo.



Důkazy jsou poněkud obtížnější.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nejsem nejhloupější.
Vzkazu rozumím.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Triky a kouzla



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Triky a kouzla



Přijměte na vlastní riziko pozvání do zakázané komnaty kouzel a triků. Vstup je na vlastní nebezpečí. Prozrazené kouzlo sice funguje, ale již nikdy nepůjde objevit.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Triky a kouzla



Přijměte na vlastní riziko pozvání do zakázané komnaty kouzel a triků. Vstup je na vlastní nebezpečí. Prozrazené kouzlo sice funguje, ale již nikdy nepůjde objevit.



Pokud tedy opravdu chcete, podívejte se na ně. Doporučuji to udělat až v situaci, když si s řešením nevíte rady.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Rozložení zlomku na dva:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozložení zlomku na dva:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$



Tomu postupnému přičítání
a odečítání stejných čísel ří-
kám **TELESKOP**.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teleskop se použije u součinů různých výrazů, například



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teleskop se použije u součinů různých výrazů, například



$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2},$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teleskop se použije u součinů různých výrazů, například



$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2},$$



$$1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)},$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teleskop se použije u součinů různých výrazů, například



$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2},$$



$$1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)},$$



$$\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(n-1)(n^2 + n + 1)}{(n+1)((n-1)^2 + (n-1) + 1)}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označme

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označme

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}.$$



Pak

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označme

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}.$$



Pak

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$



Jde o křížence teleskopu a
geometrické řady.

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Známým trikem

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

jsme převedli rozdíl „skoro stejných“ věcí na jedničku děleno součet „skoro stejných“ věcí.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Známým trikem

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

jsme převedli rozdíl „skoro stejných“ věcí na jedničku děleno součet „skoro stejných“ věcí.



K poznání toho, které věci jsou skoro stejné si pamatujeme následující „odhady“.



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 1} &\sim n, \\ \sqrt{n^2 + 2n + 1} &\sim n + 1, \\ \sqrt{n^2 + 2n} &\sim n + 1, \\ \sqrt{n^2 + n} &\sim n + \frac{1}{2}, \\ \sqrt[3]{n^3 + 1} &\sim n, \\ \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} &\sim n + 1, \\ \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} &\sim n + 1, \\ \sqrt[3]{n^3 + n^2} &\sim n + \frac{1}{3}, \\ \sqrt[3]{n^3 + n} &\sim n. \end{aligned}$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 1} &\sim n, \\ \sqrt{n^2 + 2n + 1} &\sim n + 1, \\ \sqrt{n^2 + 2n} &\sim n + 1, \\ \sqrt{n^2 + n} &\sim n + \frac{1}{2}, \\ \sqrt[3]{n^3 + 1} &\sim n, \\ \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} &\sim n + 1, \\ \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} &\sim n + 1, \\ \sqrt[3]{n^3 + n^2} &\sim n + \frac{1}{3}, \\ \sqrt[3]{n^3 + n} &\sim n. \end{aligned}$$



Ta vlnovka znamená to, že limita rozdílu levé a pravé strany jde k nule. Hle!

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 1} &\sim n, \\ \sqrt{n^2 + 2n + 1} &\sim n + 1, \\ \sqrt{n^2 + 2n} &\sim n + 1, \\ \sqrt{n^2 + n} &\sim n + \frac{1}{2}, \\ \sqrt[3]{n^3 + 1} &\sim n, \\ \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} &\sim n + 1, \\ \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} &\sim n + 1, \\ \sqrt[3]{n^3 + n^2} &\sim n + \frac{1}{3}, \\ \sqrt[3]{n^3 + n} &\sim n. \end{aligned}$$



Ta vlnovka znamená to, že limita rozdílu levé a pravé strany jde k nule. Hle!

LEKCE03-POS

Posloupnosti
definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní
prostá
omezená
monotónní
skoro všude

limita

vlastnosti
charakterizace 1
charakterizace 2
Bolzano Cauchy
cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání
2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace
liminf
limsup
Bolzano-Wei.
Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod
vlastnosti h.b.m.
charakterizace
h.b.m.
des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To lze účinně používat v příkladech



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost
vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n\right) + \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right) = \dots$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - n\right) + \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right) = \dots$$



Tak jsme našli společného známého pro dvě odmocninové „protivy“. V každé závorce pak pracujeme známým způsobem.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když máme součet dvou věcí, je jedna z nich zpravidla větší a jde tak jejím vytknutím převést součet na součin:



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když máme součet dvou věcí, je jedna z nich zpravidla větší a jde tak jejím vytknutím převést součet na součin:



$$n^3 - n^2 = n^2 \left(n - 1 \right) .$$



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když máme součet dvou věcí, je jedna z nich zpravidla větší a jde tak jejím vytknutím převést součet na součin:



$$n^3 - n^2 = n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$



Závorku pošleme k jedničce, protože se jedná o součin.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když máme součet dvou věcí, je jedna z nich zpravidla větší a jde tak jejím vytknutím převést součet na součin:



$$n^3 - n^2 = n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$



Závorku pošleme k jedničce, protože se jedná o součin.



Slyším a rozumím.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 7 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 7.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 8 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 8.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

UČENÍ

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 1 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 1.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

- 2 policajti

- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 2 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 2.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 3 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 3.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 4 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 4.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

- podposloupnost

vlastnosti

- konstantní
- prostá
- omezená
- monotónní
- skoro všude

limita

- vlastnosti
- charakterizace 1
- charakterizace 2
- Bolzano Cauchy
- cauchyovská

limita součtu,...

- limita a uspořádání
- 2 policajti
- limita a monotonie

hromadný bod posl.

- charakterizace
- liminf
- limsup
- Bolzano-Wei.
- Cantor

hrom.bod množiny

- izolovaný bod
- vlastnosti h.b.m.
- charakterizace
- h.b.m.
- des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 5 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 5.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 6 :



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 6 :



Varování. Informace v sekci „učení“ obsahují takové nesmysly, že se z nich lze poučit, ale nejde se z nich nic naučit.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 6 :



Varování. Informace v sekci „učení“ obsahují takové nesmysly, že se z nich lze poučit, ale nejde se z nich nic naučit.



Ale já to myslel dobře ...



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 6 :



Varování. Informace v sekci „učení“ obsahují takové nesmysly, že se z nich lze poučit, ale nejde se z nich nic naučit.



Ale já to myslel dobře ...



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3} \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (1)^{n^3} = 1$$

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nic špatného jsem neudělal.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nic špatného jsem neudělal.



Máš pravdu, podepsal jsi svůj rozsudek.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt[n]{n} \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1$$



Tak jsem to rozštípl.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt[n]{n} \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1$$



Tak jsem to rozštípl.



$(a^b)^c = a^{bc}$ a ani o chlup míň
či víc. T.j. raději neštípat.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} \frac{2}{n-2} \dots \stackrel{?}{=} 0 \cdot 0 \cdot \dots = 0$$



Stručně a jasně.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} \frac{2}{n-2} \dots \stackrel{?}{=} 0 \cdot 0 \cdot \dots = 0$$



Stručně a jasně.



Mooooooooooooooooo stručně.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{n^3} \left(\frac{1}{n} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{n^3}(0) = 0$$



Limity mám rád.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{n^3} \left(\frac{1}{n} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{n^3}(0) = 0$$



Limity mám rád.



Limity tě moc rády nemají.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - 1) = 0$$



Je dobře znát sinus.



LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - 1) = 0$$



Je dobře znát sinus.



Je lépe umět analýzu.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 6.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 7 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 7.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 8 :

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 8.

LEKCE03-POS

Posloupnosti

definice

podposloupnost

vlastnosti

konstantní

prostá

omezená

monotónní

skoro všude

limita

vlastnosti

charakterizace 1

charakterizace 2

Bolzano Cauchy

cauchyovská

limita součtu,...

limita a uspořádání

2 policajti

limita a monotonie

hromadný bod posl.

charakterizace

liminf

limsup

Bolzano-Wei.

Cantor

hrom.bod množiny

izolovaný bod

vlastnosti h.b.m.

charakterizace

h.b.m.

des-rozvoj

číslo e

uzavřená množina

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9