Posloupnosti a jejich konvergence

Pojem konvergence je velmi důležitý pro nediskrétní matematiku. Je nezbytný všude, kde je potřeba aproximovat nějaké hodnoty, řešit rovnice přibližně, používat derivace, integrály.

511

Těch daných hodnot musí být (teoreticky) nekonečně mnoho a nejjednodušší případ je samozřejmě pro spočetně mnoho takových hodnot – konvergence v tomto případě se pak nazývá konvergence posloupnosti.

511

POSLOUPNOSTI

Spočetné množiny se poznají tak, že se dají všechny její prvky přiřadit přirozeným číslům, každému číslu jeden prvek.

Protože se s přirozenými čísly dobře pracuje, je vhodné za posloupnosti brát rovnou prvky indexované těmito čísly, tj., pokud se pracuje např. v $\mathbb{R}$, každému přirozenému číslu n se přiřadí nějaké reálné číslo x_n.

DEFINICE. Posloupnost v množině X (nebo posloupnost prvků množiny X) je soubor $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prvků X indexovaný přirozenými čísly, tj. posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zobrazení $f : \mathbb{N} \to X$, kde $f(n) = x_n$.

Někdy se posloupnost značí jako $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{x_n\}_n$ nebo jen $\{x_n\}$ (např. $\{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, resp. $\{\sqrt{n}\}_{\mathbb{N}}$, nebo $\{\sqrt{n}\}$, je-li zřejmé, pro která čísla n se odmocniny berou); v některých případech (většinou konkrétních) se píše i $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ (např. posloupnost sudých přirozených čísel $\{2, 4, 6, 8, ...\}$). Není-li uvedeno přesné indexování, vždy se chápou indexy z $\mathbb{N}$.

DEFINICE. Podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde $\{k_n\}$ je nějaká posloupnost přirozených čísel s vlastností $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < ...$.

511

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel se nazývá

- konstantní, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k = x_n)$.
- prostá, jestliže $(k \neq n \Rightarrow x_k \neq x_n)$.
- omezená (resp. shora omezená nebo zdola omezená), jestliže množina všech bodů x_n má uvedenou vlastnost jako podmnožina $\mathbb{R}$.
- rostoucí (resp. klesající), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k < x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k > x_n)$).
- neklesající (resp. nerostoucí), jestliže $(k < n \Rightarrow x_k \leq x_n)$, (resp. $(k < n \Rightarrow x_k \geq x_n)$).

  Posloupnost, která je buď rostoucí nebo klesající nebo nerostoucí nebo neklesající, se nazývá monotónní.

  Posloupnost se nazývá ryze monotónní, jestliže je buď rostoucí nebo klesající.

Je-li P nějaká vlastnost posloupností, pak výrok posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má skoro P znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že posloupnost $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ má P.

511

Podobně budeme říkat, že množina obsahuje skoro všechny prvky posloupnosti, když obsahuje prvky posloupnosti od určitého indexu.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ

Jak bylo popsáno na začátku této části, hlavním důvodem práce s posloupnostmi je jejich použití např. k aproximaci řešení rovnic nebo k definicím či charakterizacím nových pojmů jako jsou spojitost a derivace.

K tomu je potřeba mít zaveden pojem konvergence posloupností.

Při grafickém znázornění některých posloupností v předchozích příkladech bylo vidět, že se příslušné body přibližují k nějaké hodnotě.

Např. u $\{1 - \frac{1}{n}\}$ se při znázornění na přímce přibližovaly body k číslu 1, při znázornění v rovině se graf přibližoval k přímce $y = 1$ – potom se říká, že posloupnost $\{1 - \frac{1}{n}\}$ konverguje k 1.

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje k bodu $a \in \mathbb{R}^*$ (nebo má za limitu bod a), jestliže každé okolí U bodu a obsahuje skoro všechny prvky posloupnosti.

Značí se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ nebo $x_n \to a$ pro $n \to \infty$.

Je-li zřejmé, že se jedná o limitu posloupnosti, je možné použít značení $\lim_n x_n = a$ nebo dokonce $\lim x_n = a$, jsou-li i indexy zřejmé.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Obecné vlastnosti limity posloupnosti

Následující tvrzení jsou snadná a budou se používat bez odkazu (snad jen pro první vlastnost rada: dva různé body z $\mathbb{R}^*$ mají disjunktní okolí).

POZOROVÁNÍ. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Platí:

1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;
2. je-li posloupnost $\{x_n\}$ konstantní, $x_n = a$, pak $\lim x_n = a$;
3. jestliže $\lim x_n = a$, pak $\lim x_{k_n} = a$ pro každou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$;
4. jestliže z každé podposloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k a, pak $\{x_n\}$ konverguje k a.
5. jestliže $\{x_n\}$ konverguje v $\mathbb{R}$, pak $\{x_n\}$ je omezená posloupnost.

Dvě další tvrzení jsou sice jednoduchá z hlediska důkazu, ale důležitá z hlediska uvědomění si různých možností přístupu ke konvergenci.

511

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel a bod $a \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní:

1. $\lim x_n = a$;
2. $\lim(x_n - a) = 0$;
3. $\lim |x_n - a| = 0$;
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$;
5. $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \big(\inf\limits_{n\geq k} x_n \big) = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \big(\sup\limits_{n\geq k} x_n \big) = a$.

DŮSLEDEK. $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0\,.$

POZNÁMKA. Je možné dodat obdobu vlastnosti (4) pro nevlastní body (dokažte):
$\lim x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) právě když

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ (n > n_0 \Rightarrow x_n > p) \quad (\text{resp. } x_n < p)\,.$$

Ekvivalence (1) a (5) předchozího tvrzení a ekvivalence (1) a (3) následujícího tvrzení) platí i pro nevlastní a.

VĚTA. Následující podmínky pro posloupnost $\{x_n\}$ reálných čísel jsou ekvivalentní:

1. $\{x_n\}$ konverguje v $\mathbb{R}$;
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$;
3. $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \big(\inf\limits_{n\geq k} x_n \big) = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \big(\sup\limits_{n\geq k} x_n \big) \in \mathbb{R}\,.$

Podmínka 2 ($\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n, k > n_0 \Rightarrow |x_n - x_k| < \varepsilon)$) se nazývá Bolzanova–Cauchyova podmínka a posloupnost splňující tuto podmínku se nazývá cauchyovská.

Bolzanova–Cauchyova podmínka bude často použita v situacích, kdy bude potřeba ukázat, že posloupnost (např. integrálů, funkcí) konverguje, aniž je možné nebo nutné zjistit její limitu.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Limita a aritmetické operace

Následující tvrzení ukazuje, že se limita posloupností chová přirozeně k aritmetickým operacím reálných čísel.

Součet, součin a podíl posloupností se definuje po indexech, tj., např. pro součet, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.

VĚTA. Nechť $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak platí

1. $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$, pokud má pravá strana smysl;
3. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$, pokud má pravá strana smysl;

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Limita a uspořádání

Tato část ukazuje chování konvergence posloupností k uspořádání na reálných číslech a existenci limity monotónních posloupností.

VĚTA. Nechť $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

1. Jestliže $\lim x_n < \lim y_n$, potom je $x_n < y_n$ pro skoro všechna n.
2. Jestliže $x_n \le y_n$ pro skoro všechna n, potom $\lim x_n \le \lim y_n$ pokud obě limity existují.

DŮSLEDEK. Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost a $\{y_n\}$ konverguje k 0. Potom $\lim x_n y_n = 0$

DŮSLEDEK. Nechť $\{x_n\}, \{a_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $x_n \le a_n \le y_n$ pro skoro všechna n. Jestliže existují $\lim x_n, \lim y_n$ a rovnají se, pak existuje i $\lim a_n$ a rovná se předchozím limitám.

VĚTA. Nechť $\{x_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel.

1. Je-li $\{x_n\}$ neklesající, pak $\lim x_n = \sup x_n$.
2. Je-li $\{x_n\}$ nerostoucí, pak $\lim x_n = \inf x_n$.

DŮSLEDEK. Monotónní posloupnost má vždy limitu. Omezená monotónní posloupnost vždy konverguje v $\mathbb{R}$.

Poznámky 6   Příklady 6   Otázky 6   66

HROMADNÝ BOD

Posloupnost $\{x_n\}$ nemusí konvergovat, ale některé její podposloupnosti konvergovat mohou.

Jejich limity (nazývané hromadné body) mohou někdy nahrazovat neexistující limitu celé posloupnosti.

Protože každá nekonečná množina obsahuje prosté posloupnosti, lze definovat hromadné body množiny (i nespočetné) jako hromadné body těchto posloupností.

Jsou to body, které jsou k dané množině velmi blízko.

Hromadný bod posloupnosti

Okolí limity musí obsahovat skoro všechny členy posloupnosti. U hromadného bodu je podmínka zeslabena na nekonečně mnoho členů posloupnosti.

DEFINICE. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ se nazývá hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže každé okolí U bodu a obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$ (tj., existuje nekonečná podmnožina $S \subset \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in U$ pro $s \in S$).

VĚTA.

1. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$, právě když existuje její podposloupnost $\{x_{k_n}\}$, která konverguje k bodu a.
2. Hodnota $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \big(\inf\limits_{n\ge k} x_n\big) (= \lim\limits_{k} \big(\inf\limits_{n\ge k} x_n\big))$ je nejmenším hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (značí se $\liminf x_n$ nebo $\underline{\lim}\, x_n$ a čte se limes inferior).
3. Hodnota $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \big(\sup\limits_{n\ge k} x_n\big) (= \lim\limits_{k} \big(\sup\limits_{n\ge k} x_n\big))$ je největším hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (značí se $\limsup\, x_n$ nebo $\overline{\lim}\, x_n$ a čte se limes superior).

DŮSLEDEK.

1. Každá posloupnost má hromadný bod.
2. Posloupnost má limitu právě když má jediný hromadný bod.

Následují dvě důležitá tvrzení.

To první je jednoduchým důsledkem předchozího důsledku (1) a tvrzení (1) předchozí věty pro omezené posloupnosti, ale vzhledem k jeho významu je uvedeno znovu.

Důkaz druhého tvrzení je složitější a ukazuje princip používaný často pro důkaz existence.

VĚTA.

1. **(Bolzanova–Weierstrassova věta)** Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergující v $\mathbb{R}$.
2. **(Cantorova věta)** Je-li K_n klesající posloupnost uzavřených omezených intervalů na $\mathbb{R}$, pak $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

   Jestliže navíc délky intervalů K_n konvergují k 0, je $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n$ jednobodový.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

Hromadný bod množiny

Jednoduchou modifikací hromadného bodu posloupnosti se dostane hromadný bod množiny:

DEFINICE. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ se nazývá hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže každé okolí bodu a obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny A.

Prvek $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A se nazývá izolovaný bod množiny A.

POZOROVÁNÍ.

1. Prvek a z $\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když každé okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A různý od a.
2. Bod $+\infty$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě když A není shora omezená. Podobně pro $-\infty$.
3. Konečná množina nemá žádný hromadný bod.
4. Bod je hromadným bodem skoro prosté posloupnosti právě když je hromadným bodem množiny hodnot této posloupnosti.
5. Je-li a hromadným bodem množiny A a $B \supset A$, je a hromadným bodem i množiny B.
6. $a \in A$ je izolovaným bodem A právě když existuje okolí U bodu a takové, že $U \cap A = \{a\}$.

Předchozí vlastnost (4) ukázala vztah hromadných bodů posloupností k hromadným bodům odpovídajících spočetných množin.

511

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$:

1. a je hromadný bod množiny A;
2. existuje posloupnost v $A \setminus \{a\}$ konvergující k a;
3. existuje prostá posloupnost v A konvergující k a;
4. existuje ryze monotónní posloupnost v A konvergující k a.

DŮSLEDEK. Každá nekonečná podmnožina v $\mathbb{R}$ má hromadný bod a každá omezená nekonečná podmnožina v $\mathbb{R}$ má vlastní hromadný bod.

Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8