Posloupnosti a jejich konvergence

Pojem konvergence je velmi důležitý pro nediskrétní matematiku. Je nezbytný všude, kde je potřeba aproximovat nějaké hodnoty, řešit rovnice přibližně, používat derivace, integrály.

Konvergence znamená, že nějaké dané hodnoty se, zhruba řečeno, blíží k nějaké pevné hodnotě.

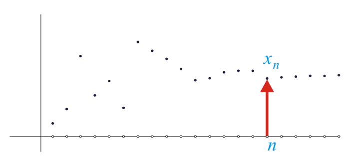
Těch daných hodnot musí být (teoreticky) nekonečně mnoho a nejjednodušší případ je samozřejmě pro spočetně mnoho takových hodnot – konvergence v tomto případě se pak nazývá konvergence posloupnosti.

Na konvergenci posloupnosti je postavena klasická matematická analýza.

POSLOUPNOSTI

Spočetné množiny se poznají tak, že se dají všechny její prvky přiřadit přirozeným číslům, každému číslu jeden prvek.

Protože se s přirozenými čísly dobře pracuje, je vhodné za posloupnosti brát rovnou prvky indexované těmito čísly, tj., pokud se pracuje např. v $\mathbb{R}$, každému přirozenému číslu n se přiřadí nějaké reálné číslo x_n.



Nebudeme zkoumat posloupnosti panovníků.

DEFINICE. Posloupnost v množině X (nebo posloupnost prvků množiny X) je soubor $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prvků X indexovaný přirozenými čísly, tj. posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zobrazení $f : \mathbb{N} \to X$, kde $f(n) = x_n$.

Někdy se posloupnost značí jako $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{x_n\}_n$ nebo jen $\{x_n\}$ (např. $\{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, resp. $\{\sqrt{n}\}_{\mathbb{N}}$, nebo $\{\sqrt{n}\}$, je-li zřejmé, pro která čísla n se odmocniny berou); v některých případech (většinou konkrétních) se píše i $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ (např. posloupnost sudých přirozených čísel $\{2, 4, 6, 8, ...\}$). Není-li uvedeno přesné indexování, vždy se chápou indexy z $\mathbb{N}$.

DEFINICE. Podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde $\{k_n\}$ je nějaká posloupnost přirozených čísel s vlastností $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < ....$

Příkladem je podposloupnost přirozených čísel dělitelných 8 posloupnosti sudých přirozených čísel (tj., podposloupnost $\{8, 16, 24, 32, 40, ...\}$ posloupnosti $\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$).

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

Následující vlastnosti ulehčí práci s posloupnostmi při aplikacích.

V mnoha případech bude možné použít jen posloupnosti s některou vhodnou vlastností, čímž se situace zjednoduší.

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel se nazývá

- konstantní, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k = x_n)$.
- prostá, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k \neq x_n)$.
- omezená (resp. shora omezená nebo zdola omezená), jestliže množina všech bodů x_n má uvedenou vlastnost jako podmnožina $\mathbb{R}$.

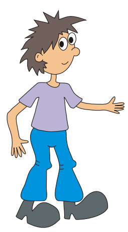
- rostoucí (resp. klesající), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k < x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k > x_n)$).
- neklesající (resp. nerostoucí), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k \leq x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k \geq x_n)$).

  Posloupnost, která je buď rostoucí nebo klesající nebo nerostoucí nebo neklesající, se nazývá monotónní.

  Posloupnost se nazývá ryze monotónní, jestliže je buď rostoucí nebo klesající.

Je-li P nějaká vlastnost posloupností, pak výrok posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má skoro P znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že posloupnost $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ má P.

To je veliká úspora času. Lépe si budeme povídat o posloupnostech, když budeme používat pojmy „skoro rostoucí" a podobně.



Já neumím skoro nic.

Všimněte si, že se čeština a matematika někdy domlouvají trochu krkolomně. V matematice se hraje na pravda x nepravda, ale skoro pravda je teď také povolena.

Podobně budeme říkat, že množina obsahuje skoro všechny prvky posloupnosti, když obsahuje prvky posloupnosti od určitého indexu.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ

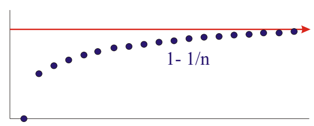
Jak bylo popsáno na začátku této části, hlavním důvodem práce s posloupnostmi je jejich použití např. k aproximaci řešení rovnic nebo k definicím či charakterizacím nových pojmů jako jsou spojitost a derivace.

K tomu je potřeba mít zaveden pojem konvergence posloupností.

Jedná se o jakési přibližování.

Při grafickém znázornění některých posloupností v předchozích příkladech bylo vidět, že se příslušné body přibližují k nějaké hodnotě.

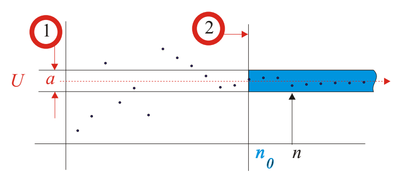
Např. u $\{1 - \frac{1}{n}\}$ se při znázornění na přímce přibližovaly body k číslu 1, při znázornění v rovině se graf přibližoval k přímce $y = 1$ – potom se říká, že posloupnost $\{1 - \frac{1}{n}\}$ konverguje k 1.



Je samozřejmě nutné dát tomuto „přibližování" přesnou formu.

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo má za limitu bod a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje skoro všechny prvky posloupnosti.

Značí se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ nebo $x_n \to a$ pro $n \to \infty$.



Je-li zřejmé, že se jedná o limitu posloupnosti, je možné použít značení $\lim_n x_n = a$ nebo dokonce $\lim x_n = a$, jsou-li i indexy zřejmé.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Obecné vlastnosti limity posloupnosti

Následující tvrzení jsou snadná a budou se používat bez odkazu (snad jen pro první vlastnost rada: dva různé body z $\mathbb{R}^*$ mají disjunktní okolí).

Máme hezkou definici, budeme mít hezké důkazy.

POZOROVÁNÍ. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:

1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;
2. je-li posloupnost $\{x_n\}$ konstantní, $x_n = a$, pak $\lim x_n = a$;
3. jestliže $\lim x_n = a$, pak $\lim x_{k_n} = a$ pro každou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$;
4. jestliže z každé podposloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k a, pak $\{x_n\}$ konverguje k a.
5. jestliže $\{x_n\}$ konverguje v $\mathbb{R}$, pak $\{x_n\}$ je omezená posloupnost.

Dvě další tvrzení jsou sice jednoduchá z hlediska důkazu, ale důležitá z hlediska uvědomění si různých možností přístupu ke konvergenci.

První věta charakterizuje konkrétní vlastní limitu, kdežto druhá věta charakterizuje konvergenci k neznámému vlastnímu číslu.

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:

1. $\lim x_n = a$;
2. $\lim(x_n - a) = 0$;
3. $\lim |x_n - a| = 0$;
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$;
5. $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \big(\inf\limits_{n \geq k} x_n \big) = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} \big(\sup\limits_{n \geq k} x_n \big) = a$.

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Je-li U okolí bodu 0, je posunutí $a + U = \{a + u; u \in U\}$ okolím bodu a a tedy $\{x_n\}$ leží skoro celá v $a + U$. To znamená, že $\{x_n - a\}$ leží skoro celá v U.

$2 \Leftrightarrow 3$: Je-li U symetrické okolí bodu 0, pak $|x| \in U \Leftrightarrow x \in U$ — odtud ihned plyne tvrzení.

$2 \Rightarrow 4$: $U = \{y; |y| < \varepsilon\}$ je okolí bodu 0 a tedy podle (2) skoro všechny členy $\{x_n - a\}$ (tj. od jistého indexu n_0) leží v U, což je podmínka (4).

$4 \Rightarrow 5$: Nechť ε je libovolné kladné číslo. Podle (4) mají všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ s indexy většími než n_0 vzájemnou vzdálenost menší než 2ε a tedy

$$| \inf_{n \geq k} x_n - \sup_{n \geq k} x_n | \leq 2\varepsilon$$

pro každé $k > n_0$.

Protože posloupnost $\{\inf_{n \geq k} x_n\}_k$ je neklesající a posloupnost $\{\sup_{n \geq k} x_n\}_k$ nerostoucí (dokažte), nemohou se vzdálenosti mezi $\inf_{n \geq k} x_n$ a $\sup_{n \geq k} x_n$ zvětšovat a tedy

$$| \sup_{k \in \mathbb{N}} \big(\inf_{n \geq k} x_n \big) - \inf_{k \in \mathbb{N}} \big(\sup_{n \geq k} x_n \big) | \leq 2\varepsilon \ .$$

To je však nerovnost mezi dvěma čísly a platí pro každé $\varepsilon > 0$. Tudíž musí být levá strana poslední nerovnosti rovna 0.

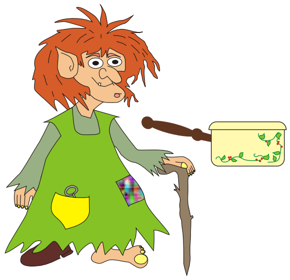
Tedy díky 4 platí

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \big(\inf_{n \geq k} x_n \big) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \big(\sup_{n \geq k} x_n \big) | = \ a \ .$$

$5 \Rightarrow 1$: Nechť U je okolí bodu a tvaru intervalu. Podle vlastností suprem a infim existuje k tak, že $\inf_{n \geq k} x_n \in U$ a $\sup_{n \geq k} x_n \in U$. Pro $m \geq k$ je $\inf_{n \geq k} x_n \leq x_m \leq \sup_{n \geq k} x_n$ a tedy leží v U, protože U je interval. $\diamond$

Je to řada úvah, které si nejde zapamatovat. Mají však vnitřní ideu. Pokud ji pochopíte, důkazy pomocí této myšlenky sestavíte.

Bojím bojím ...



Vnitřní ideu nám tady podušenou pod pokličkou. …

DŮSLEDEK. $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0$.

Pokud vidíte limitu jako obrázek, řadu věcí děláte jednoduše.

Ach, jak jsou si ty všechny nuly podobné …

POZNÁMKA. Je možné dodat obdobu vlastnosti (4) pro nevlastní body (dokažte):

$\lim x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) právě když

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ (n > n_0 \Rightarrow x_n > p) \quad (\text{resp. } x_n < p)\,.$$

Ekvivalence (1) a (5) předchozího tvrzení a ekvivalence (1) a (3) následujícího tvrzení) platí i pro nevlastní a.

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel jsou ekvivalentní:

1. $\{x_n\}$ konverguje v $\mathbb{R}$;
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$;
3. $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \big(\inf\limits_{n \geq k} x_n \big) = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} \big(\sup\limits_{n \geq k} x_n \big) \in \mathbb{R}$.

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Jestliže $\{x_n\}$ konverguje, např. k a, pak podle předchozího tvrzení, vlastnosti (4), platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2)$.

To znamená, že pro toto ε a $n, m > n_0$ je

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

což ukazuje vlastnost 2.

$2 \Rightarrow 3$: toto je stejné jako v předchozí větě důkaz $4 \Rightarrow 5$ (podstatné tam byly vzdálenosti mezi prvky posloupnosti, nikoli limita).

$3 \Rightarrow 1$: je opět stejné jako v předchozí větě důkaz $5 \Rightarrow 1$, označí-li se za a číslo $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \big(\inf\limits_{n\ge k} x_n\big)$. $\diamond$

Podmínka 2 ($\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$) se nazývá Bolzanova–Cauchyova podmínka a posloupnost splňující tuto podmínku se nazývá cauchyovská.

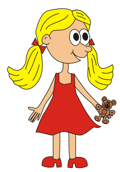
Bolzanova–Cauchyova podmínka bude často použíta v situacích, kdy bude potřeba ukázat, že posloupnost (např. integrálů, funkcí) konverguje, aniž je možné nebo nutné zjistit její limitu.

To je superdůležité. Když neznám limitu, tak alespoň ukážu konvergenci.

Bolzanova–Cauchyova podmínka popisuje situaci, kdy se posloupnost již jaksi "ustálila"a nic podstatného nevyvádí.

Já se prý taky ustálil.

Cauchyovská posloupnost je prostě hodná.



Asi taky nosí růžové šatičky.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Limita a aritmetické operace

Následující tvrzení ukazuje, že se limita posloupností chová přirozeně k aritmetickým operacím reálných čísel. Součet, součin a podíl posloupností se definuje po indexech, tj., např. pro součet, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.

Následuje věta o limitě součtu a součinu. Bývala to pěkná otázka ke zkoušení. Nicméně při použití věty o součtu okolí tu nezbyla žádná šť áva. Je to čajíček.

Nejdu nevhod?

VĚTA. Nechť $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak platí

1. $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;
3. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$, pokud má pravá strana smysl;

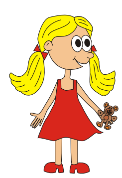
Důkaz. Nechť má smysl $\lim x_n + \lim y_n$, tj. existují $\lim x_n = a, \lim y_n = b$ a výraz $a + b$ má smysl.

Nechť U je okolí bodu $a + b$. Podle tvrzení o sčítání okolí existují okolí V bodu a a okolí W bodu b tak, že součet bodu z V a bodu z W leží v U (tj. $V + W \subset U$).

Pak skoro všechny členy $\{x_n\}$ leží ve V a skoro všechny členy $\{y_n\}$ leží ve W. Jejich součty, to znamená i skoro všechny členy $\{x_n + y_n\}$, leží ve $V + W$ a tedy v U, což znamená, že $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Tím je dokázáno tvrzení (1).

Jestliže se v předchozím důkazu píše násobení místo sčítání a použije tvrzení o násobení okolí, dostane se důkaz tvrzení (2).

Jde to snadno.



Já jdu sama nesnadno.

Jestliže má pravá strana (3) smysl, pak $\lim y_n \neq 0$, což znamená, že skoro všechny členy $\{y_n\}$ jsou nenulové (jinak by existovala podposloupnost samých 0 a tedy by musela i celá posloupnost mít limitu 0).

Pak i zlomky $\frac{x_n}{y_n}$ mají od jistého indexu počínaje smysl. Protože $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$ stačí, vzhledem k limite součinu v (2), předpokládat že $\{x_n\}$ je konstantní posloupnost s hodnotou 1.

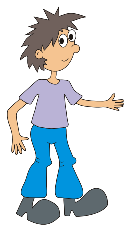
Podle tvrzení o podílu okolí je důkaz obdobný jako v předchozích dvou případech. ◇

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Limita a uspořádání

Tato část ukazuje chování konvergence posloupností k uspořádání na reálných číslech a existenci limity monotónních posloupností.

Zjistíme, že větší posloupnost nemá menší limitu.



To je jako co?

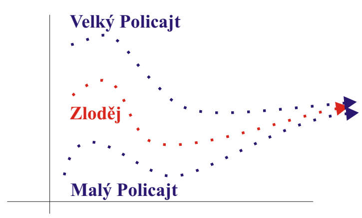
VĚTA. Nechť $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

1. Jestliže $\lim x_n < \lim y_n$, potom je $x_n < y_n$ pro skoro všechna n.
2. Jestliže $x_n \le y_n$ pro skoro všechna n, potom $\lim x_n \le \lim y_n$ pokud obě limity existují.

Důkaz. Nechť $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a < b$ a U, V jsou disjunktní otevřené intervaly, $U \ni a, V \ni b$. Pak každý prvek U je menší než každý prvek V (dokažte). Protože skoro všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ (resp. $\{y_n\}$) leží v U (resp. ve V), platí uvedené tvrzení (1).

Tvrzení (2) plyne ihned z (1). Kdyby totiž $x_n \le y_n$ pro skoro všechna n a $\lim x_n > \lim y_n$, pak podle (1) (s obrácenou nerovností) by pro skoro všechna n platilo $x_n > y_n$, což by byl spor s předpokladem. $\diamond$

DŮSLEDEK. Nechť $\{x_n\}, \{a_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $x_n \le a_n \le y_n$ pro skoro všechna n. Jestliže existují $\lim x_n, \lim y_n$ a rovnají se, pak existuje i $\lim a_n$ a rovná se předchozím limitám.



Jestliže je zloděj mezi dvěma policajty, pak při dopadení policajt i zloděj jedno jsou.

DŮSLEDEK. Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost a $\{y_n\}$ konverguje k 0. Potom $\lim x_n y_n = 0$

VĚTA. Nechť $\{x_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel.

1. Je-li $\{x_n\}$ neklesající, pak $\lim x_n = \sup x_n$.
2. Je-li $\{x_n\}$ nerostoucí, pak $\lim x_n = \inf x_n$.

Důkaz. Nechť je posloupnost $\{x_n\}$ neklesající. Potom $\inf\limits_{n \geq k} x_n = x_k$ a $\sup\limits_{n \geq k} x_n$ je stejné pro všechna k a rovná se nějakému a. Potom ale

$$\sup_k \inf_{n \geq k} x_n = \sup_k x_k = a\,, \quad \inf_k \sup_{n \geq k} x_n = \inf_k a = a\,.$$

Podle charakterizace limity posloupnosti pomocí suprem a infim tedy $\lim x_n$ existuje a rovná se a, tj. číslu $\sup_n x_n$.

Pro nerostoucí posloupnost $\{x_n\}$ je důkaz obdobný, nebo lze použít předchozí důkaz pro posloupnost $\{-x_n\}$. $\diamond$

DŮSLEDEK. Monotónní posloupnost má vždy limitu. Omezená monotónní posloupnost vždy konverguje v $\mathbb{R}$.

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6 66

HROMADNÝ BOD

Posloupnost $\{x_n\}$ nemusí konvergovat, ale některé její podposloupnosti konvergovat mohou.

Jejich limity (nazývané hromadné body) mohou někdy nahrazovat neexistující limitu celé posloupnosti.

Protože každá nekonečná množina obsahuje prosté posloupnosti, lze definovat hromadné body množiny (i nespočetné) jako hromadné body těchto posloupností.

Jsou to body, které jsou k dané množině velmi blízko.

Hromadný bod posloupnosti

Okolí limity musí obsahovat skoro všechny členy posloupnosti. U hromadného bodu je podmínka zeslabena na nekonečně mnoho členů posloupnosti.

Když budeme na tabuli kreslit jednotlivé body posloupnosti $x_n = 1/n$ křídou, bude za chvíli na tabuli hromada křídy.

DEFINICE. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ se nazývá hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže každé okolí U bodu a obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ (tj., existuje nekonečná podmnožina $S \subset \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in U$ pro $s \in S$).

Jsou to body, které jsou atakovány prvky posloupnosti s libovolně vysokým indexem.

VĚTA.

1. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, právě když existuje její podposloupnost $\{x_{k_n}\}$, která konverguje k bodu a.

2. Hodnota $\sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{n\geq k} x_n\big)(=\lim_k\big(\inf_{n\geq k} x_n\big))$ je nejmenším hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (značí se $\liminf x_n$ nebo $\underline{\lim}\, x_n$ a čte se limes inferior).

3. Hodnota $\inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{n\geq k} x_n\big)(=\lim_k\big(\sup_{n\geq k} x_n\big))$ je největším hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (značí se $\limsup x_n$ nebo $\overline{\lim}\, x_n$ a čte se limes superior).

Důkaz. (1) Jestliže k a konverguje vybraná posloupnost z $\{x_n\}$, pak každé okolí bodu a obsahuje skoro všechny členy této podposloupnosti, tedy nekonečně mnoho členů z $\{x_n\}$, a proto je a hromadným bodem $\{x_n\}$.

Naopak, nechť a je hromadným bodem $\{x_n\}$ a U_n, pro $n \in \mathbb{N}$, jsou okolí bodu a takové, že $U_{n+1} \subset U_n$, $\bigcap U_n = \{a\}$, např. $U_n = (a - 1/n, a + 1/n)$pro a vlastní. Lze předpokládat, že $x_n \neq a$ pro skoro všechna n (jinak by existovala konstantní podposloupnost s hodnotou a a důkaz by byl hotov).

Každé okolí U_n obsahuje nekonečně členů z $\{x_n\}$. Lze tedy vybrat prostou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ tak, že $x_{k_n} \in U_n$. Zřejmě $\{x_{k_n}\}$ konverguje k a.

(2) Nechť $a = \lim_k\big(\inf_{n\geq k} x_n\big)$ a U je otevřený interval okolo a. Tedy pro skoro všechna k je $\inf_{n\geq k} x_n \in U$. Jestliže infimum množiny náleží do otevřeného intervalu, musí do intervalu náležet i nějaký prvek této množiny (dokažte).

Tedy pro každé k existuje $n_k \geq k$ tak, že $x_{n_k} \in U$ (použijte vlastnosti infima). Protože index n_k se může opakovat ve výběru jen konečně krát, obsahuje U nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ a tedy a je jejím hromadným bodem.

Nechť $b < a$ a V je intervalové okolí bodu b, které je disjunktní s nějakým intervalovým okolím U bodu a. Podle předchozího odstavce je pro skoro všechna k, např. pro $k > n_0$, $\inf_{n\geq k} x_n \in U$. Tedy jen členy $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$ mohou ležet ve V a proto b není hromadný bod $\{x_n\}$.

Část (3) se dokáže podobně jako část (2) nebo se (2) použije na posloupnost $\{-x_n\}$. $\diamond$

DŮSLEDEK.

1. Každá posloupnost má hromadný bod.

2. Posloupnost má limitu právě když má jediný hromadný bod.

Je to pořád dokola. Doufám, že jsem to nepopletla. Myšlenka je tam jasná.

Následují dvě důležitá tvrzení.

To první je jednoduchým důsledkem předchozího důsledku (1) a tvrzení (1) předchozí věty pro omezené posloupnosti, ale vzhledem k jeho významu je uvedeno znovu.

Důkaz druhého tvrzení je složitější a ukazuje princip používaný často pro důkaz existence.

Je to velice užitečná věta !!!

VĚTA.

1. **(Bolzanova–Weierstrassova věta)** Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergující v $\mathbb{R}$.

2. **(Cantorova věta)** Je-li K_n klesající posloupnost uzavřených omezených intervalů na $\mathbb{R}$, pak $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

   Jestliže navíc délky intervalů K_n konvergují k 0, je $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_n$ jednobodový.

Ty věty ani nemohou neplatit. Tedy pokud jsme v $\mathbb{R}$.

Důkaz. (2). Nechť $x_n \in K_n$ pro každé n. Pak $\{x_n\}$ je omezená a má hromadný bod $a \in \mathbb{R}$. Nyní se ukáže, že $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_n$.

Pokud $a \notin \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_n$, pak existuje n tak, že $a \notin K_n$ a najde se otevřený interval U okolo a disjunktní s K_n (a tedy disjunktní s každým K_k pro $k > n$).

To je ale spor, neboť U musí obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ a tedy musí protínat nekonečně mnoho množin K_k.

Pokud délky intervalů K_n konvergují k 0, nemůže obsahovat jejich průnik dva různé body (ty mají kladnou vzdálenost). $\diamond$

Děkuji za potlesk. Patří však výše uvedeným pánům.

Hromadný bod množiny

Jednoduchou modifikací hromadného bodu posloupnosti se dostane hromadný bod množiny:

DEFINICE. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ se nazývá hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže každé okolí bodu a obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny A.

Prvek $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A se nazývá izolovaný bod množiny A.

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a.
2. Bod $+\infty$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když A není shora omezená. Podobně pro $-\infty$.
3. Konečná množina nemá žádný hromadný bod.
4. Bod je hromadným bodem skoro prosté posloupnosti právě když je hromadným bodem množiny hodnot této posloupnosti.
5. Je-li a hromadným bodem množiny A a $B \supset A$, je a hromadným bodem i množiny B.
6. $a \in A$ je izolovaným bodem A právě když existuje okolí U bodu a takové, že $U \cap A = \{a\}$.

Hromada je vidět na dálku.

Předchozí vlastnost (4) ukázala vztah hromadných bodů posloupností k hromadným bodům odpovídajících spočetných množin.

Následující tvrzení ukazuje vztah hromadných bodů libovolných (i nespočetných) množin k hromadným bodům posloupností.

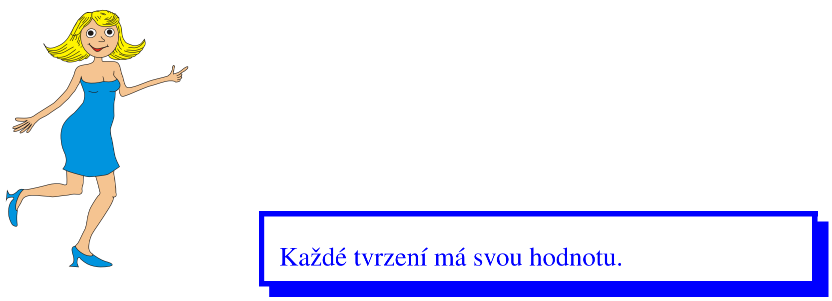
VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$:

1. a je hromadný bod množiny A;
2. existuje posloupnost v $A \setminus \{a\}$ konvergující k a;
3. existuje prostá posloupnost v A konvergující k a;
4. existuje ryze monotónní posloupnost v A konvergující k a.

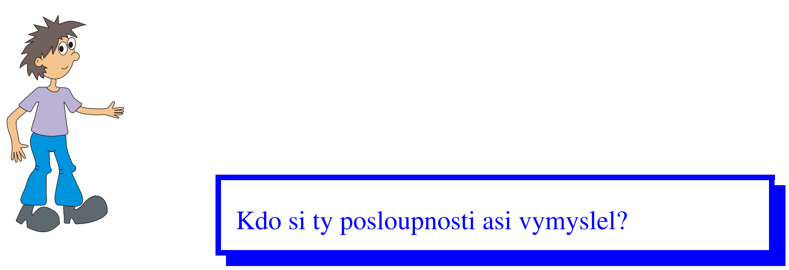
Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: Nechť a je hromadný bod A a $\{U_n\}$ je klesající spočetná soustava okolí bodu a s průnikem $\{a\}$. Každé U_n obsahuje bod $x_n \in A \setminus \{a\}$. Je zřejmé, že $\{x_n\}$ je hledaná posloupnost.

Protože každá konvergentní posloupnost s členy nerovnajícími se limitě obsahuje prostou a tedy i ryze monotónní podposloupnost, jsou vlastnosti (2), (3) a (4) ekvivalentní. Tyto vlastnosti triviálně implikují vlastnost (1). $\diamond$

DŮSLEDEK. Každá nekonečná podmnožina v $\mathbb{R}$ má hromadný bod a každá omezená nekonečná podmnožina v $\mathbb{R}$ má vlastní hromadný bod.



Poznámky 8   Příklady 8   Otázky 8



POZNÁMKY

Poznámky 1:

Indexování.

Není nutné trvat na indexování od 1 do ∞.

Soubor $\{n!\}_{n=0}^{\infty}$ není podle definice posloupnost, ale lze snadno posunout indexy, aby posloupnost vznikla: $\{(n-1)!\}_{n=1}^{\infty}$. Podobně je tomu např. se soubory $\{p_m\}_{m=3}^{\infty}$, $\{a_k\}_{k=-10}^{\infty}$. I soubory $\{x_i\}_{i=-1}^{-\infty}$, $\{x_\pi, x_{3\pi}, x_{5\pi}, x_{7\pi}, ...\}$ se přirozeně upraví do tvaru $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Navíc u posledního souboru není indexová množina dána, ale je zřejmé, jak se chápe.

Ve všech těchto uvedených případech (a pokud nemůže dojít k nedorozumění) je vhodnější chápat uvedené zápisy jako posloupnost, i když indexy nejsou zadány nebo nejsou tvaru $n \in \mathbb{N}$.

Pro účely konvergence lze za posloupnost brát dokonce libovolný soubor $\{x_s\}_{s\in S}$, kde S je nekonečná spočetná množina (uspořádání indexů není podstatné).

Posloupnost a množina hodnot posloupnosti. Je nutné rozlišovat mezi posloupností a její množinou hodnot.

Posloupnost je vždy spočetná, její množina hodnot může být i jednobodová (např. posloupnost samých nul $\{0, 0, 0, 0, 0, ...\}$).

Navíc mohou mít i různé posloupnosti stejné množiny hodnot. Např. $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...\}$, kde číslo n se opakuje n-krát za sebou

Dovedete určit k-tý člen?

je jiná posloupnost než $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$, i když množina použitých bodů (tj. množina hodnot posloupnosti) je stejná.

Zadávání posloupností. Posloupnost se obvykle zadává nějakým předpisem, např. $x_n = n!$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Někdy lze posloupnost zadat uvedením několika prvních členů, popř. dodat slovní doprovod (právě v uvedeném příkladu $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...\}$ je to jednodušší než zadat n-tý člen předpisem).

Specifikum posloupností je zadání rekurentní. Zadá se první člen (nebo několik prvních členů) a poté vzorec na výpočet dalších členů. Např. $x_1 = 2, x_{n+1} = (x_n + 1/x_n)/2$.

Pokud se nepodaří odhalit předpis na definování x_n přímo bez pomoci předchozích členů, je v tomto případě obtížné napsat čemu se rovná např. x_{1000}.

Nicméně, rekurentně zadané posloupnosti se v praxi často vyskytují (viz např. Newtonova metoda řešení rovnic)

Velice důležitým případem je zadání posloupnosti pomocí reálné funkce f definované např. na $(0, \infty)$; pak $x_n = f(n)$ a pro práci s posloupností lze použít tvrzení pro funkce, které pro posloupnosti neplatí nebo nemají smysl (např. derivace a výpočet limit posloupností pomocí L'Hospitalova pravidla).

Podposloupnosti. Je vhodné si uvědomovat, že podposloupnost je opět posloupnost. Někdy se místo podposloupnosti hovoří o *vybrané posloupnosti* – vybírají se totiž jen některé členy původní posloupnosti.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

V prosté posloupnosti $\{x_n\}$ jsou hodnoty x_n v jednoznačném vztahu se svými indexy, tj. žádný bod se v posloupnosti neopakuje.

Konstantní posloupnost má naopak jen jednu hodnotu a ta se nekonečněkrát opakuje.

Konstantní posloupnost se někdy nazývá stacionární.

Někdy se stává matematická analýza pouhou hrou se slovy. Stacionární auto prostě nejede.

Je vhodné si uvědomit, že pojmy *nerostoucí, neklesající* neznamenají opak pojmů *rostoucí, klesající* – podobně pro *konstantní* versus *prostá*.

Posloupnost je např. nerostoucí, jestliže v žádném přechodu od indexu n k indexu $n + 1$ hodnota posloupnosti nevzroste, kdežto posloupnost je rostoucí, jestliže v každém takovémto přechodu příslušná hodnota vzroste

Jaké jsou příslušné negace?

Zřejmě je posloupnost omezená právě když je současně shora a zdola omezená.

Podobnou definici vlastnosti skoro lze zavést i pro spočetné množiny; např. výrok „skoro všechny body spočetné množiny A leží v množině U" znamená, že jen konečně mnoho bodů z A leží mimo U.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Vychází se z posloupností v $\mathbb{R}$, ale konvergence těchto posloupností je definována v $\mathbb{R}^*$, neboť je to výhodné, jak se ukáže později.

Nicméně, konvergentní posloupnost znamená v mnoha textech konvergenci v $\mathbb{R}$ (podobně jako je tomu u konvergence řad nebo integrálů). V tomto textu je snaha vždy popsat, v jaké množině je konvergence použita.

Posloupnost, která nekonverguje, se v některých textech nazývá *divergentní*.

Musí se dávat pozor, protože posloupnost konvergující k $+\infty$ podle naší definice je v mnoha textech považována za posloupnost, která nekonverguje a je divergentní.

Já od přírody konverguju k divergenci.

Takže se k nekonečnu může konvergovat i divergovat.

Nezáleží na uspořádání indexů posloupnosti. Definice limity a posloupnosti $\{x_n\}$ říká, že pro každé okolí U bodu a existuje jen konečně mnoho členů posloupnosti, které neleží v U.

Pro tuto definici stačí posloupnost definovat jako soubor indexovaný libovolnou spočetnou množinou (viz *Otázky*), neboť nezáleží na uspořádání indexů.

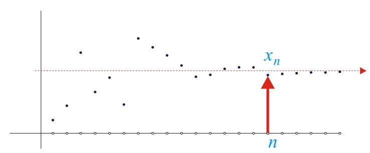
Přepíše-li se definice do jiného tvaru, např. že existuje index n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $x_n \in U$, je indexování pomocí přirozených čísel potřebné.

Stačí používat jen některá okolí. Jestliže dané okolí obsahuje skoro všechny členy posloupnosti, má stejnou vlastnost i každé větší okolí.

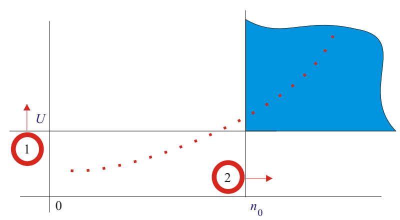
Stačí tedy tuto vlastnost ověřovat jen pro takový systém $\mathcal{U}$ okolí bodu a, že každé jiné okolí už obsahuje množinu z $\mathcal{U}$.

To je např. systém $\{U_n\}_{\mathbb{N}}$, kde $U_n = \{x; |x-a| < 1/n\}$ pro vlastní bod a, $U_n = \{x : x > n\}$ pro $a = +\infty$, $U_n = \{x; x < -n\}$ pro $a = -\infty$. Místo $\{1/n\}$ (resp $\{n\}$) lze vzít i jinou posloupnost kladných čísel konvergující k 0 (resp. k $+\infty$).

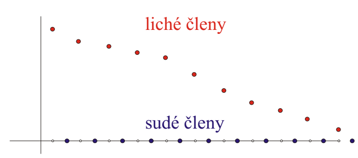
Konvergence posloupnosti k $a \in \mathbb{R}$ má přirozený význam, zobrazí-li se buď na ose x (pak všechny její členy se blíží k a ve smyslu vzdálenosti na přímce) nebo jako graf v rovině (graf se blíží k přímce $y = a$, tj. tato přímka je jakousi asymptotou grafu posloupnosti).



Konvergence k $+\infty$ znamená, že hodnoty posloupnosti rostou nade všechny meze.



Není nutné, aby se všechny členy posloupnosti blížily stejně rychle, např. liché členy se mohou k limitě blížit rychleji než sudé členy (tj. pro dané okolí limity se nachází mimo něj mnohem méně lichých členů než sudých členů posloupnosti).



Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Poznámky k charakterizaci vlastní limity. Vlastnost 2 v předchozí charakterizaci konkrétní limity říká, že konvergence nezávisí na posunutí (nebo že konvergence k libovolnému vlastnímu bodu lze definovat pomocí konvergence k 0 a pomocí aritmetické operace, zde odčítání).

Třetí vlastnost charakterizuje konvergenci pomocí vzdálenosti bodů (vzdálenost mezi prvky posloupnosti a limitou se blíží k 0).

Čtvrtá vlastnost je přepis definice, vyjádříme-li okolí pomocí nerovností. Tato charakterizace se často nazývá ε, n_0-charakterizace limity posloupnosti.

Tu je dobré si pamatovat. Podobná bude i u funkcí.

Poslední vlastnost platí i pro nevlastní body a vyjadřuje vztah konvergence k uspořádání.

Bolzanova–Cauchyova podmínka se používá spíše v důkazech než pro konkrétní posloupnosti. Pro konkrétní posloupnosti se častěji používají jiná tvrzení.

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Výrok *pokud má pravá strana smysl* znamená dvoje: jednak musí limity na pravé straně existovat a s těmito limitami (tj. čísly) má daná aritmetická operace smysl, tj. vzniklý výraz není neurčitý (např. se nerovná $\infty - \infty$).

Tvrzení říká, že pokud má pravá strana smysl, pak má i levá strana smysl a obě strany se rovnají.

V případě, že obě limity na pravé straně jsou vlastní, pak aritmetická operace na pravé straně má vždycky smysl, kromě dělení nulou pro limity podílu.

Při počítání limity např. součtu se tedy formálně napíše, že se tato limita rovná součtu limit, i když v tuto chvíli ještě rovnost není známa.

Teprve po ověření existence a smyslu pravé strany je možné se vrátit a potvrdit rovnost.

V případě, že pravá strana z nějakého důvodu nemá smysl, je nutné rovnost škrtnout a nelze ji použít.

Někdy je možné u rovnítka napsat otazník (?) a po ověření či vyvrácení napsat ?=ANO nebo ?=NE.

V rovnosti pro limity podílu by se správně měl přidat předpoklad, že všechna y_n jsou nenulová.

Nicméně, jak bylo použito v důkazu, jen konečně mnoho členů y_n může být nulových (protože pravá strana má smysl a její jmenovatel je tedy nenulový).

Těchto konečně mnoho členů nemá pro limitu význam a je možné posunout posloupnosti až od nějakého indexu nebo několik prvních členů změnit.

Posloupnost vlastně „žije" u nekonečna, tedy její začátek není podstatný.

Konec poznámek 5.

Poznámky 6:

Jestliže chápeme první tvrzení ve větě o zachovávání nerovností jako $A \Rightarrow B$, pak druhé tvrzení je tvaru $\neg B \Rightarrow \neg A$ a tudíž jsou obě tvrzení ekvivalentní.

Snadno se najdou příklady, že v druhém tvrzení ve větě o zachovávání nerovností není možné změnit neostré nerovnosti na ostré (viz *Otázky*).

Je nutné si pamatovat, že nerovnosti mezi posloupnostmi mohou přejít limitou v rovnost.

Konec poznámek 6.

Poznámky 7:

Z vlastností hromadných bodů vyplývá, že množina H hromadných bodů posloupnosti $\{x_n\}$ leží v intervalu $[\liminf x_n, \limsup x_n]$ a oba krajní body do H náleží.

Posloupnost může mít jediný hromadný bod (pokud uvažujeme jen hromadné body z $\mathbb{R}$, pak nemusí mít žádný hromadný bod – uvědomte si příklad), nebo může mít za hromadné body celou rozšířenou reálnou přímku (resp. $\mathbb{R}$).

V *Otázkách* je uvedena charakterizace množin, které jsou množinami hromadných bodů posloupností.

Opět jsou k dispozici dvě ekvivalentní definice hromadných bodů posloupnosti: pomocí okolí a pomocí limit podposloupností.

Jako vždy v těchto případech je vhodné mít na mysli obě možnosti a využívat jednu z nich nebo obě podle specifické situace.

Konec poznámek 7.

Poznámky 8:

Je možné zde opakovat stejnou poznámku jako u hromadných bodů posloupnosti: jsou dvě ekvivalentní definice hromadných bodů množiny, a to pomocí okolí a pomocí limity posloupnosti, a používají se obě dvě podle momentální vhodnosti.

Opět se ukazuje rozdíl mezi posloupností a množinou hodnot jejích členů. Konstantní posloupnost má hromadný bod (svou hodnotu), kdežto jednobodová množina nemá žádný hromadný bod.

Jsou to jednoduchosti.

Konec poznámek 8.

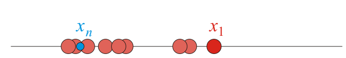
PŘÍKLADY

Příklady 1:

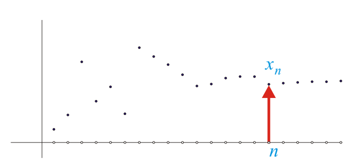
Příklady posloupností:
aritmetická posloupnost $\{a+nd\}_{n=0}^{\infty}$,
geometrická posloupnost $\{aq^n\}_{n=0}^{\infty}$,
$\{n^2\}$, $\{1/n\}$, $\{\sin(n)\}$, $\{\frac{2^n}{n!}\}$, $\{\sqrt[n]{n}\}$,
posloupnost ploch pravidelných n-úhelníků vepsaných do kružnice.

Rekurentně zadané posloupnosti:
aritmetická posloupnost $x_0 = a, x_{n+1} = x_n + d$,
geometrická posloupnost $x_0 = a, x_{n+1} = x_n q$
$x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = (x_{n-2} + x_{n-1})/2$ pro $n \geq 3$.
Fibonacciova posloupnost $\{x_n\}$, kde $x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ pro $n \geq 3$.

Grafické znázornění posloupnosti: Znázornit posloupnost lze dvěma způsoby. Jednak jako body na přímce (v tomto znázornění však není vidět opakování bodů):



…jednak jako graf, tj. množinu bodů $\{(n, x_n); n \in \mathbb{N}\}$ v rovině:



Konec příkladů 1.

Příklady 2:

Určete, které z následujících posloupností jsou (ryze) monotónní nebo (shora, zdola) omezené:

$$\{\sqrt{n}\}\,, \quad \{\sin(1/n)\,, \quad \{\sqrt[n]{2}\}\,, \quad \{(n-3)^2\}\,, \quad \{\frac{n!}{3^n}\}\,.$$

Které z nich jsou skoro monotónní a nejsou monotónní?

U rekurentně zadané posloupnosti $x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = (x_{n-2} + x_{n-1})/2$, ukažte, že podposloupnost členů s lichými indexy je rostoucí a podposloupnost členů se sudými indexy je klesající.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

Ověřte následující skutečnosti:

Posloupnost samých jedniček $\{1, 1, 1, ...\}$ má limitu rovnu 1.

Posloupnost střídajících se nul a jedniček $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ nemá limitu.

Posloupnost (klesající) $\{1/n\}$ má za limitu 0.

Posloupnost, kde se střídají 0 a $1/n$ (tj. $\{0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, ...\}$) má za limitu 0.

Posloupnost $\{1/2^n\}$ má za limitu 0.

Posloupnost $\{2^n\}$ má za limitu $+\infty$.

Posloupnost $\{a^n\}$ má za limitu 0 nebo 1 nebo $+\infty$ podle toho, zda je $|a| < 1, a = 1, a > 1$, resp. Je-li $a \le -1$, nemá posloupnost $\{a^n\}$ limitu.

Spočtěte omezenou „plochu" mezi parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = 1$ následujícím způsobem: Počítejte plochu pod parabolou nad intervalem $[0, 1]$ pomocí limity posloupnosti $\{s_n\}$, kde s_n je součet ploch obdélníčků s vrcholy $(i/n, 0), ((i+1)/n, 0), ((i+1)/n, (i/n)^2), (i/n, (i/n)^2)$, kde i probíhá $0, 1, ..., n-1$.

Ukažte, že každé reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel a limitou posloupnosti iracionálních čísel. Použijte model $\mathbb{R}$ vytvořený v kapitole o reálných číslech.

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

Najděte podle vlastnosti (4) pro dané ε nejmenší možné n_0 pro ověření $\lim 1/n = 0$.

Najděte posloupnosti $\{\inf_{n\ge k} x_n\}_k$ a $\{\sup_{n\ge k} x_n\}_k$ pro $x_n = 1/n$ nebo $x_n = n/(n+1)$.

Ověřte, že platí Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnost $\{1/n\}$ a že neplatí pro posloupnost $\{\sqrt{n}\}$.

Dokažte pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje, kde $\{x_n\}$ je zadána rekurentně:

$$x_1 = 2\,, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}\,.$$

Konec příkladů 4.

Příklady 5:

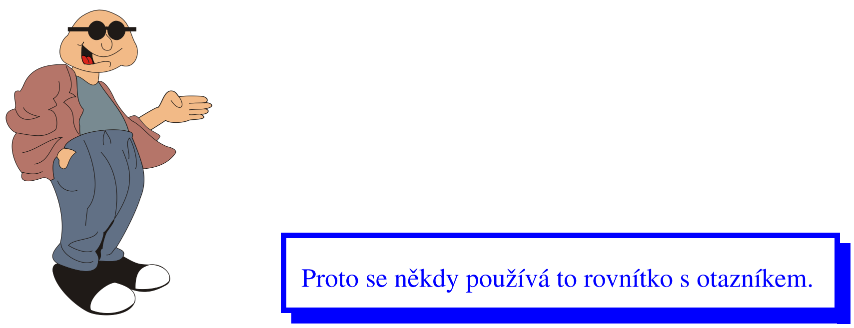
Použití věty o limitě součtu pro $\lim(n+\frac{1}{n})$:

- napíše se pravá strana $\lim n + \lim \frac{1}{n}$
- spočtou se limity na pravé straně $\lim n = \infty$, $\lim \frac{1}{n} = 0$
- ověří se smysl součtu $\infty + 0 = \infty$
- napíše se výsledek $\lim(n+\frac{1}{n}) = \infty$.

V praxi se postupuje rychleji: píšou se postupně (zatím formální, neověřené) rovnosti

$$\lim\left(n+\frac{1}{n}\right) = \lim n + \lim\frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty\,.$$

Protože poslední a předposlední rovnosti mají smysl, má smysl i rovnost první.



$$\lim\left(n+\frac{1}{n}\right) \overset{?}{=} \lim n + \lim\frac{1}{n} = \infty + 0 = \infty\,,\ ? = \text{ANO}$$

Limita polynomu. Nechť je posloupnost zadána hodnotami polynomu stupně aspoň 1 v bodech $n \in \mathbb{N}$, tj, $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $a_0, a_1, \ldots a_k$ jsou reálná čísla, $a_k \neq 0$. Ukažte, že $\lim x_n = \pm\infty$, kde znaménko výsledku je znaménko čísla a_k. Odtud vyplývá, že $\lim 1/x_n = 0$.

Limita podílu polynomů. Nechť dvě posloupnosti jsou zadány polynomy, $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ a $y_n = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0$, kde opět $k, l \in \mathbb{N}, a_k \neq 0, b_l \neq 0$.

Úkolem je spočítat $\lim \frac{x_n}{y_n}$. Při přímém použití věty o limitě podílu se na pravé straně dostane neurčitý výraz (podíl nekonečen). Je tedy nutné podíl $\frac{x_n}{y_n}$ nejdříve upravit, např. krácením zlomku výrazem x^m, kde $m = \min(k, l)$.

Ukažte, že potom lze použít větu o limitě podílu a výsledkem je

$$\lim\frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 0, & k < l; \\ \frac{a_k}{b_l}, & k = l; \\ \pm\infty, & k > l\,, \end{cases}$$

kde znaménko u ∞ je stejné jako znaménko $\frac{a_k}{b_l}$.

Limity s odmocninami. Limity, kde jsou ve výrazech rozdíly odmocnin vedoucích k neurčitým výrazům $\infty - \infty$, jako např. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, se často dají počítat rozšířením (jako zlomku) vhodnými výrazy, které rozdíly odmocnin postupně převedou na rozdíly polynomů. Např. uvedený výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ se chápe jako zlomek s jmenovatelem 1 a rozšíří se výrazem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$; dostane se zlomek

$$\frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\,,$$

na který již lze použít přímo větu o podílu.

Pro odmocniny vyšších řádů se použije vzorec $a^k - b^k = (a-b)(a^{k+1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.
Např.

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n}$$

se spočítá tak, že se zlomek rozšíří výrazem $\sqrt[3]{(n^2+n)^2} + \sqrt[3]{n^2+n}\,\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}$ a v čitateli se dostane $(n^2+n) - (n^2-1) = n+1$.

Dopočtěte příklad do konce.

Konec příkladů 5.

Příklady 6:

Vypočtěte pomocí druhého Důsledku $\lim \frac{\sin n}{n}$.

Pomocí prvního Důsledku lze spočítat $\lim n \sin(1/n) = 1$ [návod: z jednotkové kružnice použijte nerovnosti $\sin(1/n) < 1/n < \mathrm{tg}(1/n)$].

Posloupnost $\{\sqrt[n]{a}\}$ je pro $a > 1$ klesající a tedy konvergentní k číslu $c \geq 1$. Protože pro $c > 1$ je $\lim c^n = +\infty$, musí být $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.
Předchozí výsledek $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ platí i pro $0 < a < 1$ – stačí použít předchozí výsledek pro $1/a$.

Podobně lze dokázat $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ [pro důkaz monotónnosti je vhodné použít Bernoulliovu nerovnost].

Ukažte, že $\lim p^n/n! = 0$ pro každé $p \in \mathbb{R}$.

[Návod: Posloupnost $\{\frac{p^n}{n!}\}$ pro $p > 1$ je posloupnost nezáporných čísel, která jsou od nějakého indexu shora omezena posloupností $r(1/2)^{n-l}$, kde $r > 0, l \in \mathbb{N}$ a $l \geq 2p$.]

Výpočet limit posloupností zadaných rekurentně bývá obtížnější.

V jednodušších případech lze nejprve ukázat, že posloupnost má nějakou limitu a potom je možné zlimitovat rekurentní vzorec; získá se tak nějaký vztah pro limitu, z kterého se dá limita vypočítat.

Nechť $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n$. Pak $x_2 = 3, x_3 = 4.33, x_4 = 5.56$.
Je posloupnost $\{x_n\}$ rostoucí?
Vidíme, že

$$x_n \leq x_{n+1} = 1 + x_n + 1/x_n, \quad \text{je totéž co } \frac{1}{x_n} \geq -1\,,$$

což opravdu platí, protože se začíná s kladným číslem x_1, a proto všechna čísla x_n jsou kladná.
Existuje tedy $\lim x_n = A$ (podle věty o limitě monotónní posloupnosti.

Nyní se provede limita obou stran rekurentního vzorce:

$$\lim x_{n+1} = \lim \left(1 + x_n + \frac{1}{x_n}\right), \quad \text{tedy } A = 1 + A + \frac{1}{A}$$

(poslední výraz má vždy smysl, protože A nemůže být 0).

Tento vztah platí pro $A = \pm\infty$ nebo pro $A = -1$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ je tedy rovna buď $-\infty$ nebo -1 nebo $+\infty$. Protože čísla x_n jsou kladná, je $\lim x_n = +\infty$.

Pokud by např. $x_1 = -1/2$ (obecně $x_1 \in (-1, 0)$), bude posloupnost $\{x_n\}$ klesající a $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 < -1$ bude posloupnost $\{x\}$ rostoucí a opět $\lim x_n = -1$. Pro $x_1 = -1$ bude posloupnost $\{x_n\}$ konstantní.

Tento postup není jednoduchý, ale je zapotřebí. Je to prostě matematika. Uhodnout výsledek nestačí.

Já jsem to spočítal rychleji pomocí kalkulačky.

Nechť je posloupnost dána rekurentním vzorcem $x_{n+1} = 1/(x_n + 1)$ a $x_1 = 0$.

Potom je

$$x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.67, x_5 = 0.6, x_6 = 0.625, x_7 = 0.615\,, \cdots$$

a tedy posloupnost není monotónní.

Ale podposloupnost $\{x_{2n+1}\}$ je rostoucí a podposloupnost $\{x_{2n}\}$ je klesající (dokažte to) a obě podposloupnosti tedy mají vlastní limity $\lim x_{2n+1} = B, \lim x_{2n} = C$ (proč jsou limity vlastní?).

Protože $x_{n+2} = (1+x_n)/(2+x_n)$, musí B i C splňovat rovnici $x = (1+x)/(2+x)$, což znamená $x^2+x-1 = 0$, a tedy $B = C = (\sqrt{5} - 1)/2$, přibližně 0.618. (Proč nelze použít druhý kořen dané kvadratické rovnice?)

To se nám to pěkně motalo, co?

V praxi je rekurentně zadaná posloupnost buď rovnou monotónní, nebo je to poskládané ze dvou monotónních.

Ten, kdo neověřuje požadovanou a očekávanou monotónnost, případně jinak rád zlobí si zkusí rekurentní posloupnost $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -a_n$.

Destinný rozvoj reálného čísla

Pro dané reálné číslo r se označí r_0 největší celé číslo menší než r; pak $r - r_0 < 1 = 10/10$. Dále se označí r_1 největší z čísel $0, 1, ..., 9$, pro které je $r_0 + \frac{r_1}{10} < r$; pak $r - (r_0 + \frac{r_1}{10}) < 1/10 = 10/100$.

Indukcí je možné pokračovat dále a sestrojit posloupnost $\{r_n\}_{\mathbb{N}}$ obsahující čísla $0, 1, 2, ..., 9$ tak, že číslo

$$s_n = r_0 + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^3} + \cdots + \frac{r_n}{10^n}$$

je menší než r o méně než 10^{-n}.

Posloupnost $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ je neklesající.

Posloupnost $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ je vidět na kalkulačce "odleva".

Protože posloupnost $\{10^{-n}\}$ konverguje k 0, konverguje $\{s_n\}_{\mathbb{N}}$ k r.

Tato skutečnost se stručně zapisuje symbolem $r = r_0, r_1 r_2 r_3 r_4 ....$ a nazývá se desetinný rozvoj čísla r.

Každé číslo tedy má desetinný rozvoj (takto sestrojený je určen jednoznačně).

Jestliže se pro posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$ obsahující čísla $0, 1, 2, ..., 9$ definuje s_n předchozí rovností, je posloupnost $\{s_n\}$ neklesající a má tedy nějakou limitu (supremum) r.

Posloupnost $\{r_n\}$ ale nemusí být desetinný rozvoj definovaný v předchozím odstavci (např. číslo 1 má za desetinný rozvoj $1.0000...$ a posloupnost $\{r_n\}_0^\infty$, kde $r_0 = 0$ a $r_n = 9$ pro $n > 0$, má za příslušné číslo r také číslo 1.

Často se i tyto situace označují jako desetinné rozvoje.

Mnoho povyku pro nic ;-)

Jo, je to jedno. I když rovnost $1 = 0.999999\cdots$ mi dělá radost.

Eulerovo číslo e

Nyní bude spočtena velmi důležitá limita $\lim\limits_n (1 + 1/n)^n$.

Výraz v limitě se rozvine pomocí binomického rozvoje a upraví na tvar

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(1 - \frac{1}{n})\cdots(1 - \frac{n-1}{n})\,.$$

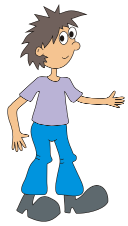
Z této úpravy lze zjistit dvě skutečnosti. Jednak, že daná posloupnost je rostoucí (jako činitelé se zde vyskytují členy $1 - k/n$, což v dalším členu posloupnosti dává $1 - k/(n+1)$, což je větší číslo; navíc výraz pro $n+1$ má ještě přidaný kladný poslední člen) a jednak, že je omezená seshora.

Poslední skutečnost možná vyžaduje vysvětlení: vynechají-li se ve výrazu na pravé straně všechny závorky, výraz se zvětší – protože $n! \geq 2^n$, dostává se

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3\,.$$

Takže $\lim\limits_n (1 + 1/n)^n$ existuje a rovná se kladnému číslu mezi 2 a 3. Dá se dokázat, že je to transcendentní číslo rovné 2,718... Nazývá se Eulerovo číslo a značí se e.

Po dobrém nebo po zlém to musí umět všichni.



Éééééé. To umím :-)

Konec příkladů 6.

Příklady 7:

Posloupnost $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ střídajících se nul a jedniček má dva hromadné body: 0 a 1.

Jaké má hromadné body posloupnost $\{\cos(\pi n/4)\}$?

Najděte prostou posloupnost s hromadnými body $\{-1, 0, 2\}$.

Najděte posloupnost $\{x_n\}$ s hromadnými body $\{1/k\}_{k\in\mathbb{N}}$.
Bude 0 také hromadným bodem $\{x_n\}$?

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost obsahující všechna racionální čísla jako členy (existuje taková posloupnost?).

Pak každé číslo z $\mathbb{R}^*$ je hromadný bod $\{x_n\}$.

Nalezněte $\liminf$ a $\limsup$ posloupností použitých v příkladech.

Konec příkladů 7.

Příklady 8:

Jaké hromadné body má interval $(0, 1)$?

Jaké hromadné body má množina racionálních bodů v intervalu $(0, 1)$?

Jaké hromadné body má množina iracionálních bodů v intervalu $(0, 1)$?

Najděte podmnožinu $(0, 1)$ mající jediný hromadný bod. Může být tato množina nespočetná?

Ukažte, že neexistuje množina A mající za hromadné body právě množinu $\{1/k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Konec příkladů 8.

OTÁZKY

Otázky 1:

Převeďte posloupnost $\{\sqrt{1-2n}\}_{n=-3}^{-\infty}$ do posloupnosti indexované přirozenými čísly.
U posloupností uvedených v předchozích *Příkladech* napište např. pátý člen.
Zkuste u uvedených rekurentně zadaných posloupností v předchozích *Příkladech* najít „nerekurentní" vyjádření x_n.

Znázorněte graficky (oběma způsoby) posloupnosti $\{1-2/n\}, \{\sqrt{n}\}, \{(1+(-1)^n)/2\}$.

Konec otázek 1.

Otázky 2:

Nechť P je některá z vlastností: (ryze) monotónní, prostá, konstantní, omezená. Ukažte, že každá podposloupnost posloupnosti s P má taky P.

Může mít posloupnost $\{x_n\}$, kde množina všech x_n je nekonečná, konstantní podposloupnost?

Je-li posloupnost skoro prostá, je množina hodnot této posloupnosti nekonečná. Platí opak?

Každá ryze monotónní posloupnost je prostá. Každá monotónní posloupnost je buď skoro konstantní nebo obsahuje ryze monotónní podposloupnost (se skoro stejnou množinou hodnot). Dokažte.

Ukažte, že skoro konstantní posloupnost má konečnou množinu hodnot. Platí opak?

Charakterizujte posloupnosti, které obsahují prostou podposloupnost.

Charakterizujte posloupnosti, které neobsahují konstantní podposloupnost.

Ukažte, že každá posloupnost obsahuje monotónní podposloupnost.

Ukažte, že každá prostá posloupnost obsahuje ryze monotónní podposloupnost.

Ukažte, že každá skoro neklesající posloupnost je zdola omezená. Uveďte příklad, že nemusí být omezená.

Posloupnost je konstantní právě když je neklesající a nerostoucí. Dokažte.

Ukažte, že posloupnost $\{x_n\}$ je omezená (nebo shora, zdola omezená) právě když existuje kladné číslo k tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|x_n| \leq k$ (resp. $x_n \leq k$, resp. $-x_n \leq k$).

Ukažte, že posloupnost je omezená (nebo shora, zdola omezená) právě když je skoro omezená (resp. skoro shora, zdola omezená).

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Dokažte následující tvrzení:

Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a, pak konverguje k a i každá posloupnost získaná z $\{x_n\}$ změnou, vynecháním nebo přidáním konečně mnoha členů.

Přehází-li se indexy u posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k a, konverguje i výsledná posloupnost k a.

Nechť $\{x_n\}$ konverguje k a. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď S_n neprázdná konečná podmnožina intervalu $[n, n+1)$ a $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Pak posloupnost $\{y_s\}_{s \in S}$, kde $y_s = x_n$ pro $s \in S_n$, konverguje k a.

(Posloupnost $\{y_s\}_{s \in S}$ vznikla z $\{x_n\}$ tak, že každý bod se konečněkrát opakuje.).

Je možné vzít i prázdné množiny S_n, ale ne všechny (kolik?).

Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a a $\{x_n\}$ není skoro konstantní, pak existuje prostá podposloupnost konvergující k a, která má stejnou množinu hodnot jako $\{x_n\}$.

Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a a $\{x_n\}$ není skoro konstantní, pak existuje ryze monotónní podposloupnost konvergující k a.

Lze vždy požadovat, aby tato podposloupnost měla stejnou množinu hodnot jako $\{x_n\}$?

Jestliže podposloupnosti $\{x_n\}_{n\in S}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus S}$ posloupnosti $\{x_n\}$ konvergují k a, pak $\{x_n\}$ konverguje k a. (Jinými slovy, jestliže spojíme dohromady konečně mnoho posloupností konvergující k a, pak i výsledná posloupnost konverguje k a.)

Ukažte na příkladě, že to neplatí pro spojení nekonečně mnoha posloupností.

Limita posloupnosti je $+\infty$ právě když žádná podposloupnost není shora omezená.

Jak je tomu pro limitu rovnou $-\infty$?

Konec otázek 3.

Otázky 4:

Ukažte, že pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ je posloupnost $\{\inf_{n\geq k} x_n\}_k$ neklesající a posloupnost $\{\sup_{n\geq k} x_n\}_k$ nerostoucí.

Uveďte příklad, že i pro prostou posloupnost $\{x_n\}$ nemusejí být posloupnosti $\{\inf_{n\geq k} x_n\}_k$ a $\{\sup_{n\geq k} x_n\}_k$ ryze monotónní. Kdy jsou ryze monotónní? Mohou být obě ryze monotónní?

Ukažte, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{n\geq k} x_n\big) \leq \inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{n\geq k} x_n\big)$.

Konec otázek 4.

Otázky 5:

Ukažte pomocí limity součinu, že pro $p\in\mathbb{R}$ je $\lim p\cdot x_n = p\cdot\lim x_n$, pokud má pravá strana smysl (tj. pokud existuje $\lim x_n$).

Ukažte pomocí limity součtu a předchozího tvrzení, že $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n$ jakmile má pravá strana smysl.

Dokažte matematickou indukcí, že pro libovolné přirozené číslo k a k posloupností $\{x_{1,n}\}, \{x_{2,n}\}, ..., \{x_{k,n}\}$ platí

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k} x_{i,n} = \sum_{i=1}^{k} \lim_n x_{i,n}\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Podobně pro konečný součin posloupností.

Dokažte větu o limitě součinu posloupností pomocí ε, n_0-charakterizace limity.

Najděte příklady posloupností $\{x_n\}, \{y_n\}$ tak, že $\lim x_n = 0, \lim y_n = 0$ a $\lim x_n/y_n$ je předem dané číslo z $\mathbb{R}^*$ nebo, že $\lim x_n/y_n$ neexistuje.

Najděte příklady posloupností $\{x_n\}, \{y_n\}$ tak, že $\lim x_n = 0, \lim y_n = +\infty$ a $\lim x_n \cdot y_n$ je předem dané číslo z $\mathbb{R}^*$ nebo, že $\lim x_n \cdot y_n$ neexistuje.

Uvědomte si, že tvrzení v *Otázkách 1* předchozí kapitoly o reálných číslech uvedené hned před částí *Reálné exponenty* říká, že $\lim_n a^{r_n} = 1$ pokud $\lim_n r_n = 0$.

Ukažte pomocí tohoto tvrzení, že $\lim_n a^{r_n} = a^{\lim r_n}$.

Těžší je dokázat pro $r \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n > 0$, že $\lim a_n^r = (\lim a_n)^r$.

Konec otázek 5.

Otázky 6:

Ukažte, že pro případ nevlastních limit lze první Důsledek zformulovat jednodušeji:

Jestliže $x_n \le y_n$ pro skoro všechna n a $\lim x_n = +\infty$, pak i $\lim y_n = +\infty$.

Jak vypadá formulace pro $-\infty$?

Platí obdoba druhého důsledku pro nevlastní limity? (Tj., jestliže $\{x_n\}$ je omezená a $\{y_n\}$ konverguje k $+\infty$, pak $\lim x_n y_n = +\infty$?)

Jestliže $\lim x_n = \sup\{x_n\}$, pak lze posloupnost $\{x_n\}$ přeházet tak, že vznikne neklesající posloupnost.

V druhé části první věty nelze použít ostré nerovnosti. Uveďte příklad posloupností $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ takové, že $x_n < y_n$ pro všechna n a $\lim x_n = \lim y_n$.

Ukažte, že jestliže $\lim x_n < p$, pak skoro všechny prvky posloupnosti $\{x_n\}$ jsou menší než p. Podobně pro obrácenou nerovnost.

Dokažte následující zobecnění věty o zachovávání nerovností limitami: *Nechť existují limity posloupností $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$. Jestliže pro skoro každé n je $x_n \le y_k$ pro nekonečně mnoho indexů k, je $\lim x_n \le \lim y_n$.*

Je-li tedy v předchozím tvrzení navíc požadavek, aby i skoro každé y_n nebylo větší než nekonečně mnoho x_k, pak $\lim x_n = \lim y_n$.

Konec otázek 6.

Otázky 7:

Uveďte příklad posloupnosti $\{x_n\}$, která nemá limitu v $\mathbb{R}^*$ a žádný hromadný bod v $\mathbb{R}$.

Uveďte příklad prosté posloupnosti $\{x_n\}$, která má přesně dva hromadné body (tj. $\liminf x_n$ a $\limsup x_n \neq \liminf x_n$).

Pro libovolnou konečnou množinu K v $\mathbb{R}$ najděte posloupnost mající za hromadné body právě body z K.

Říká se o mně, že jsem uzavřená. To však není jisté. Skutečnost je takováto:

*Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je a_n hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$. Pak každý hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$ je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, tj. množina hromadných bodů je uzavřená v $\mathbb{R}$ (Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá uzavřená , jestliže platí $(\{x_n\} \subset A, x_n \to a \Rightarrow a \in A)$.

Je uzavřený interval uzavřenou množinou?

Poznámka.

Platí i opak: Je-li F uzavřená množina v $\mathbb{R}$, pak existuje prostá posloupnost $\{x_n\}$ tak, že F je množina všech jejích hromadných bodů v $\mathbb{R}$.

To je vše. Byl to čajíček, příště přitvrdíme ...

Konec otázek 7.

Otázky 8:

Jak lze zeslabit v tvrzení (4) předchozího Pozorování předpoklad, že $\{x_n\}$ je prostá?

Pro libovolnou konečnou množinu K v $\mathbb{R}$ najděte množinu mající za hromadné body právě body z K.

Je-li $A \subset [a, b]$, pak každý hromadný bod množiny A leží v $[a, b]$.

Je-li $A \subset F$ a F je uzavřená množina, pak každý hromadný bod množiny A leží v F.

Ukažte, že množina hromadných bodů dané množiny je uzavřená.

Poznámka: Každá uzavřená množina v $\mathbb{R}$ je množinou hromadných bodů v $\mathbb{R}$ nějaké (spočetné) množiny.

Konec otázek 8.

CVIČENÍ

Cvičení 1:
Konec cvičení 1.

Cvičení 2:
Konec cvičení 2.

Cvičení 3:
Konec cvičení 3.

Cvičení 4:
Konec cvičení 4.

Cvičení 5:
Konec cvičení 5.

Cvičení 6:

Základní posloupnosti

Rozebereme si definici konvergence:

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo má za limitu bod a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje skoro všechny prvky posloupnosti.
Značí se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ nebo $x_n \to a$ pro $n \to \infty$.

Je třeba vidět i obrázek.

Pokud takové okolí má tvar $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, potřebujeme pro skoro všechny prvky posloupnosti odhad

$$|a - x_n| < \varepsilon\ .$$

Takový odhad je jednoduchý velmi zřídka.

Příklad. Platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Řešení. Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $n_\varepsilon = 1/\varepsilon$ a pro indexy větší než n_ε již platí odhad

$$|0 - x_n| < \varepsilon\ .$$

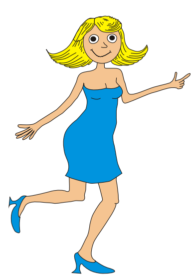
Takové a podobné limity si je třeba pamatovat k řešení příkladů „vyšší kvality".

Úspěšně vyřešilo 10 z 10.

Podobně lze spočítat příklady pro $x_n = 1/(n-1)$, $x_n = 1/(2n+1)$, $x_n = 1/\sqrt{n}$, $x_n = 1/n^3$, $x_n = 0$.

Je to samozřejmost.

Kdykoliv budeme potřebovat, lze konvergující posloupnosti sčítat, odčítat, násobit a dělit.



Jestli se takhle bude pracovat s tak krásnou větou jako je věta o algebře limit, tak se neznám.

Když počítáme limity, píšeme u rovnítka značku „V", aby bylo patrno, že se jedná o podmínečnou rovnost.

„Jestliže se nakonec dopočítáme, byla to rovnost."

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^3+1} \overset{V}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0+0 = 0\,.$$

Zde „V" znamenalo větu o limitě součtu.

Ještě častěji používáme odhad: větší posloupnost má větší limitu.

Nebo stejnou. Já se asi rozčílím.

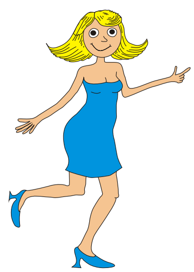
Příklad. Platí $\lim_{n\to\infty} \sin(n)/n = 0$

Jde o větu „mizející krát nulová".

Taky jde použít „policajty" $0 \leftarrow -1/n \le \sin(n)/n \le 1/n \to 0$, pro $n \to \infty$.

Jde limitit dva sčítance. Pro n členů to nedělejte.

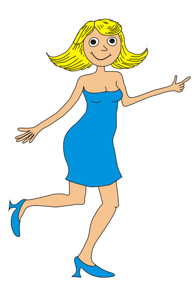
$$1 \;=\; \lim_{n\to\infty} 1 \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\,(0+0+\cdots+0) \;=0\,.$$



Kdo to udělá, ten si koleduje o moji pozornost.

Jde limitit dva činitele. Pro n členů to nedělejte.

$$2 \;=\; \lim_{n\to\infty} 2 \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{2}\right) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\,(1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1) \;=1\,.$$



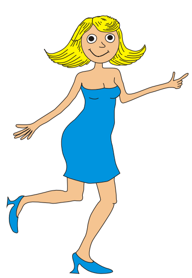
Kdo to udělá, budou se mu smát.

Jde limitit dva sčítance, které jsou zcela samostatné. Pro propojené členy to nedělejte.

$$2 = \lim_{n\to\infty} \left(0 + \sqrt[n]{2}\right)^n \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} (0+1)^n = 1\,.$$

Kdo to udělá, bude působit jemně komicky.

Používáme pouze dovolené operace podepřené nějakou větou.



Tak to mám ráda.

Základní škály posloupností

Některé posloupnosti jsou rychleji mizející než jiné.

Já si ty drobečky někdy prohlížím patřičně zvětšené. Místo $x_n \to 0$ koukám na $1/x_n \to \infty$.

Například místo drobečků $1/n$ máme chlapáky n.

Nyní se lehce přesvědčíme, která posloupnost rychleji „utíká" k nekonečnu.

Píšeme

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^n + \binom{n}{2}1^n + \cdots \ge \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,.$$

Tedy 2^n je časem mnohem větší než n, n^3, n^5 a určitě i než jiné polynomy.

Tedy

$$0 \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty\,.$$

Podobně se chovají posloupnosti q^n pokud $|q| < 1$. Samozřejmě je $1/q = 1 + c$ a zase mocniny převálcují polynom n.

Podobně se usvědčí $\sqrt[n]{a} \to 1$, popřípadě $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Opravdu, pokud $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$, pak po umocnění jde x_n k nule.

Další jednoduchá posloupnost s limitou k zapamatování (a dokázání) je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0\,.$$

Mocniny jsou pomalejší než faktoriál.

Také platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{5^n} = 0\,.$$

Polynomy jsou pomalejší než mocniny.

Superdůležitá limita je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Již jsme ji zkoumali. Položme nyní

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Pak pomocí indukce ukážeme

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < b_3 < b_2 < b_1\,.$$

Tím pádem (monotónní a omezené) posloupnosti $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mají limitu e (společnou, protože $b_n = a_n(1 + 1/n)$). Automaticky $2 < e < 3$.

Také následující posloupnost je užitečná (její odvození není snadné)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e\,.$$

Je to trošku pracné, ale hlavní je ten výsledek. Ještě se s ním setkáme.

Zkoumejme chování

$$x_n = n!$$

a srovnejme ji s ostatními rychle rostoucími posloupnosti.

Je to nejzáludnější posloupnost co znám.

Platí užitečný odhad

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

(První nerovnost se dokáže indukcí, druhá pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.)

Kdo chce lepší odhad, dostane

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n .$$

Tak se dostaneme k pěkným odhadům $\sqrt[n]{n!}$.

To je již však čisté čarování. Uááááá !!!

Rekurentní posloupnosti

Uvažujme posloupnost $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$
Jde o rekurentní posloupnost splňující

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\ .$$

Platí $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < 2$ (důkaz pozorováním vzorečku a indukcí).
Monotónní omezená posloupnost $\{x_n\}$ má konečnou limitu, označme ji A.
Zlimitíme rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

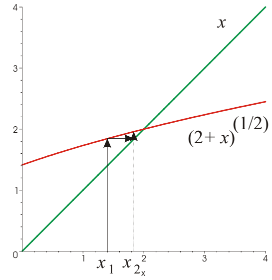
vyjádřený ve tvaru

$$(x_{n+1})^2 = 2 + x_n$$

a dostaneme po chvilce přemýšlení $A = 2$.

Vyřešil jeden z 10.

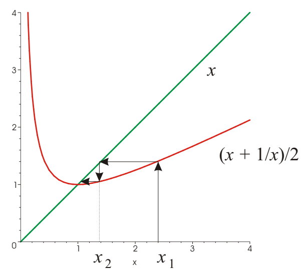
Jde o putování po grafu funkce $f(x) = \sqrt{2+x}$ systémem, při kterém zvolíme x_1, pak na grafu f zahneme doprava a na grafu identity zahneme dolů a najdeme x_2. Pak z x_2 postupujeme dále. Tak sestrojíme hledanou rekurentní posloupnost $\{x_n\}$.



Příklad. Zkoumejte rekurentní posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) .$$

Řešení. Jde o putování po grafu funkce $f(x) = (x + 1/x)/2$ systémem, při kterém zvolíme x_1, pak na grafu f zahneme doleva a na grafu identity zahneme dolů a najdeme x_2. Pak z x_2 postupujeme dále. Tak sestrojíme hledanou rekurentní posloupnost $\{x_n\}$.



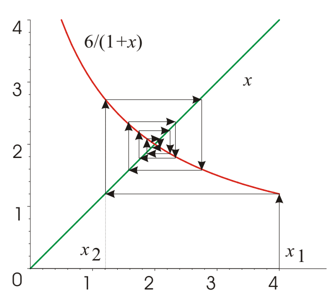
Limita bude jednička (jde o monotónní a omezenou posloupnost) a hodnota limity se zjistí zlimitěním rekurentního vztahu.

Pokud začneme vlevo od jedničky, posloupnost bude monotónní od indexu 2.

Máme hezké řešení.

Příklad. Posloupnost splňuje $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{6}{1+x_n}$. Zjistěte limitu.

Sestrojená posloupnost není monotónní, ale podposloupnost s lichými (i sudými) indexy je monotónní a omezená. Spočteme limity těchto monotónních posloupností a zjistíme, že původní posloupnost konverguje.



Příklad. Počasí bylo každý rok „průměrné" (průměr za poslední dva roky). Zjistěte, k jakému počasí to spěje.

Řešení. Označme $x_1 = A$, $x_2 = B$. Platí

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} .$$

Nabízí se konstantní řešení $y_n = 1$. To nevyhovuje svými prvními členy.
Další řešení se nabízí $z_n = (-1/2)^n$. To také nevyhovuje svými prvními členy.

Najdeme konstanty α a β takové, aby $x_n = \alpha y_n + \beta z_n$ bylo hledané počasí. Jde o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých α a β s parametry A a B

$$A = \alpha\, 1 + \beta\, \frac{-1}{2} \tag{1}$$

$$B = \alpha\, 1 + \beta\, \frac{1}{4} \tag{2}$$

(porovnáváme první dva členy posloupností).
Zjistíme α a β a spočítáme limitu x_n.
Spočítáme, že se počasí ustálí na $(A + 2B)/3$.

Nevyřešil nikdo.

Jak hledat dvě „nezávislá" řešení y_n a z_n v libovolné rekurentní situaci?

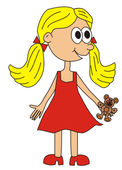
Použijeme metodu „hádání". Hledáme řešení ve vhodném tvaru. Funguje to pro určité typy příkladů (zde ano).

Hledáme posloupnost ve tvaru $y_n = c^n$ pro vhodnou konstantu c. Dostaneme v našem případě rovnici

$$c^{n+2} = \frac{c^n + c^{n+1}}{2}\,,$$

což po vydělení c^n vede na kvadratickou rovnici, která dává řešení $1, -1/2$.
Jednička vede na y_n, druhé řešení na z_n. Lineární kombinací těchto dvou „bázových" řešení dostaneme řešení pro libovolnou hodnotu počátečních podmínek A, B.

Řešení pomocí typování výsledku ve vhodném tvaru používali i velcí matematici.



Já jsu malá.

Příklad. Najděte obecný člen posloupnosti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Rekurentní vztah je

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \, .$$

Má překvapivé řešení.

Má překrásné řešení.

Obecné posloupnosti

Platí řada tvrzení pro obecné posloupnosti.

Příklad. Pro posloupnost kladných čísel x_n platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1/2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \, .$$

Řešení. Nechť pro všechna n platí $x_{n+1}/x_n < 3/4$. Pak $x_n < c(3/4)^n$ pro vhodnou konstantu.

Tedy geometrická posloupnost je větší. Konvergenci k nule máme díky policajtům. Místo $1/2$ lze vzít libovolné číslo $0 < q < 1$. Pro $q = 1$ to již nejde.

Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n \,.$$

Příklad. Pokud posloupnost kladných čísel x_n má limitu, pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \,.$$

Příklad. Pro posloupnost kladných čísel x_n platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \,,$$

existuje-li limita vpravo.

Důkazy jsou poněkud obtížnější.

Nejsem nejhloupější. Vzkazu rozumím.

Triky a kouzla

Přijměte na vlastní riziko pozvání do zakázané kommnaty kouzel a triků. Vstup je na vlastní nebezpečí. Prozrazené kouzlo sice funguje, ale již nikdy nepůjde objevit.

Pokud tedy opravdu chcete, podívejte se na ně. Doporučuji to udělat až v situaci, když si s řešením nevíte rady.

Rozložení zlomku na dva:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\;=\;1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Tomu postupnému příčítání a odečítaní stejných čísel říkám TELESKOP.

Teleskop se použije u součinů různých výrazů, například

$$1-\frac{1}{n^2}\;=\;\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\,,$$

$$1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\;=\;\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\,,$$

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}\;=\;\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)((n-1)^2+(n-1)+1)}\,.$$

Označme

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\,.$$

Pak

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} +\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \,.$$

Jde o křížence teleskopu a geometrické řady.

Známým trikem

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\,\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

jsme převedli rozdíl „skoro stejných" věcí na jedničku děleno součet „skoro stejných" věcí.

K poznání toho, které věci sjou skoro stejné si pamatujme následující „odhady".

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+1} &\sim n\,,\\
\sqrt{n^2+2n+1} &\sim n+1\,,\\
\sqrt{n^2+2n} &\sim n+1\,,\\
\sqrt{n^2+n} &\sim n+\frac{1}{2}\,,\\
\sqrt[3]{n^3+1} &\sim n\,,\\
\sqrt[3]{n^3+3n^2+3n+1} &\sim n+1\,,\\
\sqrt[3]{n^3+3n^2} &\sim n+1\,,\\
\sqrt[3]{n^3+n^2} &\sim n+\frac{1}{3}\,,\\
\sqrt[3]{n^3+n} &\sim n\,.
\end{aligned}$$

Ta vlnovka znamená to, že limita rozdílu levé a pravé strany jde k nule. Hle!

To lze účinně používat v příkladech

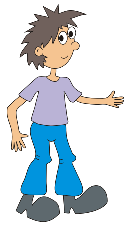
$$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} \;=\; \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right) + \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) \;=\; \ldots$$

Tak jsme našli společného známého pro dvě odmocninové „protivy". V každé závorce pak pracujeme známým způsobem.

Když máme součet dvou věcí, je jedna z nich zpravidla větší a jde tak jejím vytknutím převést součet na součin:

$$n^3 - n^2 \;=\; n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right) .$$

Závorku pošleme k jedničce, protože se jedná o součin.



Slyším a rozumím.

Konec cvičení 6.

Cvičení 7:
Konec cvičení 7.

Cvičení 8:
Konec cvičení 8.

UČENÍ

Učení 1:
Konec učení 1.

Učení 2:
Konec učení 2.

Učení 3:
Konec učení 3.

Učení 4:
Konec učení 4.

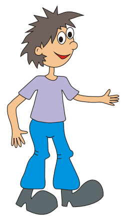
Učení 5:
Konec učení 5.

Učení 6:

Varování. Informace v sekci „učení" obsahují takové nesmysly, že se z nich lze poučit, ale nejde se z nich nic naučit.

Ale já to myslel dobře …

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3} \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}(1)^{n^3} = 1$$



Nic špatného jsem neudělal.

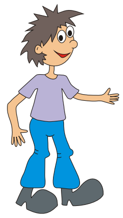
Máš pravdu, podepsal jsi svůj rozsudek.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n} \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = 1$$

Tak jsem to rozštípl.

$(a^b)^c = a^{bc}$ a ani o chlup míň či víc. T.j. raději neštípat.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\,\frac{2}{n-1}\,\frac{2}{n-2}\cdots \overset{?}{=} 0\cdot 0\cdot \cdots = 0$$



Stručně a jasně.

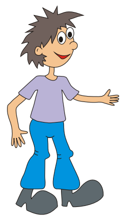
Moooooooooooooc stručně.

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{n^3}\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \cos^{n^3}(0) \; = \; 0$$

Limity mám rád.

Limity tě moc rády nemají.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} n(1-1) \; = \; 0$$



Je dobře znát sinus.

Je lépe umět analýzu.

Konec učení 6.

Učení 7:
Konec učení 7.

Učení 8:
Konec učení 8.