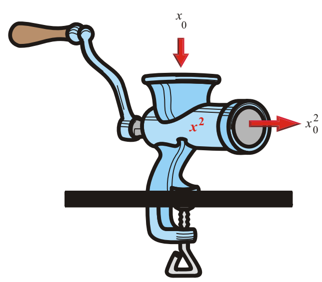
Funkce a základní pojmy popisující jejich chování

Pro zobrazení z reálných čísel do reálných čísel se používá termín reálná funkce reálné proměnné.

Protože jen výjimečně budou v této části použity jiné proměnné nebo hodnoty než reálná čísla, bude se pro tato zobrazení používat zkrácený termín funkce.

Funkce f bude v této části znamenat zobrazení nějaké neprázdné podmnožiny $D \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. předpis, který přiřazuje každému $x \in D$ přesně jedno reálné číslo $f(x)$.



Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

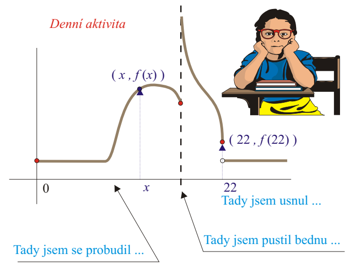
Množina D z definice funkce se nazývá definiční obor dané funkce (značí se $\mathcal{D}(f)$), čísla z D jsou (nezávisle) proměnné, příslušná přiřazená čísla jsou hodnoty (též nazývané závisle proměnné).

Množina všech hodnot dané funkce se nazývá její obor hodnot.

Definiční obor a obor hodnot - to je základ.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

DEFINICE. Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$ s definičním oborem D. Množina všech bodů v rovinném (x,y)–souřadnicovém systému, které mají souřadnice $(x, f(x))$, kde $x \in D$, se nazývá grafem funkce f.



Poznámky 3   Příklady 3   Otázky 3

VLASTNOSTI FUNKCÍ

V této části budou zavedeny některé vlastnosti funkcí, které se hodí pro vyšetřování jejich průběhu. Vlastnosti jsou rozděleny podle použitých vlastností reálných čísel (aritmetické, uspořádání).

Vlastnosti jsou zpravidla vidět na grafu funkce. Pokud graf nemáme, musíme se více snažit.

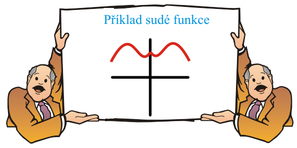
Použití aritmetických vlastností

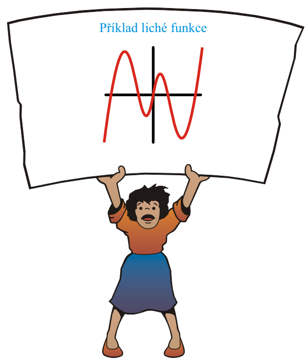
V tomto případě se využívá aritmetických vlastností $\mathbb{R}$ (opačného prvku $-x$ k x a operace sčítání).

Začneme se souměrnými grafy.

DEFINICE. Funkce f se nazývá sudá (nebo lichá), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $x \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-x \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-x) = f(x)$ (nebo $f(-x) = -f(x)$, resp.) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

Graf sudé funkce je symetrický podle osy y.





Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

DEFINICE. Funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ se nazývá periodická, jestliže existuje $p \in (0, +\infty)$ (nazývané perioda) tak, že $f(x+p) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Graf periodické funkce f s periodou p na intervalu $[np, (n+1)p], n \in \mathbb{Z}$, vznikne posunutím grafu f na intervalu $[0, p]$ o np na ose x.

Při vyšetřování sudých, lichých nebo periodických funkcí není nutné vyšetřovat celý definiční obor, stačí se omezit na nezáporná čísla a u periodických funkcí s kladnou periodou p jen na interval $[0, p]$.

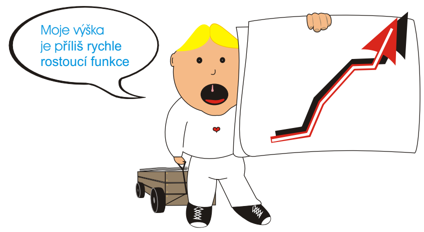
Vypadá to vcelku snadno.

Já definici periodické funkce periodicky zapomínám.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

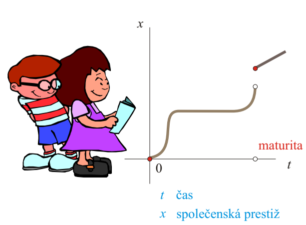
Použití uspořádání na $\mathbb{R}$

DEFINICE. Funkce f definovaná na intervalu I se nazývá rostoucí (nebo klesající, nebo neklesající, nebo nerostoucí), jestliže $f(x) < f(y)$ (nebo $f(x) > f(y)$, nebo $f(x) \leq f(y)$, nebo $f(x) \geq f(y)$, resp.) jakmile $x, y \in \mathcal{D}(f), x < y$.

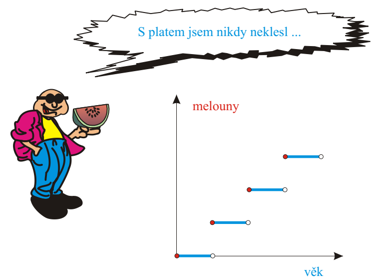


Na intervalu $[0, 18]$.

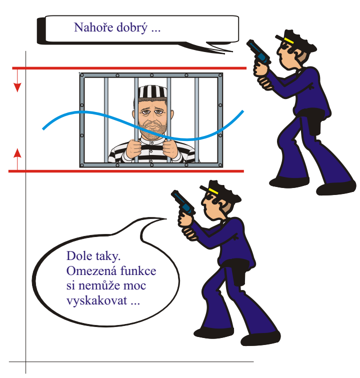
DEFINICE. Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá ryze monotónní; funkce, která je neklesající nebo nerostoucí, se nazývá monotónní.

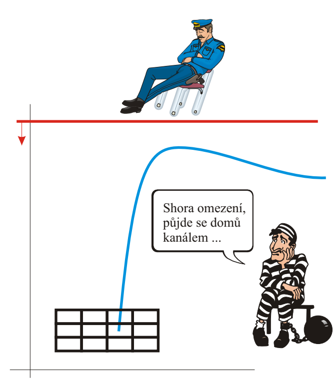


Graf rostoucí (nebo neklesající, klesající, nerostoucí) funkce stoupá (resp. neklesá, klesá, neroste) ve směru kladné osy x. Graf monotónní funkce může být na nějaké části definičního oboru konstantní.



DEFINICE. Říkáme, že funkce f je omezená (nebo shora omezená, nebo zdola omezená), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(x)| \leq k$ (nebo $f(x) \leq k$, nebo $f(x) \geq k$, resp.) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.





Graf omezené funkce leží v pásu mezi dvěma rovnoběžkami s osou x. Graf shora (nebo zdola) omezené funkce leží v dolní (resp. horní) polorovině určené rovnoběžkou s osou x.

POZOROVÁNÍ.

1. Funkce f je rostoucí (nebo neklesající) právě když je funkce $-f$ klesající (resp. nerostoucí).
2. Posunutím grafu monotónní funkce získáme opět graf monotónní funkce (stejného druhu).

Tomu říkám „Minipozorováníčko". Některá tvrzení si rychleji vymyslím, než přečtu.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 5

Konvexita

Následující definice popisuje některé tvary grafů funkcí, a to zda se otevírají směrem nahoru nebo dolů.

Nebo-li jak graf funkce zatáčí doleva či doprava.

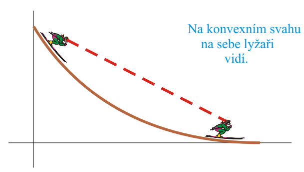
DEFINICE. Funkce f definovaná na intervalu J se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in J$ a každé $\lambda \in (0,1)$ platí vztah

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

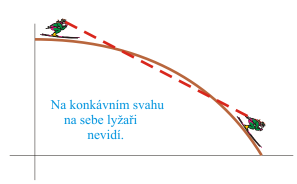
Platí-li v uvedeném vztahu vždy ostrá nerovnost, nazývá se f ryze konvexní.

Obrátíme-li v uvedeném vztahu nerovnost, dostáváme funkci (ryze) konkávní.

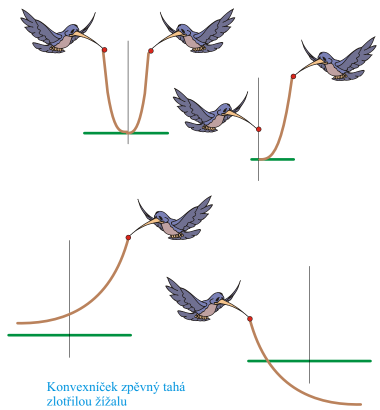
Jde o to, zda je graf funkce otočen nahoru nebo dolů. Podle toho na sebe body grafu vidí nad nebo pod grafem funkce.

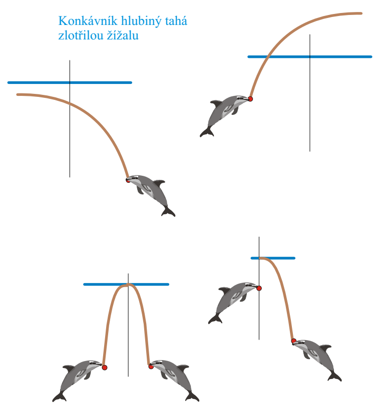


Konvexní je třeba důlek na kuličky.

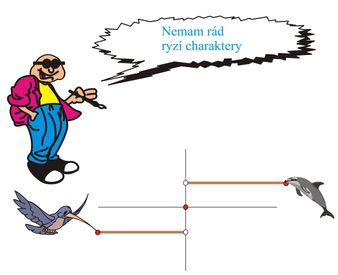


Konkávní je třeba Říp.





Nerovnost v definici konvexity funkce znamená, že úsečka spojující dva body grafu leží celá nad grafem nebo na grafu (leží-li celá, kromě koncových bodů, nad grafem, je to ryzí konvexita):



POZOROVÁNÍ.

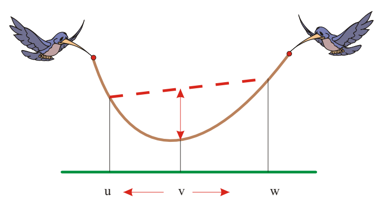
1. Funkce f je (ryze) konvexní právě když $-f$ je (ryze) konkávní.
2. Posunutí (ryze) konvexní funkce je (ryze) konvexní funkce.
3. Funkce f je na intervalu I konvexní právě když pro libovolné tři body $u < v < w$ z intervalu I platí

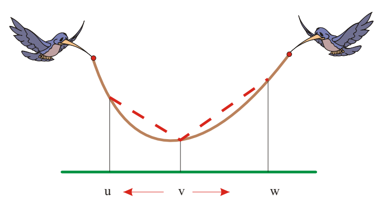
$$f(v)(w-u) \leq f(w)(v-u) + f(u)(w-v)$$

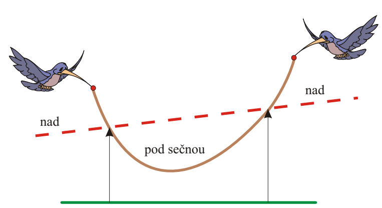
neboli

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}\,.$$

Chování konvexních funkcí ilustrují obrázky:







Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

VYTVÁŘENÍ NOVÝCH FUNKCÍ

Ze známých funkcí lze pomocí různých operací vytvořit další funkce.

Takovým způsobem vznikají polynomy z identické funkce.

Zajímavá je otázka, které ze zavedených vlastnosti se přenášejí z generující funkce na nově vzniklé funkce.

Z jak dobrých složek uvaříme, tak dobře se najíme.

Z monotónních funkcí vznikají monotónní … , nebo ne?.

V následujících třech částech je definováno vytváření nových funkcí pomocí aritmetických operací a uspořádání na reálných číslech a pomocí skládání a inverzní operace.

Později budou přidány další operace (např. umocňování funkcemi, derivace, integrace).

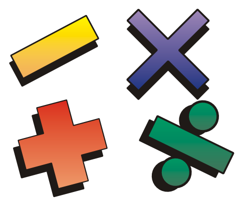
Skládání a tvoření inverze je vlastnost obecných zobrazení.

Pro aritmetické operace se zobrazeními je potřeba, aby v jejich oboru hodnot byly tyto aritmetické operace definovány.

Podobně pro operace pomocí uspořádání musí na oboru hodnot uspořádání existovat.

Použití aritmetických operací $\mathbb{R}$

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce, budou značit $f + g$, $f \cdot g$, f/g funkce, které mají za hodnotu v bodě x postupně $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$.



Definiční obor součtu a násobku funkcí je průnik jejich definičních oborů, u podílu je nutné ještě odebrat body, ve kterých se jmenovatel rovná 0.

Ve výrazu $k \cdot f$ můžeme číslo k chápat jako konstantní funkci na $\mathbb{R}$ s hodnotou k a potom je funkce $k \cdot f$ speciálním případem násobení funkcí, tj. $(k \cdot f)(x) = kf(x)$.

Stejně tak je rozdíl funkcí $f - g$ speciálním případem součtu funkcí f a $-g = (-1) \cdot g$.

V jednoduchých situacích se člověk nemůže splést.

Polynom je funkce tvaru

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

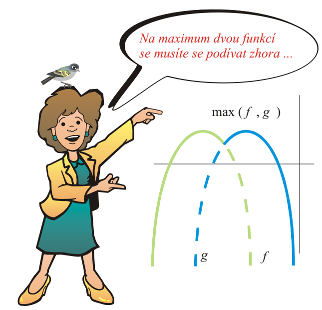
kde $n \in \mathbb{N}$ a koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla (jestliže $a_n \neq 0$, nazývá se n stupeň polynomu).

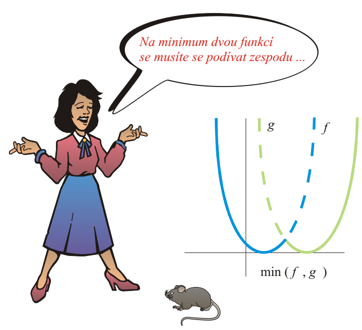
Podíl dvou polynomů se nazývá racionální funkce.

> Racionální to asi bude.

Použití uspořádání $\mathbb{R}$

DEFINICE. Pro funkce f, g se definuje $\max\{f, g\}$ (nebo $\min\{f, g\}$) jako funkce, která má v bodě x hodnotu $\max\{f(x), g(x)\}$ (resp. $\min\{f(x), g(x)\}$).





> Definiční obor maxima a minima funkcí je průnik jejich definičních oborů.

Pro funkci f se definují funkce $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = -\min\{f, 0\}$, tzv. kladná nebo záporná část funkce f.

S kladnou a zápornou částí to není vždy jednoduché.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

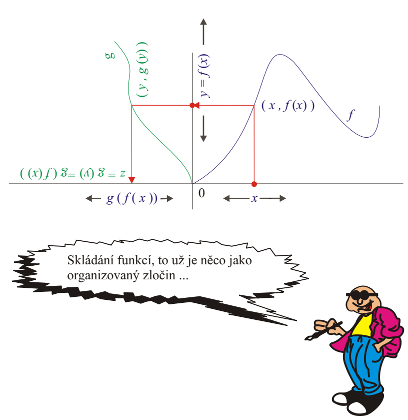
Skládání funkcí

Skládání funkcí je velmi důležité a s jeho použitím lze sestrojit mnoho důležitých složitějších funkcí pomocí jednoduchých funkcí.

DEFINICE. Složení $f \circ g$ dvou funkcí f, g se definuje jako funkce, která má v bodě x hodnotu $f(g(x))$.

Funkce g se pak někdy nazývá vnitřní funkcí a f vnější funkcí. Např. $|f|$ (absolutní hodnota funkce f) je složení funkce f (vnitřní funkce) a funkce absolutní hodnota (vnější funkce).

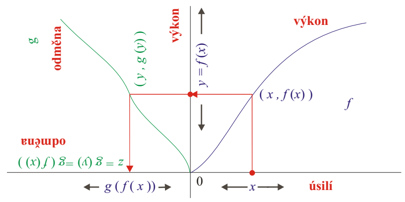
Teď je třeba se připravit na všechno.

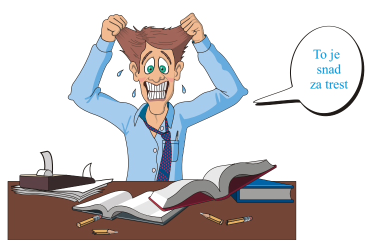


Definiční obor tohoto složení jsou právě ty body x z definičního oboru funkce g, pro které náleží $g(x)$ do definičního oboru funkce f. Symbolicky lze napsat

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}(g) \cap g^{-1}(\mathcal{D}(f)) .$$

Například odmocnina ze sinu není pro každého.



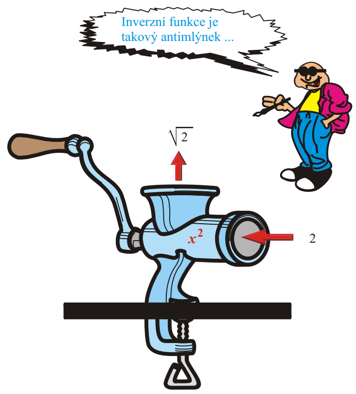


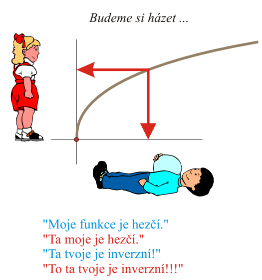
Poznámky 8   Příklady 8   Otázky 8

Inverzní funkce

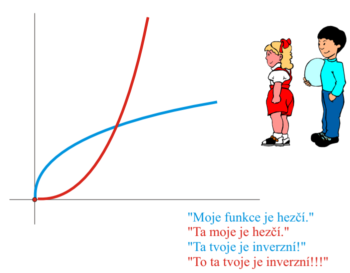
Inverzní funkce jsou důležitým nástrojem při řešení rovnic. I když někdy nedovedeme inverzní funkci přesně napsat, dovedeme popsat její vlastnosti a s jejich pomocí popsat i řešení rovnice.

DEFINICE. Je-li f prostá funkce definovaná na množině D s oborem hodnot E, pak funkce, která přiřadí bodu $y \in E$ ten jediný bod $x \in D$, pro který je $f(x) = y$, se nazývá inverzní funkce k f a značí se f^{-1}.





Pokud se nakreslí grafy funkce $y = f(x)$ a funkce k ní inverzní y=$f^{-1}(x)$ do stejné souřadnicové soustavy, vyjdou grafy symetrické podle osy prvního kvadrantu.



Graf inverzní funkce f^{-1} je symetrický obraz grafu funkce f podle diagonály.

POZOROVÁNÍ.

1. Pro prostou funkci f je definiční obor funkce f^{-1} totožný s oborem hodnot funkce f a platí

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \text{ pro } y \in \mathcal{D}(f^{-1}) \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ pro } x \in \mathcal{D}(f)\,.$$

2. Jestliže f má inverzní funkci f^{-1}, pak f je inverzní funkcí k f^{-1}.

3. Každá ryze monotónní funkce má inverzní funkci.

4. Inverzní funkce f^{-1} je rostoucí (nebo klesající), právě když je funkce f rostoucí (nebo klesající, resp.)

5. Inverzní funkce f^{-1} je konvexní (nebo konkávní), právě když je funkce f konkávní (nebo konvexní, resp.).

Je to práce s výrazy. Dává to smysl i podle obrázku.

Poznámky 9 Příklady 9 Otázky 9 9

DALŠÍ MOŽNOSTI POPISU FUNKCÍ

Existují i jiné možnosti, jak zadávat funkce. Dále uvedené možnosti zadávají funkce po částech, ale jiným způsobem, než bylo uvedeno po definici funkce. Důkaz, že se jedná opravdu o „kousky" funkcí, je náročnější a bude uveden až v teorii funkcí dvou proměnných.

Předpis $y^2 = 1 - x^2$, neboli $x^2 + y^2 - 1 = 0$, nedefinuje funkci (proč?). Nicméně množina bodů (x, y) v rovině splňujících uvedenou rovnost tvoří kružnici s poloměrem 1 o středu v počátku a jedná se o důležitou křivku, která je zadaná jednoduchým způsobem a je složena z grafů dvou funkcí (horní a dolní polokružnice). Podobných případů je více a jsou důležité.

Rovnost $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je funkce dvou reálných proměnných x, y, se nazývá implicitně zadaná funkce (krátce implicitní funkce) a rozumí se, že na jistých intervalech je y funkcí x, např. $y = g(x)$, přičemž na daném intervalu je $f(x, g(x)) = 0$. Grafem implicitně zadané funkce je $\{(x, y); f(x, y) = 0\}$.

Tento termín *implicitní funkce* je nutné chápat vcelku, nikoli jako složení dvou slov *implicitní* a *funkce*.

Dalšími příklady jsou $y^2 = x$ (parabola), $y^2 - x^2 = 1$ (hyperbola), $(x - y)^4 = 4(x^2 + y^2)$ (kardioida).

Mnoho těchto křivek lze zadat v jistém smyslu jednodušeji pomocí parametru. Na příklad kardioida je zadána jako
$$x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \text{ pro } t \in \langle 0, 2\pi\rangle .$$
Obecně tedy lze definovat parametricky zadanou funkci předpisem
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in J,$$
kde $\varphi(t), \psi(t)$ jsou reálné funkce definované na množině (většinou intervalu) J. Grafem parametricky zadané funkce je $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in J\}$.

Stejně jako u implicitních funkcí je nutné brát termín *parametricky zadaná funkce* vcelku.

Dalším příkladem může být elipsa:
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi),$$
kde $a, b > 0$ jsou délky poloos.

Opět lze ukázat, že části parametricky zadané funkce jsou funkcemi.

Speciálním případem parametricky zadané funkce je zadání pomocí polárních souřadnic r, φ, kde r (vzdálenost bodu křivky od počátku) je popsáno nějakou funkcí $r = h(\varphi)$ úhlu mezi průvodičem bodu a osou x.

Protože $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, dostane se parametrické zadání

$$x = h(\varphi)\cos\varphi, \quad y = h(\varphi)\sin\varphi\,, \quad \varphi \in J\,.$$

Někdy (viz následující příklad lemniskaty) může být příslušná funkce popisující závislost r na φ zadána implicitně.

Kružnice

implicitně: $x^2 + y^2 = a^2$
parametricky: $x = a\cos t, y = a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$
polárně: $r = a$

Kardioida

implicitně: $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$
parametricky: $x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$
polárně: $r = 2a(1 + \cos\varphi)$

Lemniskata

implicitně: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
parametricky: $x = \frac{at(1+t^2)}{1+t^4}, \quad y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^4}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$
polárně: $r^2 = a^2\cos(2\varphi)$

POZNÁMKY

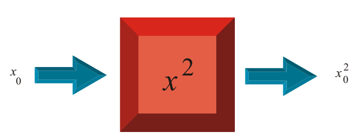
Poznámky 1:

Funkce, která přiřazuje reálnému číslu jeho sinus, se značí symbolem $\sin$ a její hodnota v bodě x je $\sin x$.

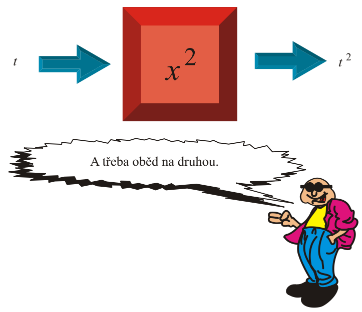
Situace je jiná v případě funkce, která přiřazuje reálnému číslu jeho druhou mocninu. Tato funkce nemá speciální symbol (jako měl $\sin$ v předchozím případě) a značí se x^2, což může někdy vést k záměně s hodnotou této funkce v konkrétním bodě x.

Většinou však nemůže dojít k nedorozumění. Pokud by situace nebyla jasná, je lépe pro konkrétní body a jejich hodnoty použít indexy, např. x_0^2 pro hodnotu této funkce v bodě x_0.

Funkce je zobrazení a mají pro ni smysl vlastnosti a pojmy platné pro zobrazení (např. konstantní zobrazení, prosté zobrazení, zúžení zobrazení, složení zobrazení, atd.).
Často se používá formulace o zúžení vlastnosti na část definičního oboru. Např. *funkce f je konstantní na množině A* znamená, že A je částí definičního oboru funkce f a $f(x_1) = f(x_2)$ pro $x_1, x_2 \in A$, tj. zúžení funkce f na množinu A je konstantní. Podobně pro výrok *f je prostá na A*.

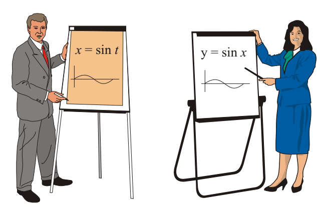


Zdůraznit, že jde o funkci, nikoli o její hodnotu v bodě x, lze i zápisem $y = x^2$. Podobně i v předchozím příkladu bývá obvyklé značit funkci sinus jako $y = \sin x$.

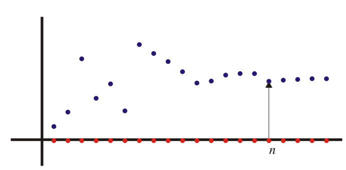


To je teda funkce.

Samozřejmě tu nejsou podstatná písmena x a y. Zápisy $p = 2u$ nebo $\beta = 2\delta$ nebo $K_7 = 2\alpha$ označují tutéž funkci. Význam písmen x, y je spíše tradiční a geometrický při použití souřadnicové soustavy x, y pro kreslení grafu funkce.



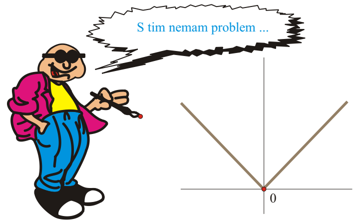
Funkce definované na množině přirozených čísel se nazývají posloupnosti



a byly probírány v předchozí kapitole.

Někdy bývá funkce definována po částech, tj. její definiční obor je rozdělen na několik částí (např. intervalů) a v každé této části je funkce definována jiným předpisem.

Pokud se tyto části překrývají (např. koncové body u uzavřených intervalů), musí se při zadání funkce dávat pozor na hodnoty (proč?). Proto je lépe volit tyto části disjunktní.



Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

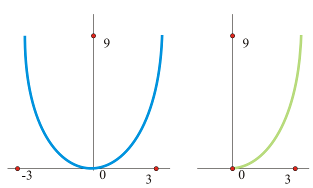
Při zadávání funkce by se správně měl zadat i definiční obor této funkce.

Není-li definiční obor zadán, rozumí se jím všechna čísla, pro která má zadávaná funkce smysl.

Nejčastěji to bude interval nebo sjednocení intervalů.

Je nutné si uvědomit, že funkce zadané stejným předpisem, ale mající různé definiční obory, jsou různé.

Např. funkce $y = x^2, x \in (-3, 3)$ a funkce $y = x^2, x \in (0, 3)$, mají sice stejný předpis, ale za definiční obor mají různé intervaly a obě funkce jsou tedy různé.

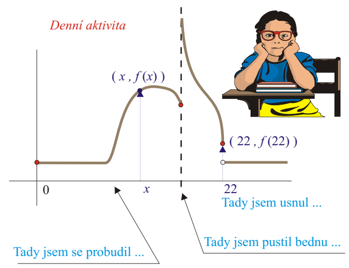


Konec poznámek 2.

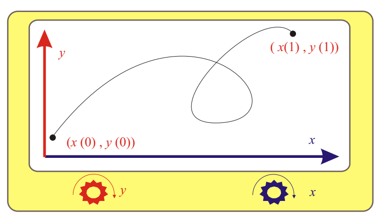
Poznámky 3:

Graf funkce definované na nějaké množině D je tedy „čára" v rovině (může být i „nesouvislá") taková, že libovolná přímka kolmá na osu x protíná tuto čáru nejvýše v jednom bodě (v žádném bodě pokud kolmice neprotíná množinu D, v jednom bodě pokud kolmice protíná množinu D).

Snažil jsem se to vyvrátit, ale nepovedlo se to. Jsou to prostě čáry-máry.



Z toho je vidět, že dvě funkce jsou stejné právě když mají stejný graf. Funkce se proto často definují pomocí grafu, jako množina dvojic $(x, f(x))$ pro $x \in D$.



Čára nakreslená takovýmto kreslítkem je grafem pouze tehdy, pokud pravým (správným) kolečkem točíme stále stejným směrem.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Pro definici sudých a lichých funkcí je nutné mít operaci opačných prvků v definičním oboru i oboru hodnot.

U periodické vlastnosti je potřebná vlastnost (sčítání) nutná jen u definičního oboru.

Je vhodné si uvědomit, že je-li f periodická funkce s periodou p, pak i np, kde $n \in \mathbb{N}$, je periodou f.

Funkce nemusí mít nejmenší periodu (např. Dirichletova funkce), ale nekonstantní spojitá periodická funkce má vždy nejmenší periodu.

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Pro definici monotónosti je třeba mít uspořádání jak na definičním oboru, tak na oboru hodnot.

Takže nelze vhodně definovat monotónní funkce v rovině, tj. u funkcí dvou proměnných.

Omezenost funkcí používá jen uspořádání na oboru hodnot a tedy tato vlastnost lze definovat pro všechna zobrazení do $\mathbb{R}$.

Podobně jako se definuje, že funkce je konstantní na podintervalu svého definičního oboru, říká se, že funkce je např. rostoucí na podintervalu svého definičního oboru, klesající na jiném podintervalu.

Jak jinak. Nejdůležitější je, abychom zvládali nové situace. Kdykoliv můžeme něco nově definovat.

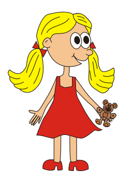
První vlastnosti v Pozorování se používá v důkazech: dokáže-li se nějaké tvrzení pro všechny rostoucí funkce a f je klesající, platí tvrzení pro $-f$ (splňuje-li ostatní podmínky).

Často z toho ihned plyne tvrzení pro f.

Některé funkce sice nejsou monotónní, ale dají se napsat jako součet monotónních funkcí – funkce s touto vlastností jsou důležité a nazývají se funkce s konečnou variací.

Existuje nějaká funkce, která není součtem monotónních funkcí?

Samozřejmě jsem ji našel.



Já jsem tady!

Konec poznámek 5.

Poznámky 6:

Je-li f konvexní (nebo konkávní), je množina bodů roviny ležící nad grafem (resp. pod grafem) funkce f tzv. konvexní množinou (i obráceně).

Podmnožina roviny se nazývá konvexní, jestliže s každými dvěma body v ní leží i celá úsečka, která je spojuje.

V definici konvexní množiny bylo potřeba, aby každé dva body určovaly úsečku. Takže stejná definice lze použít pro definici konvexity v Euklidovských prostorech libovolné dimenze, ale i v obecnějších prostorech (tzv. lineárních).

Na reálné přímce je množina A konvexní právě když A je interval, což je právě když A je tzv. souvislá.

Pozorování 4 vlastně říká, že pro konvexní funkci je směrnice sečny z u do v menší nebo rovna směrnici sečny z v do w. Z toho vyplývá, že funkce, která přiřazuje bodu $v \in (u, w)$ směrnici sečny z u do v, je neklesající (rostoucí, je-li f ryze konvexní).

Konec poznámek 6.

Poznámky 7:

Hodnoty součtů, součinů a podílů funkcí jsou definovany bodově, tj. hodnota např. součtu funkcí je součet hodnot funkcí.

Proto mají tyto operace s funkcemi, např. $x \sin x + (\sqrt{x})^3$, očekávaný přirozený význam.

Podobně pro maxima a minima konečně mnoha funkcí.

U definičních oborů je nutná opatrnost. Např. podíl f/g má za definiční obor $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \setminus \{x; g(x) = 0\}$. Takže podíl dvou identických funkcí x/x má za definiční obor všechna reálná čísla kromě 0. Podíl se však rovná 1 a tato funkce je definována pro všechna reálná čísla. Takže podíl x/x se nerovná konstantní funkci 1 na $\mathbb{R}$, ale konstantní funkci 1 na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Definiční obor výsledných funkcí se tedy zjišťuje normálním způsobem, tj. hledají se všechny body, ve kterých vše v předpisu funkce má smysl, ale nesmí se před tímto zjišťováním výraz pro funkci upravovat.

Polynom je funkce vzniklá z identické funkce použitím konečně mnoha operací násobení a sčítání. Racionální funkce vzniknou z identické funkce použitím konečně mnoha operací sčítání, násobení a dělení.

Tento termín i postup nabízí srovnání s konstrukcí racionálních čísel.

V algebře by se tento postup popsal jako sestrojení (v daném okruhu) nejmenšího podokruhu obsahujícího dané prvky – v našem případě je daný okruh množinou všech funkcí a danými prvky identická funkce a všechny konstantní funkce.

Je možné definovat relaci uspořádání pro množinu funkcí mající stejný definiční obor M:

$$f \leq g \text{ jestliže } f(x) \leq g(x) \text{ pro každé } x \in M .$$

Toto uspořádání není obecně lineární (kdy je lineární?); někdy se nazývá částečné, protože ne každé dvě funkce jsou srovnatelné (uveďte příklad).

Konec poznámek 7.

Poznámky 8:

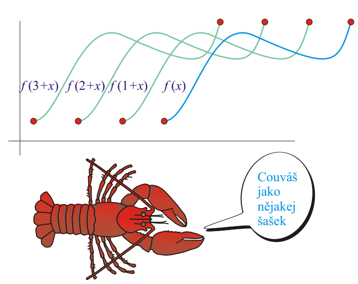
Pro začátek bývá vhodné si proměnné funkcí, které se skládají, vhodně označit, např. $z = f(y), y = g(x)$. Potom vznikne složená funkce $z = (f \circ g)(x)$ dosazením výrazu $g(x)$ za y do f.

Např. funkce $\sqrt{x^2 + 1}$ je složení funkce $z = \sqrt{y}$ s funkcí $y = x^2 + 1$.

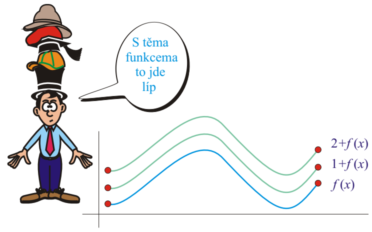
Skládání funkcí není komutativní, tj. nemusí platit $f \circ g = g \circ f$.

Například pro funkce $f(x) = x^2, g(x) = x+2$ je $(f \circ g)(x) = (x+2)^2$ oproti $(g \circ f)(x) = x^2 + 2$.

Speciálním jednoduchým případem sčítání a skládání funkcí je posunutí. Jestliže $g(x) = a + f(b + x)$, vznikne graf funkce g posunutím grafu funkce f o a nahoru a o b doleva.



Jestliže f má definiční obor např. interval (s, t), má funkce g definiční obor $(s - b, t - b)$.



Konec poznámek 8.

Poznámky 9:

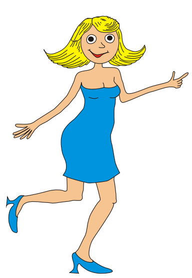
Označení f^{-1} je nutné odlišovat od převrácené hodnoty $\frac{1}{f}$ funkce, tj. od inverzního prvku k f při operaci násobení funkcí.

POZOR !!! To není samo sebou.

Inverzní funkce je inverzním prvkem k f vzhledem k operaci skládání.

To je samo sebou.

Zjišťovat inverzní funkci k f vlastně znamená řešit rovnici $y = f(x)$ pro neznámou x. Toto řešení musí být pro každé y z dané podmnožiny oboru hodnot f (kde chceme inverzní funkci sestrojit) právě jedno.



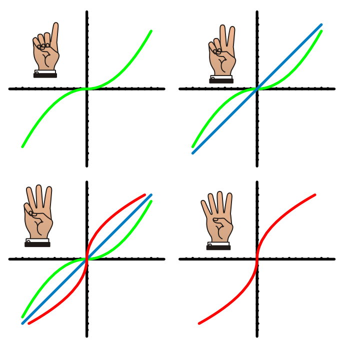
To je velmi chytré.

I když pro danou funkci neexistuje inverzní funkce, často stačí vhodně zmenšit definiční obor dané funkce, aby potom inverzní funkce již existovala.

S inverzními funkcemi je prostě potíž.

Konstrukce grafu inverzní funkce: zeleně je graf původní funkce $y = f(x)$, modře je diagonála, červeně je graf inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$.

Konstrukce inverzní funkce na čtyři doby

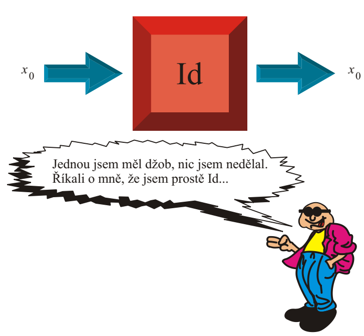


Konec poznámek 9.

PŘÍKLADY

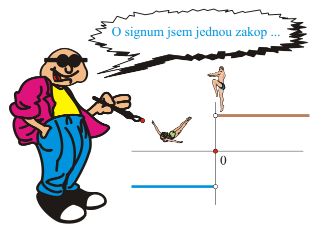
Příklady 1:

Identická funkce $y = x$ se někdy značí symbolem Id nebo I (pak funkce $y = x^2$ se může značit symbolem Id^2).



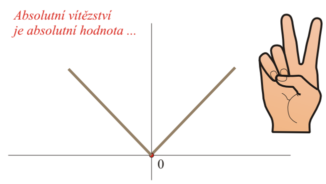
Funkce sgn (čte se signum) značí znaménko čísla a je definována hodnotami $+1$ pro kladná čísla, -1 pro záporná čísla a 0 v bodě 0.

Funkce sgn je konstantní na intervalu $(-\infty, 0)$ i na intervalu $(0, \infty)$ ale nikoli na jejich sjednocení.



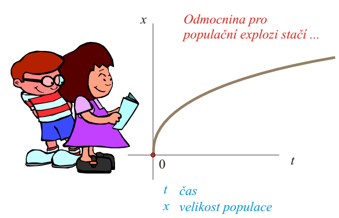
Funkce $y = |x|$ přiřazuje číslu x jeho absolutní hodnotu, tedy vzdálenost od bodu 0.
Tuto funkci lze definovat i po částech jako

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{pro } x \leq 0; \\ x, & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

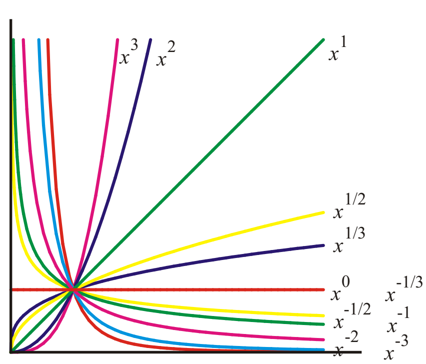


Uvedené intervaly $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$ nejsou disjunktní a je nutné vědět, že v jejich průniku (tj v bodě 0) jsou obě hodnoty stejné (tj $x = -x$ pro $x = 0$).

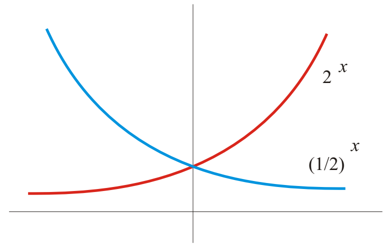
Funkce $y = \sqrt{x}$ přiřazuje nezápornému číslu x jeho druhou odmocninu. Podobně funkce $y = \sqrt[n]{x}$ (pro $n \in \mathbb{N}$) přiřazuje nezápornému číslu x jeho n-tou odmocninu.



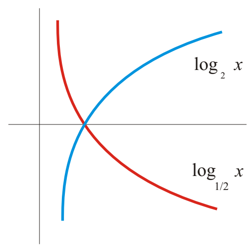
Je-li $r \in \mathbb{R}$, přiřazuje funkce $y = x^r$ číslu x jeho r-tou mocninu.



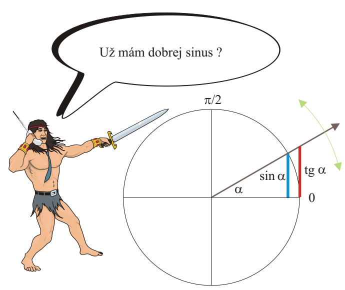
Je-li $a > 0$, funkce $y = a^x$ číslu x přiřazuje x-tou mocninu s pevným základem a. Tato funkce se nazývá obecná exponenciální funkce (nebo obecná mocnina) — viz definice mocniny.



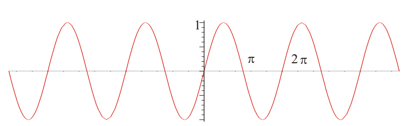
Je-li $a > 0, a \neq 1$, přiřazuje funkce $y = \log_a x$ kladnému číslu x jeho logaritmus při základu a — viz definici logaritmu.



Goniometrické (trigonometrické) funkce sin, cos, tg a cotg se budou zatím chápat tak, jak byly zavedeny na střední škole.

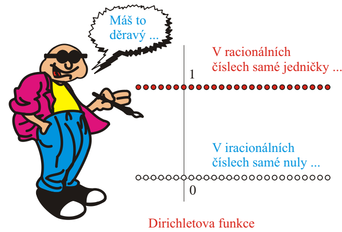


Funkci sinus a její průběh známe dobře.

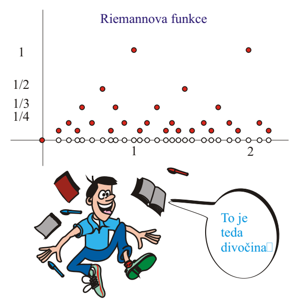


Toto zavedení je provedeno obvykle pomocí pojmu délky úsečky a je těžké pomocí něho počítat hodnoty a dokazovat některé vlastnosti. Později budou tyto funkce zavedeny jiným, vhodnějším způsobem.

Funkce, která má hodnotu 0 v iracionálních číslech a hodnotu 1 v racionálních číslech, se nazývá Dirichletova funkce.

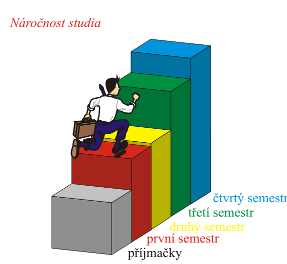


Funkce, která má hodnotu 0 v iracionálních číslech a v bodě 0, hodnotu $1/q$ v racionálních číslech p/q (p, q jsou nesoudělná a $q > 0$), se nazývá Riemannova funkce.



Tabulka zachycující teploty vzduchu po určitých časových intervalech udává funkci, jejíž definiční obor jsou časové údaje (je to tedy konečná množina) a hodnoty jsou příslušné naměřené teploty.

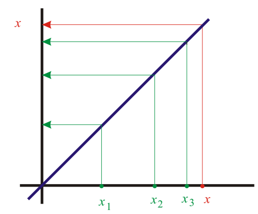
Náročnost jednotlivých semestrů lze zaznamenat jeko funkci na konečné množině a znázornit graficky ...



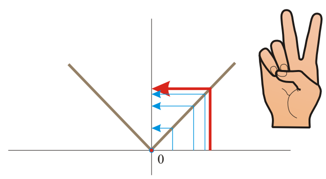
Konec příkladů 1.

Příklady 2:

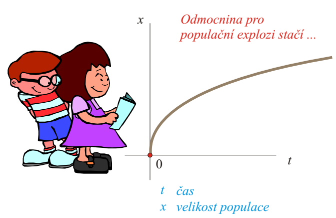
Funkce identická má za definiční obor všechna reálná čísla, protože hodnota x má smysl pro každý bod x.



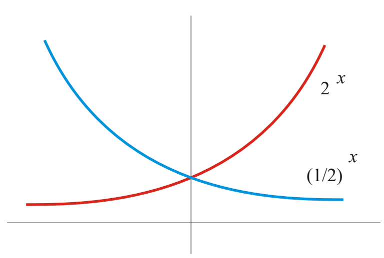
Podobně funkce absolutní hodnota (při definici $y = |x|$).



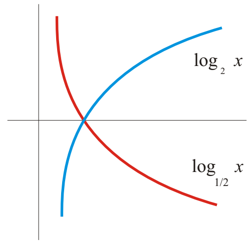
Funkce odmocnina má za definiční obor všechna nezáporná čísla (tedy interval $[0, \infty)$).



Obecná exponenciální funkce $y = a^x$ je definována na celém $\mathbb{R}$, kdežto mocninná funkce $y = x^a$ je obecně definována jen na $(0, +\infty)$. Pro některá speciální čísla a je definována na větších množinách (rozvažte všechny případy).



Logaritmická funkce $\log_a$ je definována na $(0, +\infty)$.



Funkce sgn, Dirichletova i Riemannova mají za definiční obor všechna reálná čísla, protože pro všechna reálná čísla byly definovány.

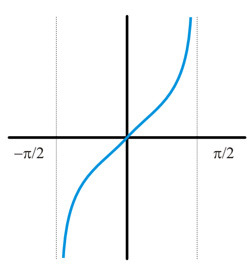
Goniometrické funkce sinus a cosinus mají za definiční obor všechna reálná čísla.

Někdy se definují nejprve jen pro čísla z intervalu $[0, \pi/2]$ a vhodným způsobem (definicí po částech) se rozšíří na další intervaly.

Např. $\sin x = \sin(\pi - x)$ pro $x \in [\pi/2, \pi]$, $\sin x = -\sin(x - \pi)$ pro $x \in [\pi, 2\pi]$ a konečně $\sin x = \sin(x - 2k\pi)$ pro $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$, kde k je celé číslo. Funkce cos se pak může definovat předpisem $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ pro všechna reálná čísla.

S některými vzorečky budeme občas pracovat. Doporučuji si některé napsat na papírek a nosit ho s sebou.

Goniometrická funkce tangens je definována předpisem $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ a má tedy za definiční obor ta reálná čísla, kde je jmenovatel $\cos$ různý od nuly, tj. všechna reálná čísla různá od lichých násobků $\pi/2$.



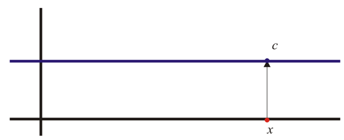
tangens

Goniometrická funkce cotangens je definována předpisem $\operatorname{cotg} x = \cos x / \sin x$ a má tedy za definiční obor ta reálná čísla, kde je jmenovatel $\sin$ různý od nuly, tj. všechna reálná čísla různá od (celočíselných) násobků π.

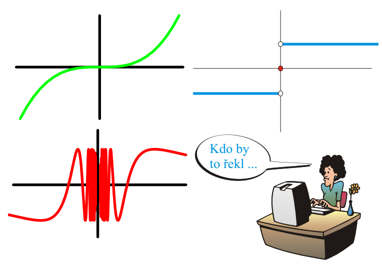
Konec příkladů 2.

Příklady 3:

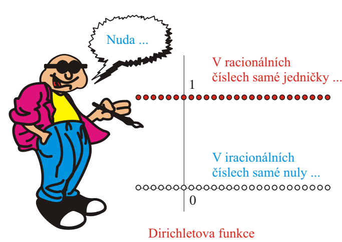
Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x nebo její část, podle toho, jaký je definiční obor funkce.



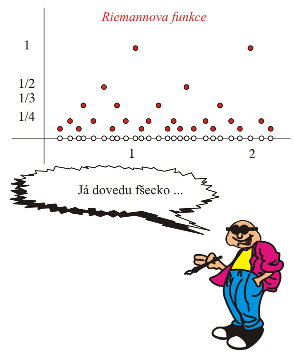
Následující obrázek ukazuje grafy funkcí $y = x^3, y = \operatorname{sgn} x, y = \sin \frac{1}{x}$



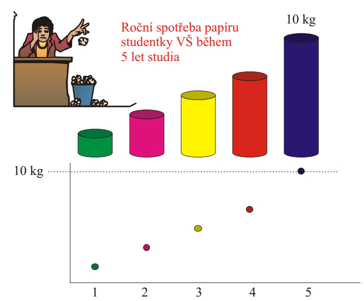
Graf Dirichletovy funkce je podmnožinou dvou přímek v rovině.



Není snadné nakreslit graf Riemannovy funkce.



Graf posloupnosti nebo funkce vzniklé z tabulky měření je tvořen „izolovanými" body v rovině.



Konec příkladů 3.

Příklady 4:

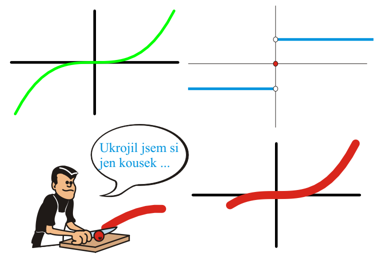
Sudé jsou např. funkce $x^2, x^4, 1/x^2$ (obecněji, každá funkce tvaru x^{2k}, $k \in \mathbb{Z}$, je sudá). Dalšími sudými funkcemi jsou např. $|x|, \cos$.

Liché jsou např. funkce $x, x^3, 1/x$ (obecněji, každá funkce tvaru x^{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}$, je lichá). Dalšími lichými funkcemi jsou např. $\mathrm{sgn}, \sin, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$.

Goniometrické funkce jsou periodické: sin a cos mají periodu 2π, tg a cotg nemají periodu π, protože podle naší definice požadujeme definiční obor celou reálnou osu.

Dokažte to.

Z následujících tří grafů jsou první dva grafy lichých funkcí, třetí nikoli, i když se také jedná o funkci x^3, ale definovanou na množině nesymetrické kolem 0:



Obecná exponenciální funkce a^x je sudá právě pro $a = 1$, lichá není nikdy.

Logaritmická funkce není ani lichá, ani sudá, ani periodická.

Konec příkladů 4.

Příklady 5:

Funkce sinus je rostoucí na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, ale není monotónní na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Funkce tangens je rostoucí na intervalech $(-\pi/2, \pi/2)$ a $(\pi/2, \pi)$, ale není monotónní na intervalu $(0, \pi)$ (proč?).

Každá funkce tvaru x^{2k-1}, $k \in \mathbb{N}$, je rostoucí, funkce x^{2k}, $k \in \mathbb{N}$ klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, +\infty 0$.

Obecněji, funkce x^a je rostoucí pro $a > 0$, konstantní pro $a = 0$, klesající pro $a < 0$ na $(0, +\infty)$. Pro $a \neq 0$ není omezená.

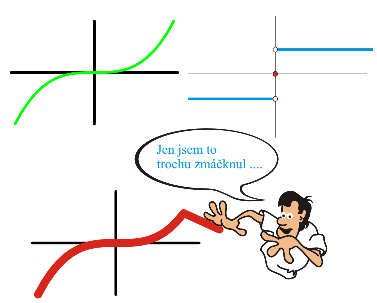
Obecná exponenciální funkce a^x je rostoucí pro $a > 1$, konstantní pro $a = 1$, klesající pro $0 < a < 1$. Pro $a \neq 1$ není omezená.

Funkce $\log_a x$ je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$. Není omezená.

Funkce sin a cos jsou omezené funkce, tg ani cotg nejsou omezené funkce (ani shora ani zdola).

Funkce $1/x$ je omezená zdola na $(0, +\infty)$ a není tam omezená shora.

V následujícím obrázku náleží první graf funkci rostoucí, druhý graf funkci neklesající, třetí graf není grafem monotónní funkce.



Dirichletova a Riemannova funkce nejsou monotónní na žádném intervalu.

Konec příkladů 5.

Příklady 6:

Každá funkce tvaru x^{2k}, $k \in \mathbb{N}$, je ryze konvexní.

Konstantní funkce je konvexní i konkávní.

Funkce $1/x^2$ je ryze konvexní na $(-\infty, 0)$ i na $(0, +\infty)$ a není konvexní na svém definičním oboru (proč?).

Ze středoškolských znalostí o goniometrických funkcích se jejich konvexita nebo konkávita dokazují velmi složitě.

V kapitole o aplikacích derivací budou nalezeny metody, jak snadněji konvexitu zjišťovat. Nyní lze usoudit ze zkusmo nakreslených grafů, že funkce sin je ryze konkávní na $[0, \pi]$ a ryze konvexní na $[\pi, 2\pi]$ (u funkce cos jsou tyto vlastnosti posunuty o $\pi/2$ vlevo).

Funkce tg je konkávní na $(-\pi/2, 0)$ a konvexní na $(0, \pi/2)$ (jak je to u funkce cotg?).

Není snadné z definice ukázat, že obecná exponenciální funkce a^x je ryze konvexní pro $a \neq 1$. Velmi snadné je to z charakteristiky konvexity uvedené na konci následujících *Otázek*. Ukažte to.

Ukažte, že tutéž charakteristiku lze použít ke snadnému důkazu konvexity $\log_a$ pro $0 < a < 1$ a konkávity $\log_a$ pro $a > 1$.

Konec příkladů 6.

Příklady 7:

Funkce $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ má za definiční obor interval $\langle 0, \infty)$, i když se v těchto bodech rovná funkci $\sqrt{x^2} = |x|$, která je definovaná všude.

Podobně platí rovnost

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

v definičním oboru funkce na levé straně, tj pro $x \neq 1$, ale definiční obor funkce na pravé straně je celé $\mathbb{R}$.

Konec příkladů 7.

Příklady 8:

Funkce $\sqrt{\sin \sqrt{x^2 + 1}}$ je složení čtyř funkcí: $z = \sqrt{u}$, $u = \sin v$, $v = \sqrt{y}$, $y = x^2 + 1$.

Funkce $\sqrt{1 - x^2} + 1/x$ má za definiční obor intervaly $[-1, 0) \cup (0, 1]$, tj. společné body definičního oboru $[-1, 1]$ první funkce a definičního oboru $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ druhé funkce.

Složení Dirichletovy funkce se sebou je konstantní funkce.

Složení Riemannovy funkce se sebou je opět Riemannova funkce, tj., platí $f \circ f = f$ (takovou vlastnost má i identická funkce a funkce signum).

Funkce s touto vlastností se nazývají idempotentní (vzhledem ke skládání).

Konec příkladů 8.

Příklady 9:

Identická funkce $y = x$ má za inverzní funkci sebe samu, tedy opět identickou funkci.

Funkce $y = 1/x$ má za inverzní funkci také sebe samu.

Funkce $y = x^2$ nemá na $\mathbb{R}$ inverzní funkci (proč?), ale má inverzní funkci na $(-\infty, 0]$ nebo na $[0, \infty)$, a to $\operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}$ (tedy $\sqrt{x}$ pro $x > 0$).

Obecněji lze říci, že funkce $y = x^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$) má inverzní funkci na $[0, \infty)$ (je tam rostoucí) a funkce $y = x^{2k-1}$ ($k \in \mathbb{N}$) má inverzní funkci na $(-\infty, \infty)$ (je tam rostoucí), a to příslušnou odmocninu $\sqrt[2k]{x}$, resp. $\sqrt[2k+1]{x}$.

Logaritmická funkce $\log_a x$ a obecná exponenciální funkce a^x jsou navzájem inverzní (pro $a > 0, a \neq 1$).

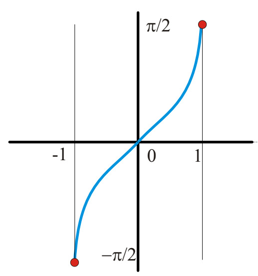
Cyklometrické funkce arcsin, arccos, arctg, arccotg

Goniometrické funkce nejsou prosté na svém definičním oboru, ale jen na jeho částech.

Jsou to však periodické funkce a jsou prosté na intervalech, z kterých lze funkce snadno dodefinovat na ostatních intervalech.

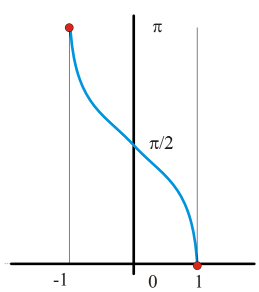
Ověření toho, že příslušné funkce jsou prosté na uvedených intervalech je lépe odsunout do další kapitoly, kde již budou k dispozici vhodnější nástroje.

Funkce $\sin$ je rostoucí na $[-\pi/2, \pi/2]$, tento interval zobrazuje na $[-1, 1]$. Na $[-1, 1]$ tedy existuje inverzní funkce (značí se $\arcsin$), která je rostoucí a zobrazuje $[-1, 1]$ na $[-\pi/2, \pi/2]$. Funkce $\arcsin x$ je konkávní na $(-1, 0)$ a konvexní na $(0, 1)$.



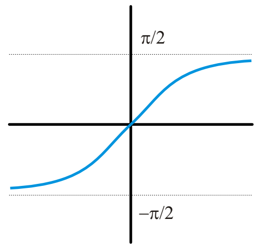
arkus sinus

Funkce $\cos$ je klesající na $[0, \pi]$, tento interval zobrazuje na $[-1, 1]$. Na $[-1, 1]$ tedy existuje inverzní funkce (značí se $\arccos$), která je klesající a zobrazuje $[-1, 1]$ na $[0, \pi]$. Funkce $\arccos$ je konvexní na $(-1, 0)$ a konkávní na $(0, 1)$.



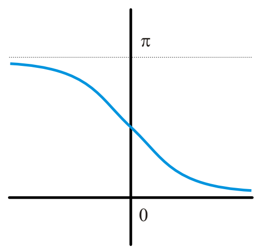
arkus cosinus

Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, tento interval zobrazuje na $(-\infty, +\infty)$. Na $(-\infty, +\infty)$ tedy existuje inverzní funkce (značí se arctg), která je rostoucí a zobrazuje $(-\infty, +\infty)$ na $(-\pi/2, \pi/2)$. Funkce $\operatorname{arctg} x$ je konvexní na $(-\infty, 0)$ a konkávní na $(0, +\infty)$.



arkus tangens

Funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$, tento interval zobrazuje na $(-\infty, +\infty)$. Na $(-\infty, +\infty)$ tedy existuje inverzní funkce (značí se $\mathrm{arccotg}$), která je klesající a zobrazuje $(-\infty, +\infty)$ na $(0, \pi)$. Funkce $\mathrm{arccotg}$ je konkávní na $(-\infty, 0)$ a konvexní na $(0, +\infty)$.



arkus cotangens

Konec příkladů 9.

OTÁZKY

Otázky 1:

Která přiřazení (např. tabulka) jsou funkcemi?

Zvolte si nějakou reálnou situaci a určete některé funkce, které jsou k této situaci přiřazeny.

Kde se u vzorečku pro plochu kruhu objeví funkce?

Zkoumejte funkci, která odpovídá digitálním hodinkám.

Lze někde v reálném světě najít Dirichletovu funkci?

Konec otázek 1.

Otázky 2:

Jaký je def. obor tangens, cotangens, $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt{x})^2$, $1/x$, $1/x^2$, $1/\sqrt{x}$?

Je funkce sgn (x) rovna funkci $|x|/x$?

Proč se nedefinuje cotangens jako převrácená hodnota tangens?

Teď si trochu pohrajeme :-)

*Lze sestrojit funkci, která má po zúžení na jakýkoliv interval za obor hodnot všechna přirozená (racionální, reálná) čísla?

Teď si trochu pospíme :-)

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Zjistěte, zda může být kružnice nebo parabola grafem funkce.

Kdy je kuželosečka grafem funkce?

Může být graf funkce podmnožinou tří rovnoběžek?

Jak se na podmnožině roviny pozná, zda se jedná o graf nějaké funkce?

Konec otázek 3.

Otázky 4:

Kdy je konstantní funkce sudá?

Kdy je konstantní funkce lichá?

Musí definiční obor sudé nebo liché funkce obsahovat číslo 0?

Náleží-li bod 0 do definičního oboru liché funkce, musí mít tato funkce v 0 hodnotu 0. Proč? Platí to i pro sudé funkce?

Ukažte, jak závisí sudost nebo lichost součtu či součinu dvou funkcí f, g na obdobných vlastnostech f, g.

Zachovává se sudost a lichost funkcí převrácenou hodnotou?

Je cotg lichá nebo sudá funkce?

Kdy je posunutí sudé nebo liché funkce opět funkce sudá nebo lichá?

Posunutí periodické funkce je periodická funkce.

Konec otázek 4.

Otázky 5:

Může být nějaká funkce současně neklesající i nerostoucí na nějakém intervalu?

Může být nějaká funkce současně rostoucí i nerostoucí na nějakém intervalu?

Co splňuje funkce, která není rostoucí? Musí být nerostoucí?

Je funkce $y = 1/x$ klesající na svém definičním oboru? A na intervalu $(-\infty, 0)$?

Může být graf omezené funkce neomezenou množinou v rovině?

Je-li graf funkce omezenou množinou v rovině, vyplývá z toho, že funkce je omezená?

Může být rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ omezená?

Může být sudá nebo lichá funkce monotónní?

Je funkce $\sqrt{x}$ (zdola, shora) omezená?

Je součet (součin) dvou rostoucích funkcí opět rostoucí?

Je složení dvou klesajících funkcí monotónní?

Má každá monotónní funkce inverzní funkci?

Kdo na sobě pracuje a řeší problémy, bude odměněn.

Konec otázek 5.

Otázky 6:

Může být nějaká funkce současně ryze konvexní i konkávní na nějakém intervalu?

Může být ryze konvexní funkce na $\mathbb{R}$ (nebo na $(0, \infty)$) omezená?

Je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ vždy konvexní?

Může být sudá nebo lichá funkce konvexní?

Ukažte, že funkce $\sqrt{x}$ je konkávní.

V podstatě je všechno jednoduché . . .

*Lze dokázat následující charakteristiku konvexních (a podobně konkávních, či ryzí konvexitu a konkávitu) funkcí, která ukazuje, že není třeba zkoumat všechny body úsečky $\{\lambda x + (1-\lambda)y); \lambda \in [0,1]\}$, ale jen její střed:
Funkce f je konvexní na intervalu J právě když pro každé $x < y$ z J platí $f((x+y)/2) \le \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

Ani nevím, jestli není potřeba omezenost funkce f. Vy to víte?

Konec otázek 6.

Otázky 7:

Ukažte, že pro libovolnou funkci f platí $|f| = f_+ + f_-$, kde $f_+ = \max(f,0)$, $f_- = \min(f,0)$ jsou po řadě kladná a záporná část funkce f.

Dokažte:

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\big((f+g) + |f-g|\big), \quad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}\big((f+g) - |f-g|\big).$$

Jaký je definiční obor polynomu? A jaký u racionální funkce? Jsou to vždy sjednocení otevřených intervalů (konečně mnoha)?

Jaký je definiční obor funkcí f_+, f_-?

Co je grafem funkcí f_+, f_- (např. pro $f = \sin$)?

Ukažte, že $f = f_+ - f_-$.

Ukažte, že $f_+ = (-f)_-$, $f_- = (-f)_+$.

Jde napsat absolutní hodnota jako maximum dvou racionálních funkcí?

Je součet (součin) dvou rostoucích funkcí opět rostoucí?

Je součet (součin) dvou konkávních funkcí opět konkávní?

Najděte reálnou situaci, kde se objeví kladná (záporná) část funkce.

Existuje dvojice racionálních funkcí, jejichž grafy se liší ve dvou (nebo konečně, nebo spočetně) bodech?

Konec otázek 7.

Otázky 8:

Najděte příklad dvou funkcí definovaných na všech kladných reálných číslech, jejichž složení má prázdný definiční obor.

Může být složení nekonstantních funkcí konstantní?

Musí být složení monotónních funkcí monotónní?

Se kterou funkcí je možné (nutné?) složit zadanou funkci, aby se tím nezměnila?

Je $|x|$ idempotentní funkc?

Lze absolutní hodnotu napsat jako složení odmocniny a druhé mocniny?

Ukažte, že je-li g sudá funkce a f je definována na oboru hodnot funkce g, je $f \circ g$ sudá. Platí obdobné tvrzení pro liché funkce?

Je složení dvou klesajících funkcí monotónní?

Je složení dvou konvexních funkcí konvexní?

Konec otázek 8.

Otázky 9:

Které polynomy mají inverzní funkci na $\mathbb{R}$?
Má lineárně lomená funkce $y = (ax + b)/(cx + d)$ inverzní funkci? ...

Které funkce jsou totožné se svou inverzní funkcí?

Ukažte, že inverzní funkce f^{-1} je lichá, právě když má stejnou vlastnost funkce f. Proč totéž nemůžeme tvrdit o sudých funkcích?

Má každá monotónní funkce inverzní funkci?

Promyslete si následující situaci. Jestliže definujete pro $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ funkci $x^{p/q}$ jako $\sqrt[q]{x^p}$, pak $\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = x^{2/6} = \sqrt[6]{x^2}$ a tato rovnost neplatí (např. pro $x = -1$). Pro která x tato rovnost platí? Jak je nutné rovnost upravit, aby platila pro každé reálné x (a pro libovolný zlomek p/q místo $1/3$)?

Konec otázek 9.

CVIČENÍ

Cvičení 1:
Konec cvičení 1.

Cvičení 2:
Konec cvičení 2.

Cvičení 3:
Konec cvičení 3.

Cvičení 4:
Konec cvičení 4.

Cvičení 5:
Konec cvičení 5.

Cvičení 6:
Konec cvičení 6.

Cvičení 7:
Konec cvičení 7.

Cvičení 8:
Konec cvičení 8.

Cvičení 9:

Funkce obecně

Při řešení úloh z matematické analýzy se neobejdeme bez důkladné znalosti ...

... matematické analýzy.

Neobejdeme se bez základních vlastností konstantních ($x \to c$), mocninných (x^n) a goniometrických ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$) funkcí a funkce exponenciální (e^x) a také funkcí k nim inverzních - odmocnin ($\sqrt[n]{x}$), cyklometrických funkcí ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$) a funkce logaritmické ($\ln x$).

Mezi tyto vlastnosti patří definiční obor, obor hodnot, intervaly monotonie, intervaly konvexnosti a konkávnosti, nulové body, hodnoty funkce ve významných bodech a také limity v krajních bodech definičního oboru.

Jsou to jenom pomocné pojmy. Klídek.

Velmi efektivním způsobem, jak si většinu těchto informací zapamatovat (či spíše kdykoli operativně zjistit), je zapamatovat si vzhled grafu příslušné funkce spolu s jeho polohou vůči osám x, y.

V případě, že nám graf některé funkce vypadne (stává se to zpočátku zejména u cyklometrických funkcí, se kterými vetšina studentů není obeznámena ze střední školy), lze často využít vztahu mezi grafy navzájem inverzních funkcí, totiž jejich symetrie podle osy prvního a třetího kvadrantu (neboli podle grafu identické funkce).

Procvičte si znalosti základních funkcí v následujících testech.

Uvědomte si například rozdíl mezi tvrzením, že *f je definována na množině M* a tvrzením, že *M je definičním oborem f*.

Jde samozřejmě o to, že v prvním případě všechny prvky množiny M náleží do definičního oboru, ale nemusí tomu být obráceně, neboli $M \subset \mathcal{D}(f)$; druhý případ konstatuje rovnost $M = \mathcal{D}(f)$).

Definiční obory

Úlohou, která bude uvádět značnou část příkladů z matematické analýzy, bude zjištění definičního oboru funkce, určené zadaným výrazem.

Pod tímto, důsledně vzato nesmyslným názvem (definiční obor je součástí definice funkce, pokud ho tedy neznáme, není funkce úplně zadána a definiční obor nelze nijak zjistit) rozumíme nalezení množiny všech reálných čísel, pro která má zadaný výraz smysl.

V principu jde o stanovení podmínek, za kterých vstupují do každé funkce pouze hodnoty z jejího definičního oboru.

Ze základních funkcí nejsou na celém $\mathbb{R}$ definovány funkce $\frac{1}{x}$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ a $\sqrt[n]{x}$ pro n sudé (funkci x^{-n} budeme chápat jako převrácenou hodnotu funkce x^n).

To jsou funkce, na které si dejte bacha.

Pokud zadaný výraz sestavený ze základních funkcí žádnou z předchozích funkcí neobsahuje, má smysl pro každé $x \in R$. V opačném případě zapíšeme podmínky smysluplnosti výrazu, tedy požadavek, aby argumenty funkcí náležely do jejich definičních oborů.

V praxi tak vznikne soustava nerovnic, jejímž řešením zjistíme požadovaný „definiční obor".

Uveďme jeden příklad:

Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{\sqrt{x \arcsin(2x-1)}}{\ln(2x^2+1)-\ln 2}$.

Funkce s neúplným definičním oborem se v zadaném výrazu objevují celkem čtyřikrát.

Začněme například od funkce arcsin. Jejím definičním oborem je $\langle -1, 1\rangle$, aby tedy měl výraz $\arcsin(2x - 1)$ smysl, musí platit $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$. Jednoduchou úpravou dospějeme k tomu, že tato podmínka bude splněna právě když $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Analogicky sestavíme další nerovnosti, které si výraz

$$f(x) = \frac{\sqrt{x \arcsin(2x-1)}}{\ln(2x^2+1)-\ln 2}$$

vynutí.

Odmocnina nám dá podmínku $x \arcsin(2x - 1) \geq 0$. Součin je nezáporný právě tehdy, jsou-li oba součinitele nezáporné nebo nekladné. Uvažujeme tedy dvě dvojice nerovností: $x \geq 0 \wedge \arcsin(2x - 1) \geq 0$ a druhou s opačnými nerovnostmi. Protože $\arcsin y \geq 0 \Leftrightarrow y \in \langle 0, 1\rangle$ a nerovnost $2x - 1 \leq 1$ již nemusíme uvažovat (byla zkoumána při řešení podmínky smysluplnosti arcsin), dospějeme přes nerovnost $2x - 1 \geq 0$

k závěru, že první dvojice nerovností je splněna právě když $x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. Druhá dvojice nerovností nám po stejné úpravě dá jediný bod, $x = 0$. Celkově je tedy podmínka smysluplnosti odmocniny splněna pro $x \in \{0\} \cup \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$.

Při řešení nerovnosti $2x^2 > -1$, vzniklé jako podmínka smysluplnosti logaritmu ve výrazu

$$f(x) = \frac{\sqrt{x \arcsin(2x - 1)}}{\ln(2x^2 + 1) - \ln 2}$$

zjistíme, že je splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$.

To docela šlo. Ještě kousek ...

Poslední podmínka, $\ln(2x^2 + 1) - \ln 2 \neq 0$, zajistí, že v hledaném definičním oboru výrazu

$$f(x) = \frac{\sqrt{x \arcsin(2x - 1)}}{\ln(2x^2 + 1) - \ln 2}$$

nenastane dělení nulou.

Nerovnost ekvivalentně převedeme až na vyjádření $x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, což představuje množinu $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, v praxi však v takovémto případě zpravidla ponecháme vyjádření nerovností.

V hledaném definičním oboru musí mít smysl všechny podvýrazy, získáme ho tedy jako průnik všech zjištěných množin.

Tím je v tomto případě množina $\mathcal{D}(f) = \{0\} \cup \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \rangle$.$\square$

Protože se hledání definičního oboru realizuje jako řešení soustavy nerovnic, je možnostmi jejich řešení omezena též možnost nalezení definičního oboru.

To je veledůležité. Když jsme na ty nerovnosti a rovnosti krátký, nic s tím nenaděláme.

Kupříkladu nerovnice $x + \ln x > 0$ je splněna na jistém intervalu (c, ∞), kde c, pro které platí $c + \ln c = 0$, je číslo mezi 0 a 1 (proč?).

Z této rovnosti definiční obor ovšem nelze pomocí základních funkcí vyjádřit.

Takové rovnosti (resp. nerovnosti), o nichž je známo, že mají řešení, avšak nelze ho vyjádřit, nazýváme transcendentní.

Důsledkem je, že například definiční obor funkce $\ln(x + \ln x)$ nelze explicitně vyjádřit.

Další možný problém ilustruje následující příklad: $f(x) = \sqrt{\sin(\pi x)} + \sqrt{\sin x}$. Zde můžeme $\mathcal{D}(f)$zapsat pouze jako průnik: $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k, 2k+1 \rangle \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$.

Obvyklého vyjádření pouze pomocí sjednocení (které v zápisu obsahuje pouze body, které do definičního oboru patří) zde nelze dosáhnout.

U libovolného (konečného) počtu intervalů $\mathcal{D}(f)$ lze samozřejmě krajní body určit, nelze však najít jejich obecné vyjádření.

Vlastnosti funkcí

Hledání inverzní funkce často vede na řešení rovnic.

Je-li $f(x) = y$, musíme k určení inverzní funkce k danému y jako parametru hledat x. To je tedy řešení rovnice.

Máme-li funkci $f(x) = x^2 + 1$, hledáme řešení rovnice $x^2 + 1 = y$, tedy $x = \pm\sqrt{y-1}$. To samo o sobě neurčuje inverzní funkci.

Tak lze na určitém definičním oboru definovat funkci $g(y) = \sqrt{y-1}$ a zkoumat, zda a kde je inverzní funkcí k f.

Sudost, lichost, monotonii a periodicitu si lehce zkontrolujeme.

Na monotonii se někdy musí s derivací, to ještě neumíme.

Na konvexitu zpravidla použijeme nástroje z dalších kapitol.

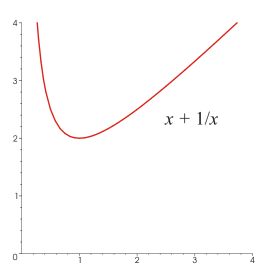
Příklad. Zkoumejte monotonii funkce

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

na $(0, \infty)$.

Řešení. Pokud $1 \le x \le y$, pak $1 \le xy$ a $0 \le y - x$. Poslední dvě nerovnosti vynásobíme a dostaneme $y - x \le (y - x)xy$, tedy $(y - x)/xy \le y - x$, $1/x - 1/y \le y - x$ a $x + 1/x \le y + 1/y$.

Tedy vpravo od 1 je funkce rostoucí, podobně se ukáže, že vlevo od 1 je klesající.



Ke zkoumání monotonie si v dalších kapitolách vybudujeme účinné nástroje.

Příklad. Nechť $f : X \to Y$, $A, |B, \subset X$. Rozhodněte, zda platí obecně vztahy

1. $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$
2. $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$
3. $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$.

Řešení. Ověřujeme jednotlivé inkluze.

Jde o jednoduchosti (ne všechny platí).

Vyřešili 4 z 10.

Příklad. Charakterizujte zobrazení $f : M \to L$, pro která platí

- $\forall\, A \subset M \;:\; f^{-1}(f(A)) \;=\; A$
- $\forall\, B \subset L \;:\; f(f^{-1}(B)) \;=\; B$

Jde v prvním případě o prostá zobrazení, v druhém případě o zobrazení na.

Jde o charakterizaci, tedy o to najít ekvivalentní výrok.

Vyřešili 2 z 10.

Příklad. Rozhodněte, zda je součet, součin, minimum, maximum a složení dvou monotónních funkcí opět monotónní.

Řešení. Je-li $x < y$, pak $f(x) < f(y)$, $g(x) < g(y)$, tedy $(f + g)(x) < (f + x)(y)$.

Víc v tom není ani v ostatních případech . . .

9 z 10.

Příklad. Dokažte, že $\sqrt{x^2 + 1}$ není polynom.

Řešení. Jde-li o polynom stupně n, platí $\sqrt{x^2 + 1} = ax^n + \cdots$, tedy po umocnění máme dva identické polynomy a ty musejí mít stejné koeficienty, tedy $n = 1$, $a = \pm 1$ a po chvilce dostaneme spor.

3 z 10.

Jak zní základní věta algebry? Polynom kladného stupně má kladný počet kořenů.

Dva polynomy se rovnají pouze v konečně mnoha bodech nebo jde o identické polynomy.

Konec cvičení 9.

UČENÍ

Učení 1:
Konec učení 1.

Učení 2:
Konec učení 2.

Učení 3:
Konec učení 3.

Učení 4:
Konec učení 4.

Učení 5:

$$x, y \in I,\ x < y,\ f(x) < f(y)$$

To je jednoduchý život!

Někdo tě okradl o kvantifikátory a podobné smetí. Jestli se ti takový život líbí, běž do holobytu a zavři se zevnitř.

Konec učení 5.

Učení 6:
Konec učení 6.

Učení 7:
Konec učení 7.

Učení 8:
Konec učení 8.

Učení 9:
Konec učení 9.