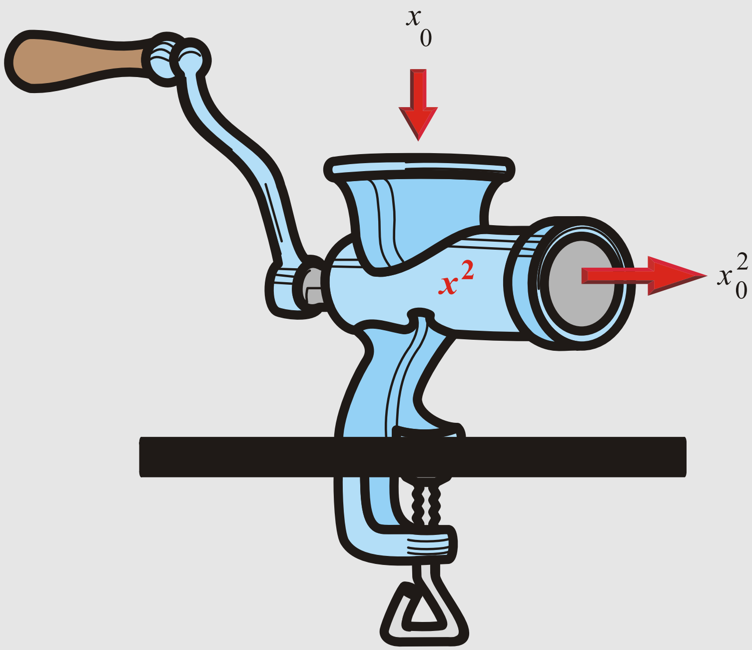
Funkce a základní pojmy popisující jejich chování

Pro zobrazení z reálných čísel do reálných čísel se používá termín reálná funkce reálné proměnné.

511

Funkce f bude v této části znamenat zobrazení nějaké neprázdné podmnožiny $D \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. předpis, který přiřazuje každému $x \in D$ přesně jedno reálné číslo $f(x)$.



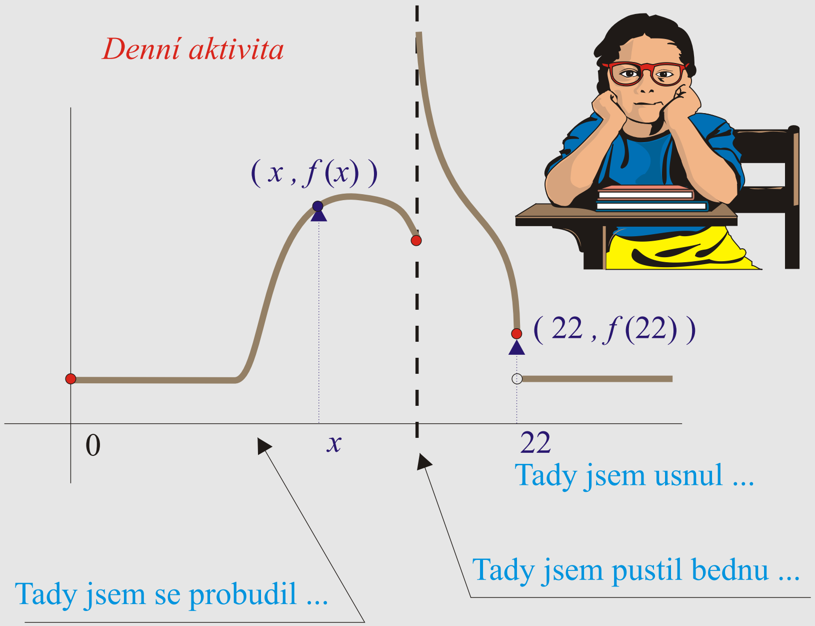
Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Množina D z definice funkce se nazývá definiční obor dané funkce (značí se $\mathcal{D}(f)$), čísla z D jsou (nezávisle) proměnné, příslušná přiřazená čísla jsou hodnoty (též nazývané závisle proměnné).

Množina všech hodnot dané funkce se nazývá její obor hodnot.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

DEFINICE. Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$ s definičním oborem D. Množina všech bodů v rovinném (x,y)–souřadnicovém systému, které mají souřadnice $(x, f(x))$, kde $x \in D$, se nazývá grafem funkce f.



Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

VLASTNOSTI FUNKCÍ

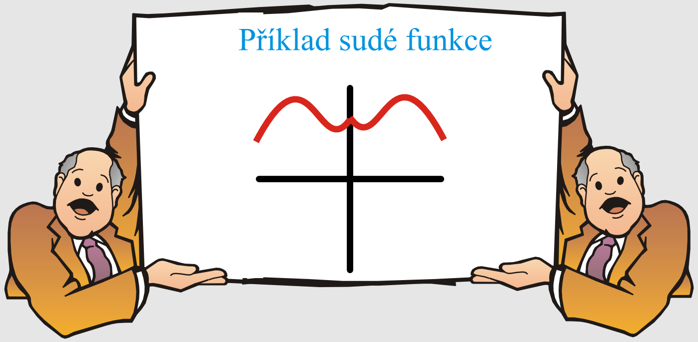
V této části budou zavedeny některé vlastnosti funkcí, které se hodí pro vyšetřování jejich průběhu. Vlastnosti jsou rozděleny podle použitých vlastností reálných čísel (aritmetické, uspořádání).

Použití aritmetických vlastností

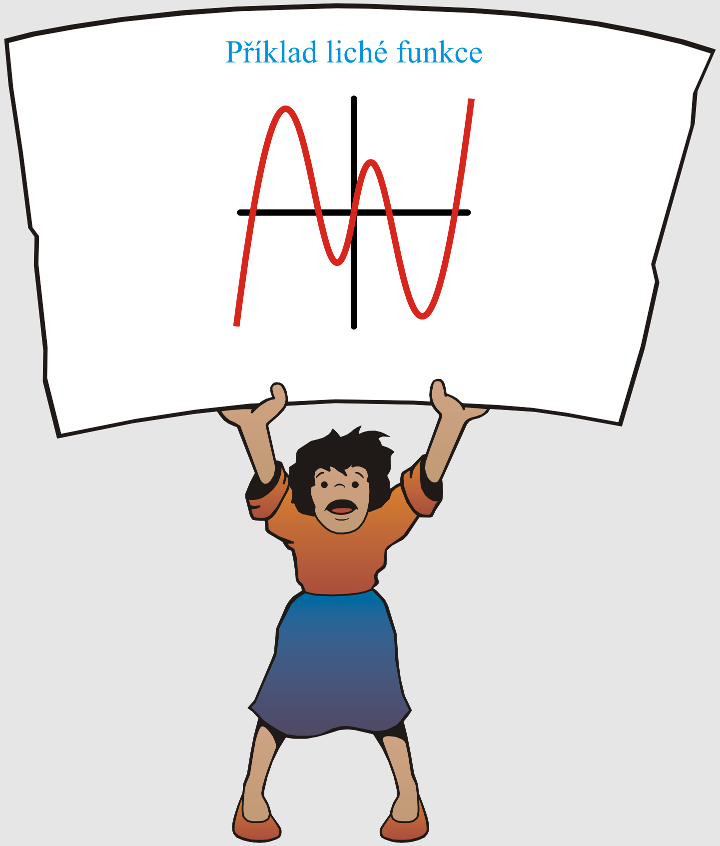
V tomto případě se využívá aritmetických vlastností $\mathbb{R}$ (opačného prvku $-x$ k x a operace sčítání).

DEFINICE. Funkce f se nazývá sudá (nebo lichá), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $x \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-x \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-x) = f(x)$ (nebo $f(-x) = -f(x)$, resp.) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

511


Příklad sudé funkce


A zrovinka lichý počet ...



511

DEFINICE. Funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ se nazývá periodická, jestliže existuje $p \in (0, +\infty)$ (nazývané perioda) tak, že $f(x+p) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

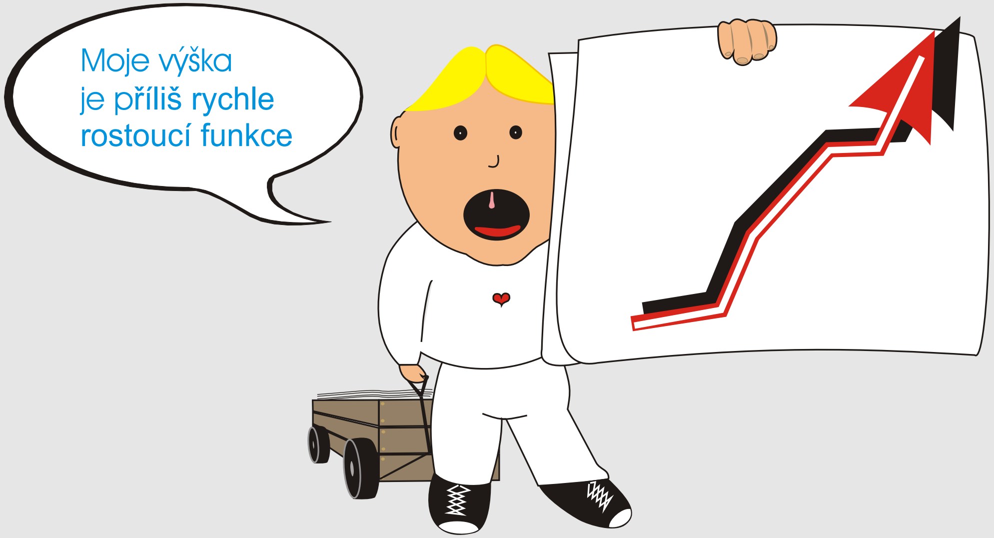
Graf periodické funkce f s periodou p na intervalu $[np, (n+1)p], n \in \mathbb{Z}$, vznikne posunutím grafu f na intervalu $[0, p]$ o np na ose x.

Při vyšetřování sudých, lichých nebo periodických funkcí není nutné vyšetřovat celý definiční obor, stačí se omezit na nezáporná čísla a u periodických funkcí s kladnou periodou p jen na interval $[0, p]$.

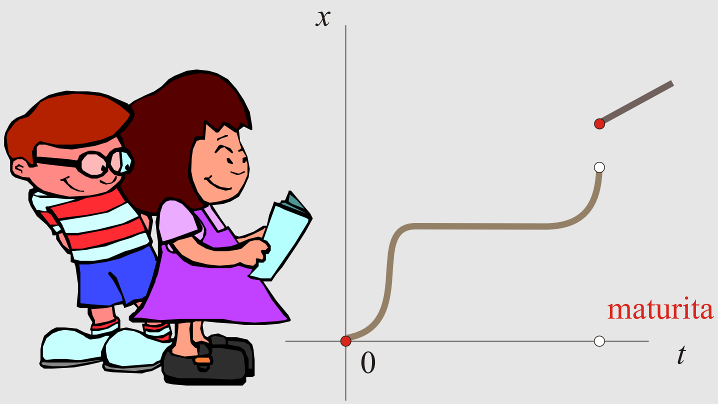
Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Použití uspořádání na $\mathbb{R}$

DEFINICE. Funkce f definovaná na intervalu I se nazývá rostoucí (nebo klesající, nebo neklesající, nebo nerostoucí), jestliže $f(x) < f(y)$ (nebo $f(x) > f(y)$, nebo $f(x) \leq f(y)$, nebo $f(x) \geq f(y)$, resp.) jakmile $x, y \in \mathcal{D}(f)$, $x < y$.

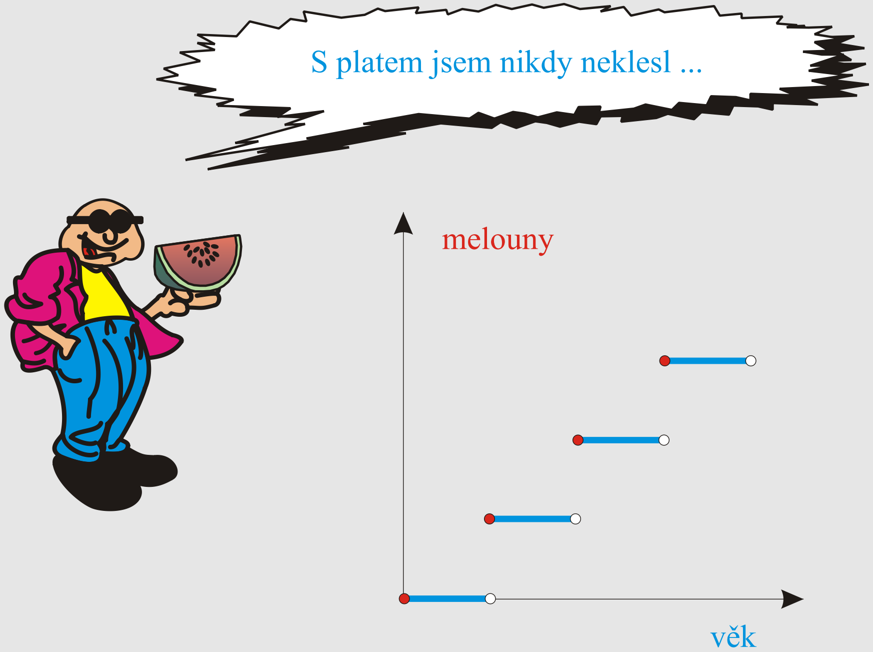


DEFINICE. Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá ryze monotónní; funkce, která je neklesající nebo nerostoucí, se nazývá monotónní.



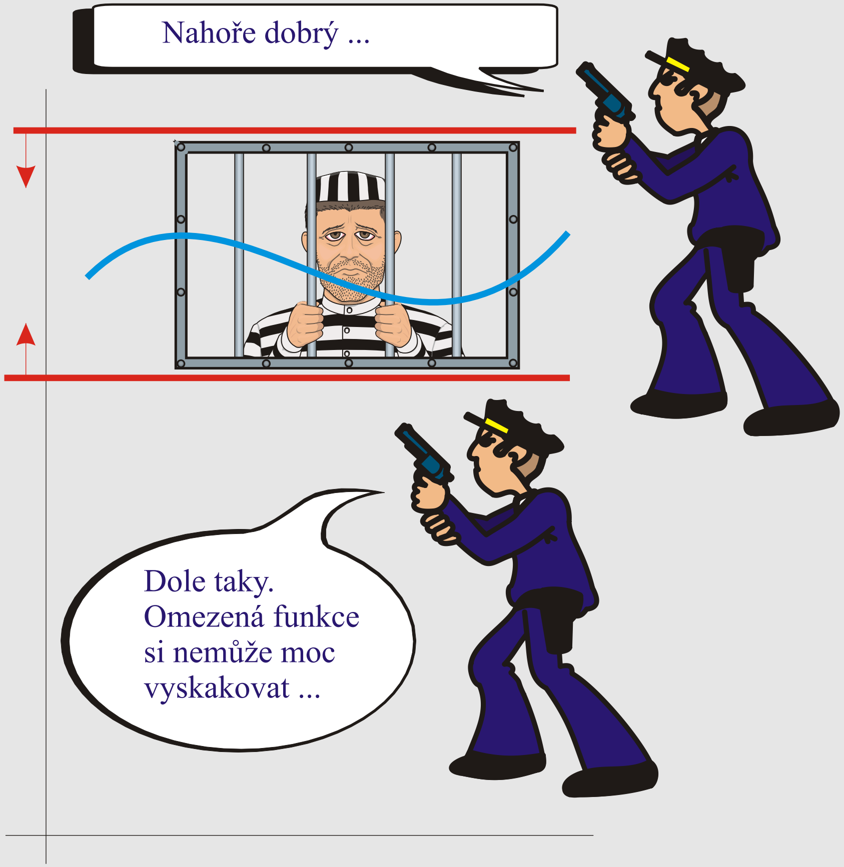
t čas

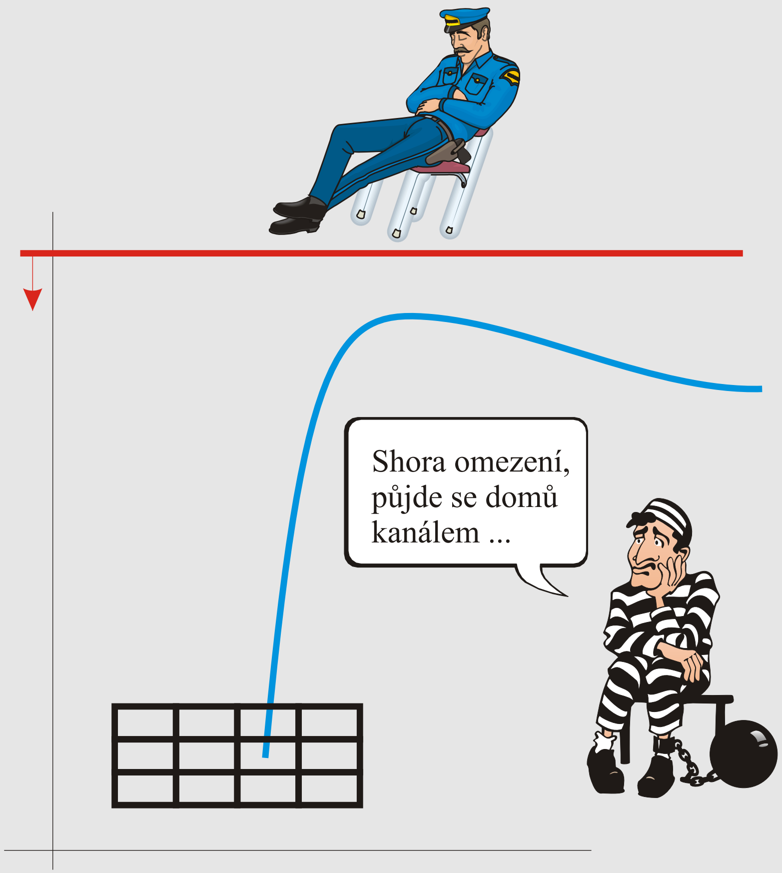
x společenská prestiž



DEFINICE. Říkáme, že funkce f je omezená (nebo shora omezená, nebo zdola omezená), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(x)| \le k$ (nebo $f(x) \le k$, nebo $f(x) \ge k$, resp.) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
sudá,lichá funkce
periodická funkce
monotónní funkce
omezená funkce
konvexní funkce
konkávní funkce
konstrukce funkcí
aritm.operace
racionální funkce
uspořádání funkcí
kladná část funkce
složení
inverzní funkce
jiná zadání
implicitní zadání
parametrické zadání
polární zadání
kruh
kardioida
lemniskata
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9


Nahoře dobrý ...
Dole taky. Omezená funkce si nemůže moc vyskakovat ...



511

POZOROVÁNÍ.

1. Funkce f je rostoucí (nebo neklesající) právě když je funkce $-f$ klesající (resp. nerostoucí).
2. Posunutím grafu monotónní funkce získáme opět graf monotónní funkce (stejného druhu).

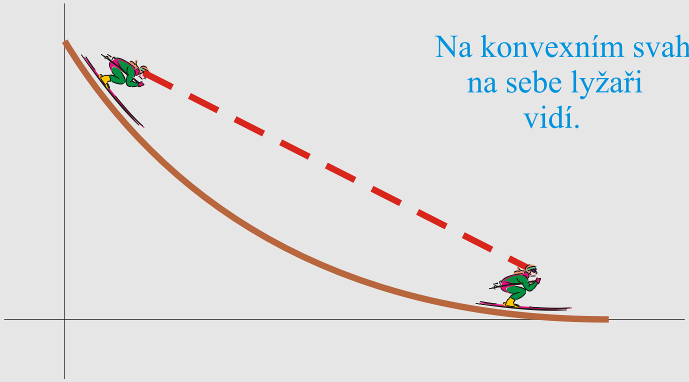
Konvexita

DEFINICE. Funkce f definovaná na intervalu J se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in J$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí vztah

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

Platí-li v uvedeném vztahu vždy ostrá nerovnost, nazývá se f ryze konvexní.

Obrátíme-li v uvedeném vztahu nerovnost, dostáváme funkci (ryze) konkávní.

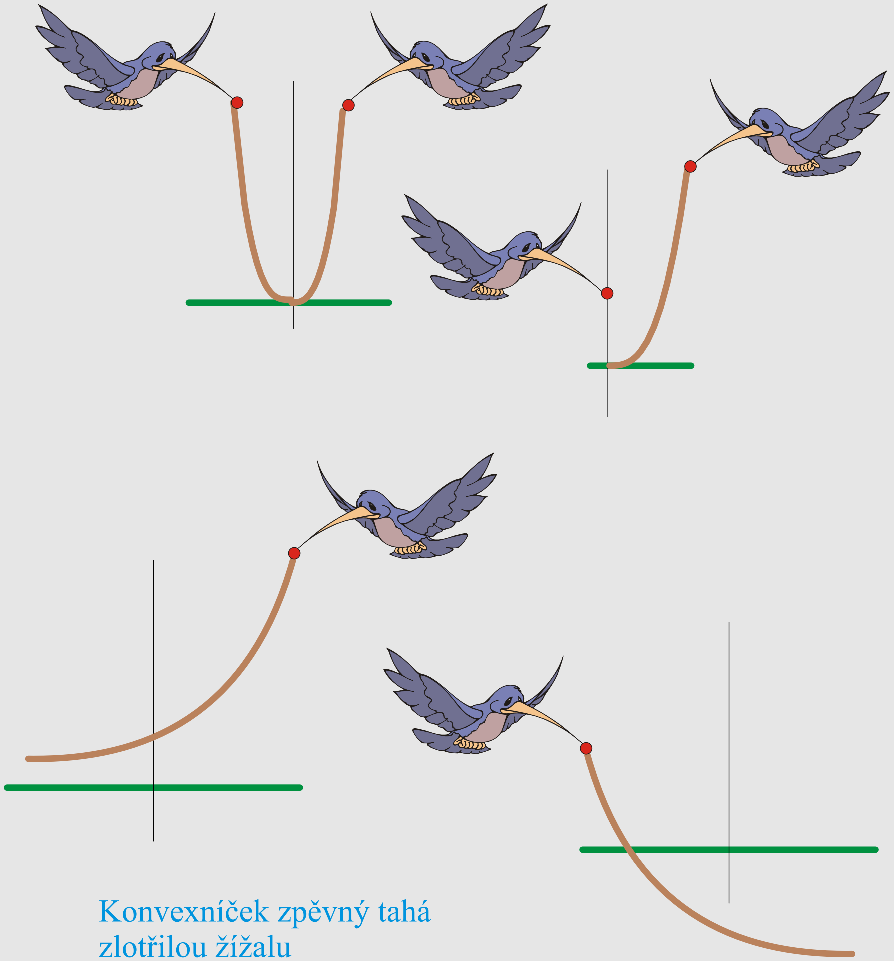


LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
- sudá,lichá funkce
- periodická funkce
- monotónní funkce
- omezená funkce
- konvexní funkce
- konkávní funkce

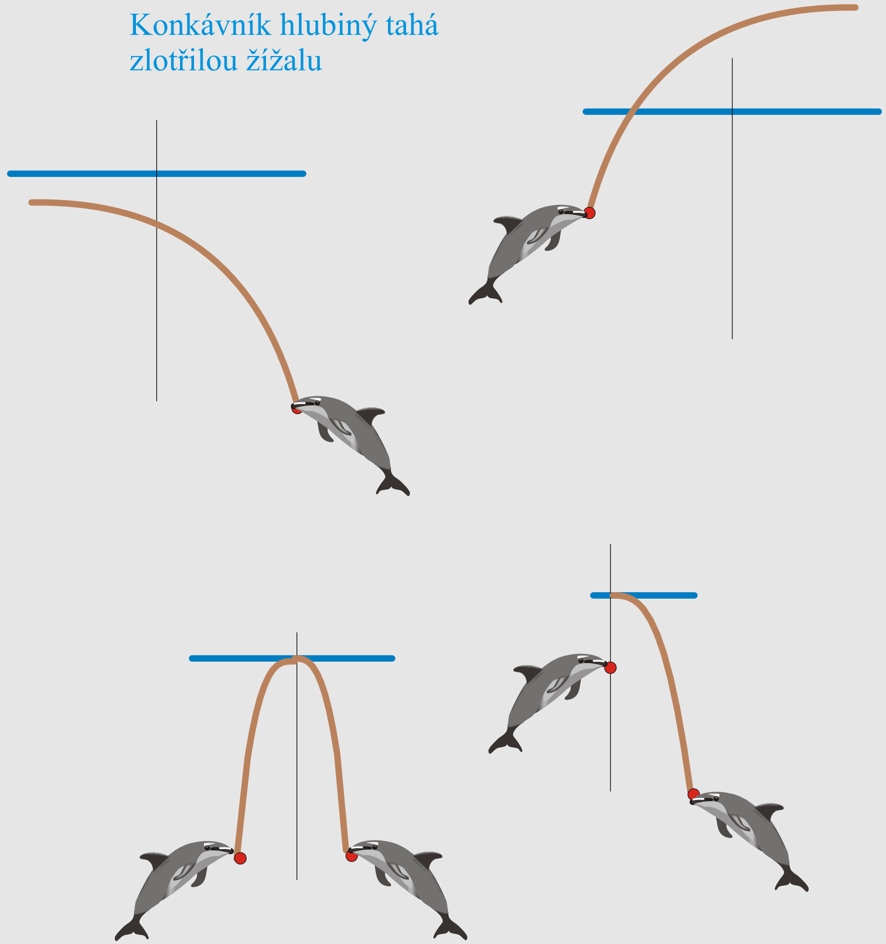
konstrukce funkcí
- aritm.operace
- racionální funkce
- uspořádání funkcí
- kladná část funkce
- složení
- inverzní funkce

jiná zadání
- implicitní zadání
- parametrické zadání
- polární zadání
- kruh
- kardioida
- lemniskata

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

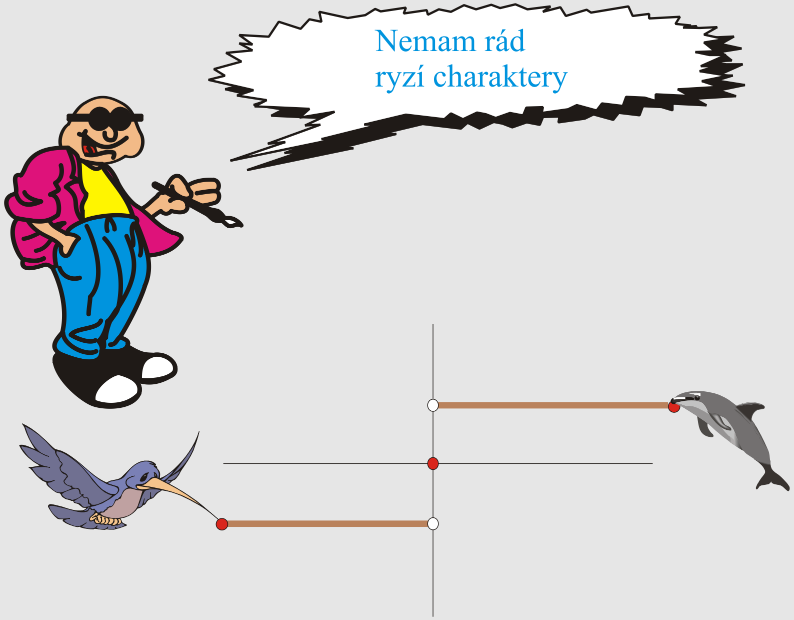


Konvexníček zpěvný tahá
zlotřilou žížalu



Nerovnost v definici konvexity funkce znamená, že úsečka spojující dva body grafu leží celá nad grafem nebo na grafu (leží-li celá, kromě koncových bodů, nad grafem, je to ryzí konvexita):

LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
sudá,lichá funkce
periodická funkce
monotónní funkce
omezená funkce
konvexní funkce
konkávní funkce
konstrukce funkcí
aritm.operace
racionální funkce
uspořádání funkcí
kladná část funkce
složení
inverzní funkce
jiná zadání
implicitní zadání
parametrické zadání
polární zadání
kruh
kardioida
lemniskata
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



POZOROVÁNÍ.

1. Funkce f je (ryze) konvexní právě když $-f$ je (ryze) konkávní.
2. Posunutí (ryze) konvexní funkce je (ryze) konvexní funkce.
3. Funkce f je na intervalu I konvexní právě když pro libovolné tři body $u < v < w$ z intervalu I platí

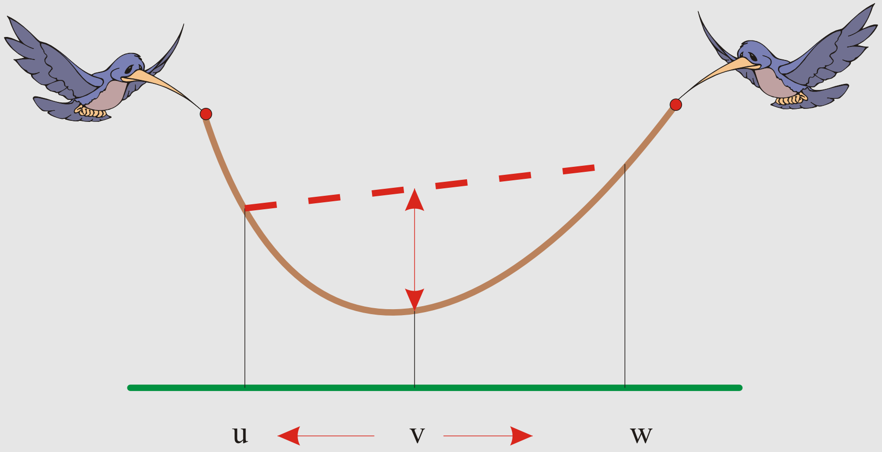
$$f(v)(w-u) \leq f(w)(v-u) + f(u)(w-v)$$

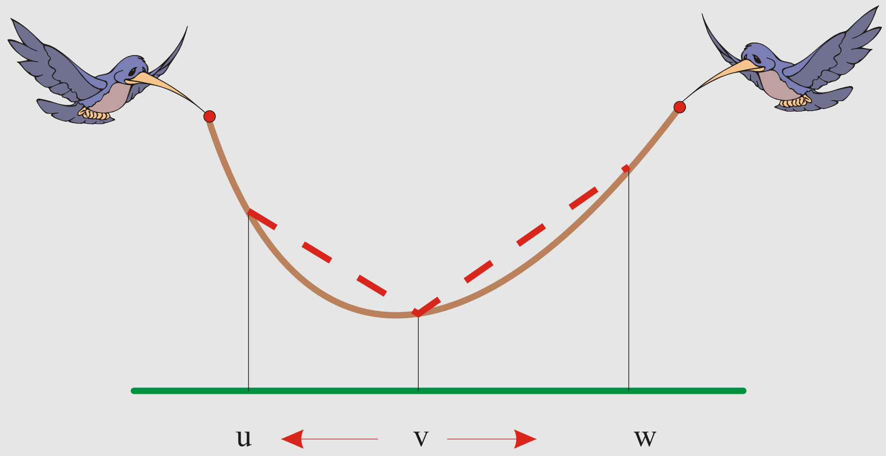
neboli

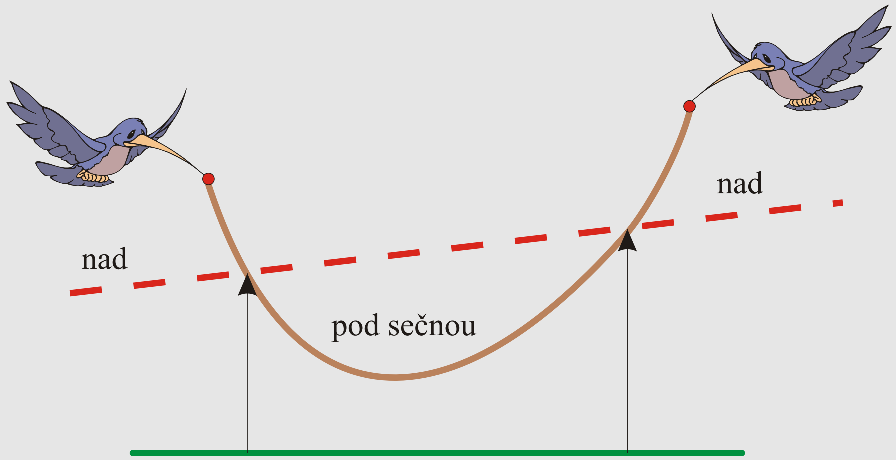
$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}\,.$$

LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
sudá,lichá funkce
periodická funkce
monotónní funkce
omezená funkce
konvexní funkce
konkávní funkce
konstrukce funkcí
aritm.operace
racionální funkce
uspořádání funkcí
kladná část funkce
složení
inverzní funkce
jiná zadání
implicitní zadání
parametrické zadání
polární zadání
kruh
kardioida
lemniskata
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chování konvexních funkcí ilustrují obrázky:




u
v
w


nad
nad
pod sečnou


Konvexní funkce je nad, pod a nad sečnou

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

VYTVÁŘENÍ NOVÝCH FUNKCÍ

Ze známých funkcí lze pomocí různých operací vytvořit další funkce.

Zajímavá je otázka, které ze zavedených vlastnosti se přenášejí z generující funkce na nově vzniklé funkce.

V následujících třech částech je definováno vytváření nových funkcí pomocí aritmetických operací a uspořádání na reálných číslech a pomocí skládání a inverzní operace.

Později budou přidány další operace (např. umocňování funkcemi, derivace, integrace).

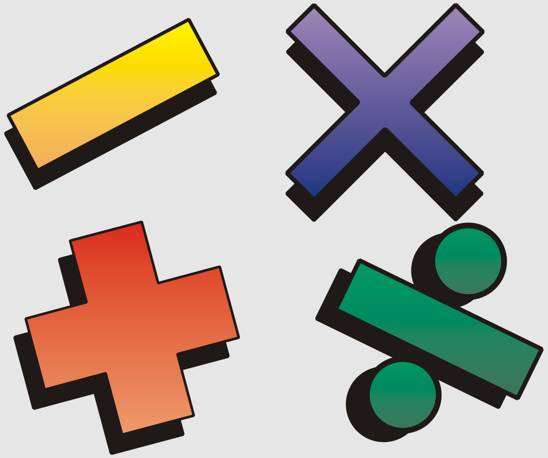
Skládání a tvoření inverze je vlastnost obecných zobrazení.

Pro aritmetické operace se zobrazeními je potřeba, aby v jejich oboru hodnot byly tyto aritmetické operace definovány.

Podobně pro operace pomocí uspořádání musí na oboru hodnot uspořádání existovat.

Použití aritmetických operací $\mathbb{R}$

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce, budou značit $f+g$, $f\cdot g$, f/g funkce, které mají za hodnotu v bodě x postupně $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$.



Ve výrazu $k\cdot f$ můžeme číslo k chápat jako konstantní funkci na $\mathbb{R}$ s hodnotou k a potom je funkce $k\cdot f$ speciálním případem násobení funkcí, tj. $(k\cdot f)(x) = kf(x)$.

Stejně tak je rozdíl funkcí $f-g$ speciálním případem součtu funkcí f a $-g=(-1)\cdot g$.

Polynom je funkce tvaru

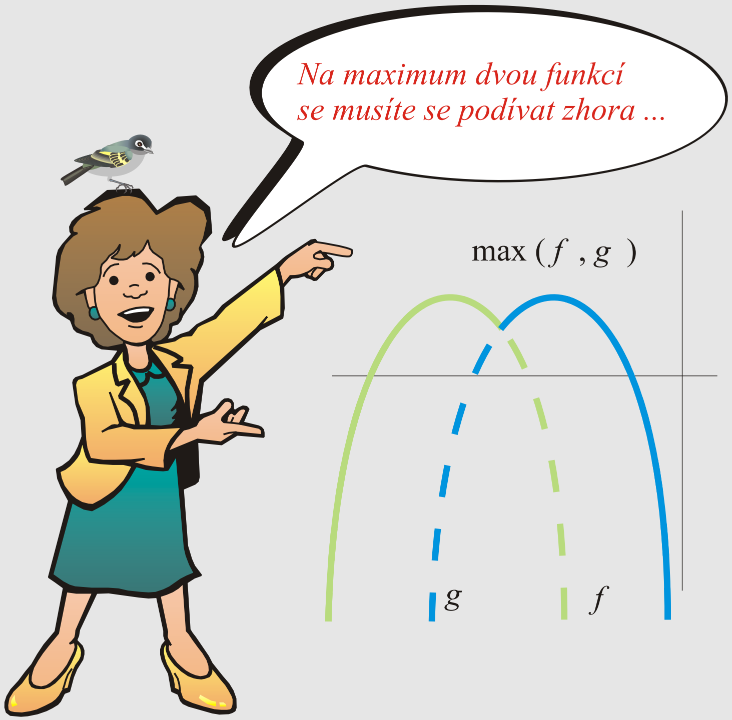
$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

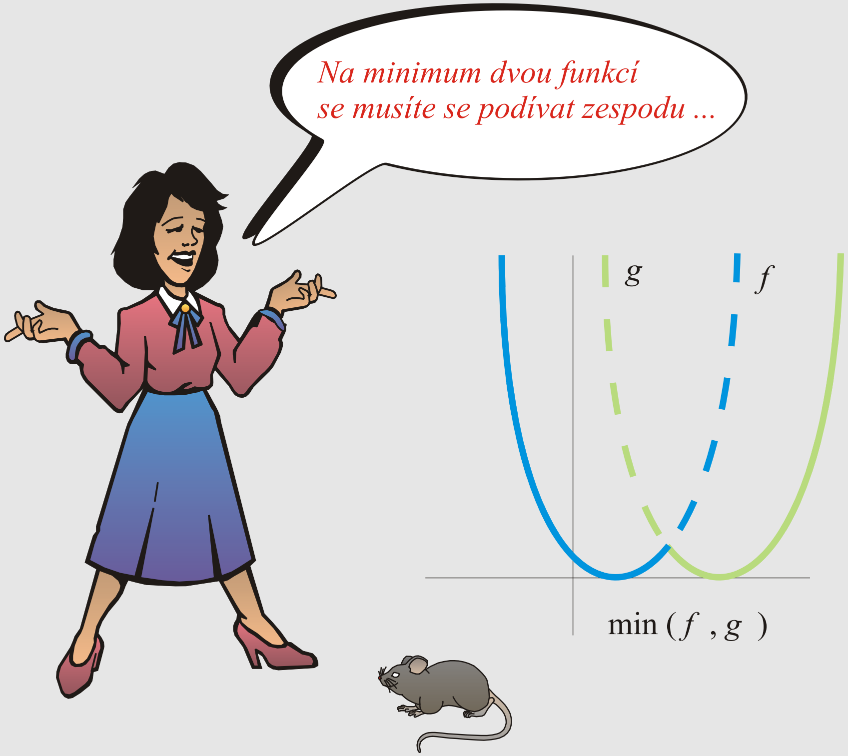
kde $n\in\mathbb{N}$ a koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla (jestliže $a_n\neq 0$, nazývá se n stupeň polynomu).

Podíl dvou polynomů se nazývá racionální funkce.

Použití uspořádání $\mathbb{R}$

DEFINICE. Pro funkce f, g se definuje $\max\{f, g\}$ (nebo $\min\{f, g\}$) jako funkce, která má v bodě x hodnotu $\max\{f(x), g(x)\}$ (resp. $\min\{f(x), g(x)\}$).





511

Pro funkci f se definují funkce $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = -\min\{f, 0\}$, tzv. kladná nebo záporná část funkce f.

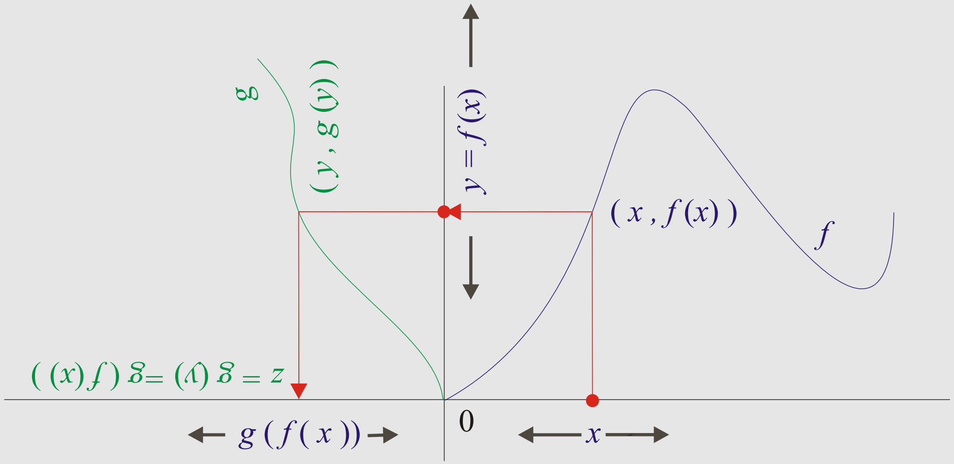
Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

Skládání funkcí

Skládání funkcí je velmi důležité a s jeho použitím lze sestrojit mnoho důležitých složitějších funkcí pomocí jednoduchých funkcí.

DEFINICE. Složení $f \circ g$ dvou funkcí f, g se definuje jako funkce, která má v bodě x hodnotu $f(g(x))$.

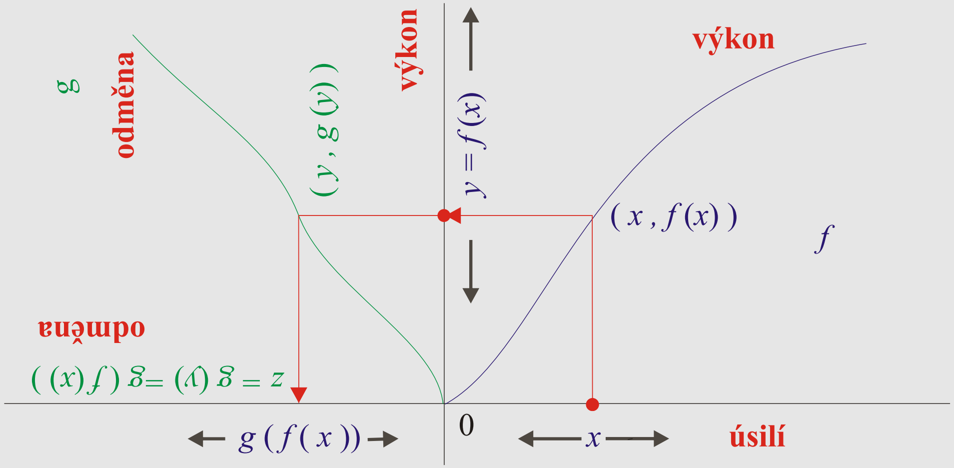
Funkce g se pak někdy nazývá vnitřní funkcí a f vnější funkcí. Např. $|f|$ (absolutní hodnota funkce f) je složení funkce f (vnitřní funkce) a funkce absolutní hodnota (vnější funkce).



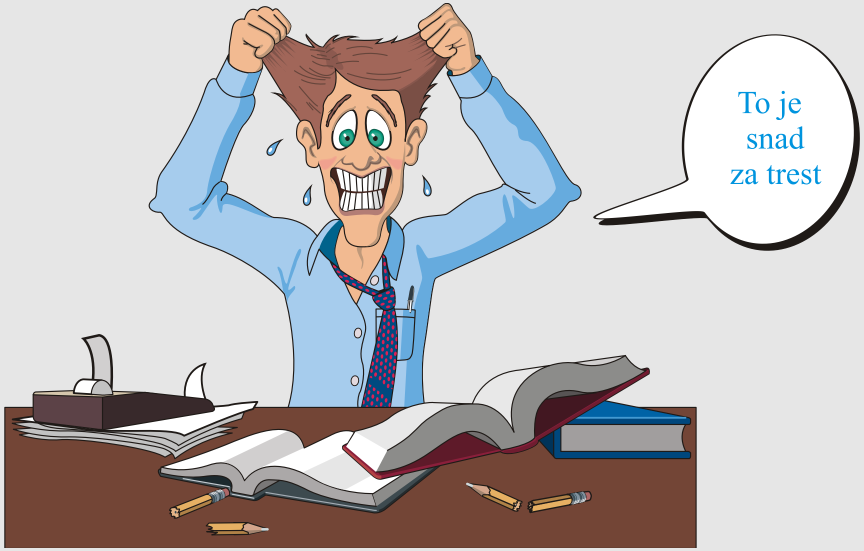
Definiční obor tohoto složení jsou právě ty body x z definičního oboru funkce g, pro které náleží $g(x)$ do definičního oboru funkce f. Symbolicky lze napsat

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}(g) \cap g^{-1}(\mathcal{D}(f)) \, .$$

LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
sudá,lichá funkce
periodická funkce
monotónní funkce
omezená funkce
konvexní funkce
konkávní funkce
konstrukce funkcí
aritm.operace
racionální funkce
uspořádání funkcí
kladná část funkce
složení
inverzní funkce
jiná zadání
implicitní zadání
parametrické zadání
polární zadání
kruh
kardioida
lemniskata
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
sudá,lichá funkce
periodická funkce
monotónní funkce
omezená funkce
konvexní funkce
konkávní funkce
konstrukce funkcí
aritm.operace
racionální funkce
uspořádání funkcí
kladná část funkce
složení
inverzní funkce
jiná zadání
implicitní zadání
parametrické zadání
polární zadání
kruh
kardioida
lemniskata
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

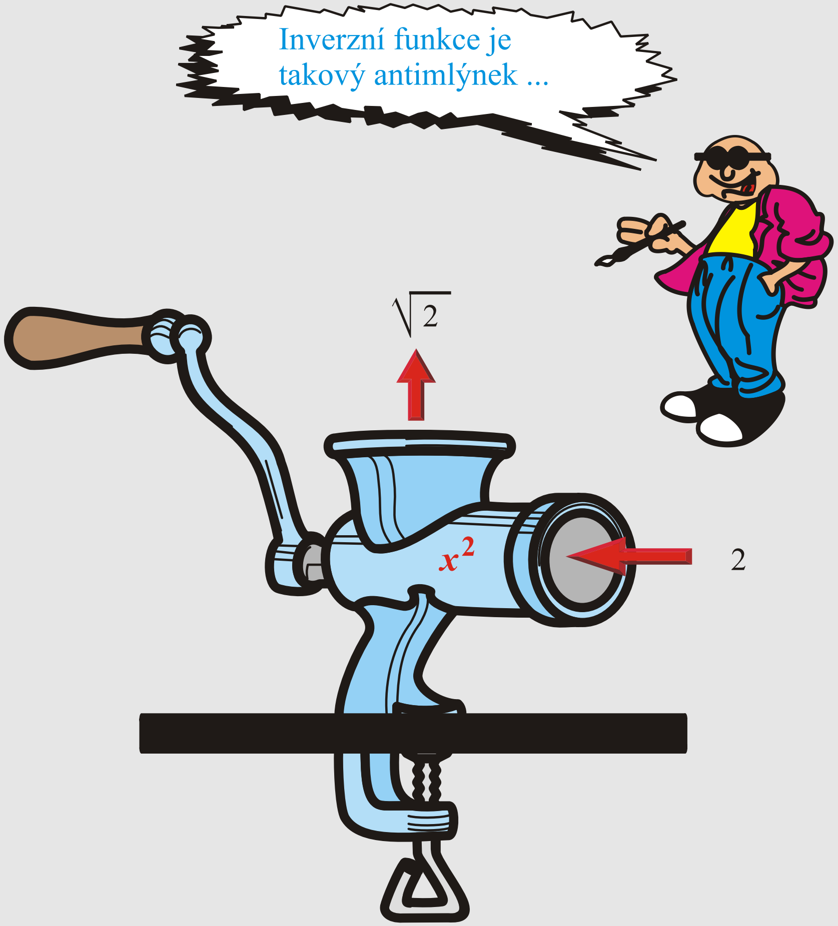


Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8

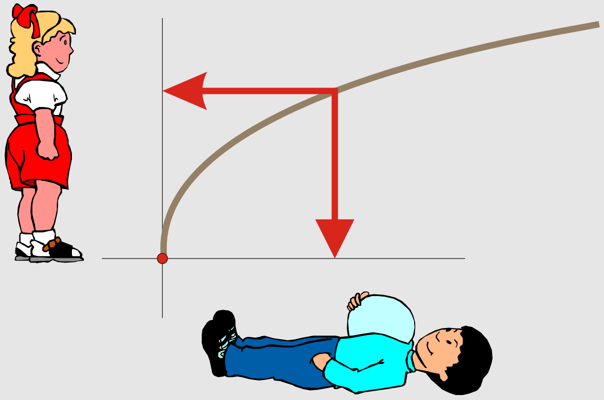
Inverzní funkce

Inverzní funkce jsou důležitým nástrojem při řešení rovnic. I když někdy nedovedeme inverzní funkci přesně napsat, dovedeme popsat její vlastnosti a s jejich pomocí popsat i řešení rovnice.

DEFINICE. Je-li f prostá funkce definovaná na množině D s oborem hodnot E, pak funkce, která přiřadí bodu $y \in E$ ten jediný bod $x \in D$, pro který je $f(x) = y$, se nazývá inverzní funkce k f a značí se f^{-1}.


Inverzní funkce je
takový antimlýnek ...
$\sqrt{2}$
x^2
2

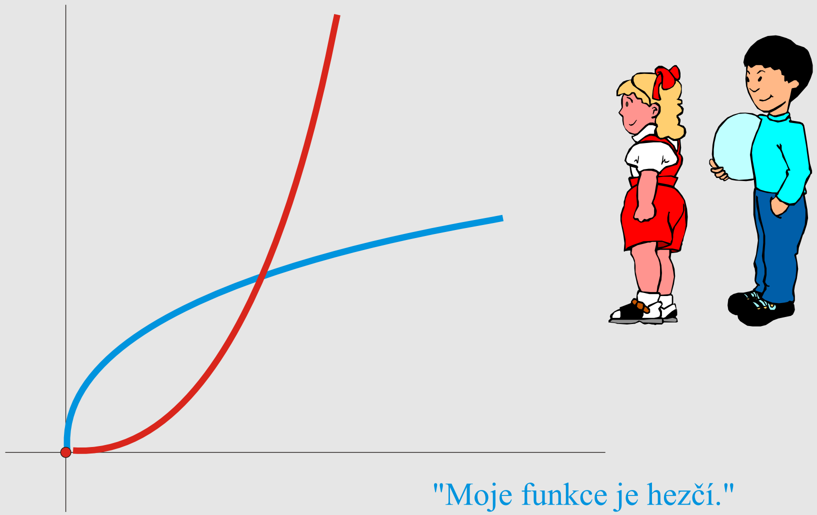
Budeme si házet ...



"Moje funkce je hezčí."
"Ta moje je hezčí."
"Ta tvoje je inverzní!"
"To ta tvoje je inverzní!!!"

Pokud se nakreslí grafy funkce $y = f(x)$ a funkce k ní inverzní y=$f^{-1}(x)$ do stejné souřadnicové soustavy, vyjdou grafy symetrické podle osy prvního kvadrantu.

LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
sudá,lichá funkce
periodická funkce
monotónní funkce
omezená funkce
konvexní funkce
konkávní funkce
konstrukce funkcí
aritm.operace
racionální funkce
uspořádání funkcí
kladná část funkce
složení
inverzní funkce
jiná zadání
implicitní zadání
parametrické zadání
polární zadání
kruh
kardioida
lemniskata
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



"Moje funkce je hezčí."
"Ta moje je hezčí."
"Ta tvoje je inverzní!"
"To ta tvoje je inverzní!!!"

511

POZOROVÁNÍ.

1. Pro prostou funkci f je definiční obor funkce f^{-1} totožný s oborem hodnot funkce f a platí

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \text{ pro } y \in \mathcal{D}(f^{-1}) \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ pro } x \in \mathcal{D}(f)\,.$$

2. Jestliže f má inverzní funkci f^{-1}, pak f je inverzní funkcí k f^{-1}.
3. Každá ryze monotónní funkce má inverzní funkci.

LEKCE04-FUN
Funkce
popis
vlastnosti funkcí
sudá,lichá funkce
periodická funkce
monotónní funkce
omezená funkce
konvexní funkce
konkávní funkce
konstrukce funkcí
aritm.operace
racionální funkce
uspořádání funkcí
kladná část funkce
složení
inverzní funkce
jiná zadání
implicitní zadání
parametrické zadání
polární zadání
kruh
kardioida
lemniskata
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Inverzní funkce f^{-1} je rostoucí (nebo klesající), právě když je funkce f rostoucí (nebo klesající, resp.)

5. Inverzní funkce f^{-1} je konvexní (nebo konkávní), právě když je funkce f konkávní (nebo konvexní, resp.).

Poznámky 9 Příklady 9 Otázky 9 9

DALŠÍ MOŽNOSTI POPISU FUNKCÍ

Existují i jiné možnosti, jak zadávat funkce. Dále uvedené možnosti zadávají funkce po částech, ale jiným způsobem, než bylo uvedeno po definici funkce. Důkaz, že se jedná opravdu o „kousky" funkcí, je náročnější a bude uveden až v teorii funkcí dvou proměnných.

Předpis $y^2 = 1 - x^2$, neboli $x^2 + y^2 - 1 = 0$, nedefinuje funkci (proč?). Nicméně množina bodů (x, y) v rovině splňujících uvedenou rovnost tvoří kružnici s poloměrem 1 o středu v počátku a jedná se o důležitou křivku, která je zadaná jednoduchým způsobem a je složena z grafů dvou funkcí (horní a dolní polokružnice). Podobných případů je více a jsou důležité.

Rovnost $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je funkce dvou reálných proměnných x, y, se nazývá implicitně zadaná funkce (krátce implicitní funkce) a rozumí se, že na jistých intervalech je y funkcí x, např. $y = g(x)$, přičemž na daném intervalu je $f(x, g(x)) = 0$. Grafem implicitně zadané funkce je $\{(x, y); f(x, y) = 0\}$.

Tento termín *implicitní funkce* je nutné chápat vcelku, nikoli jako složení dvou slov *implicitní* a *funkce*.

Dalšími příklady jsou $y^2 = x$ (parabola), $y^2 - x^2 = 1$ (hyperbola), $(x-y)^4 = 4(x^2+y^2)$ (kardioida).

Mnoho těchto křivek lze zadat v jistém smyslu jednodušeji pomocí parametru. Na příklad kardioida je zadána jako

$$x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \text{ pro } t \in \langle 0, 2\pi\rangle .$$

Obecně tedy lze definovat parametricky zadanou funkci předpisem

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad t \in J\,,$$

kde $\varphi(t), \psi(t)$ jsou reálné funkce definované na množině (většinou intervalu) J. Grafem parametricky zadané funkce je $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in J\}$.

Stejně jako u implicitních funkcí je nutné brát termín *parametricky zadaná funkce* vcelku.

Dalším příkladem může být elipsa:

$$x = a\cos t\,, \quad y = b\sin t\,, \quad t \in [0, 2\pi)\,,$$

kde $a, b > 0$ jsou délky poloos.

Opět lze ukázat, že části parametricky zadané funkce jsou funkcemi.

Speciálním případem parametricky zadané funkce je zadání pomocí polárních souřadnic r, φ, kde r (vzdálenost bodu křivky od počátku) je popsáno nějakou funkcí $r = h(\varphi)$ úhlu mezi průvodičem bodu a osou x.

Protože $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, dostane se parametrické zadání

$$x = h(\varphi)\cos\varphi, \quad y = h(\varphi)\sin\varphi\,, \quad \varphi \in J\,.$$

Někdy (viz následující příklad lemniskaty) může být příslušná funkce popisující závislost r na φ zadána implicitně.

Kružnice

implicitně: $x^2 + y^2 = a^2$
parametricky: $x = a\cos t, y = a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$
polárně: $r = a$

Kardioida

implicitně: $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$
parametricky: $x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$
polárně: $r = 2a(1 + \cos\varphi)$

graf

Lemniskata

implicitně: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

parametricky: $x = \frac{at(1+t^2)}{1+t^4}, \quad y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^4}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

polárně: $r^2 = a^2\cos(2\varphi)$