Funkce a základní pojmy popisující jejich chování

Pro zobrazení z reálných čísel do reálných čísel se používá termín reálná funkce reálné proměnné.

511

Funkce f bude v této části znamenat zobrazení nějaké neprázdné podmnožiny $D \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. předpis, který přiřazuje každému $x \in D$ přesně jedno reálné číslo $f(x)$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Množina D z definice funkce se nazývá definiční obor dané funkce (značí se $\mathcal{D}(f)$), čísla z D jsou (nezávisle) proměnné, příslušná přiřazená čísla jsou hodnoty (též nazývané závisle proměnné).

Množina všech hodnot dané funkce se nazývá její obor hodnot.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

DEFINICE. Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$ s definičním oborem D. Množina všech bodů v rovinném (x,y)–souřadnicovém systému, které mají souřadnice $(x, f(x))$, kde $x \in D$, se nazývá grafem funkce f.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

VLASTNOSTI FUNKCÍ

V této části budou zavedeny některé vlastnosti funkcí, které se hodí pro vyšetřování jejich průběhu. Vlastnosti jsou rozděleny podle použitých vlastností reálných čísel (aritmetické, uspořádání).

Použití aritmetických vlastností

V tomto případě se využívá aritmetických vlastností $\mathbb{R}$ (opačného prvku $-x$ k x a operace sčítání).

DEFINICE. Funkce f se nazývá sudá (nebo lichá), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $x \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-x \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-x) = f(x)$ (nebo $f(-x) = -f(x)$, resp.) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

511

511

DEFINICE. Funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ se nazývá periodická, jestliže existuje $p \in (0, +\infty)$ (nazývané perioda) tak, že $f(x + p) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Graf periodické funkce f s periodou p na intervalu $[np, (n + 1)p], n \in \mathbb{Z}$, vznikne posunutím grafu f na intervalu $[0, p]$ o np na ose x.

Při vyšetřování sudých, lichých nebo periodických funkcí není nutné vyšetřovat celý definiční obor, stačí se omezit na nezáporná čísla a u periodických funkcí s kladnou periodou p jen na interval $[0, p]$.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Použití uspořádání na $\mathbb{R}$

DEFINICE. Funkce f definovaná na intervalu I se nazývá rostoucí (nebo klesající, nebo neklesající, nebo nerostoucí), jestliže $f(x) < f(y)$ (nebo $f(x) > f(y)$, nebo $f(x) \leq f(y)$, nebo $f(x) \geq f(y)$, resp.) jakmile $x, y \in \mathcal{D}(f), x < y$.

DEFINICE. Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá ryze monotónní; funkce, která je neklesající nebo nerostoucí, se nazývá monotónní.

DEFINICE. Říkáme, že funkce f je omezená (nebo shora omezená, nebo zdola omezená), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(x)| \leq k$ (nebo $f(x) \leq k$, nebo $f(x) \geq k$, resp.) pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$.

511

POZOROVÁNÍ.

1. Funkce f je rostoucí (nebo neklesající) právě když je funkce $-f$ klesající (resp. nerostoucí).
2. Posunutím grafu monotónní funkce získáme opět graf monotónní funkce (stejného druhu).

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 5

Konvexita

DEFINICE. Funkce f definovaná na intervalu J se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in J$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí vztah

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

Platí-li v uvedeném vztahu vždy ostrá nerovnost, nazývá se f ryze konvexní.

Obrátíme-li v uvedeném vztahu nerovnost, dostáváme funkci (ryze) konkávní.

Nerovnost v definici konvexity funkce znamená, že úsečka spojující dva body grafu leží celá nad grafem nebo na grafu (leží-li celá, kromě koncových bodů, nad grafem, je to ryzí konvexita):

POZOROVÁNÍ.

1. Funkce f je (ryze) konvexní právě když $-f$ je (ryze) konkávní.

2. Posunutí (ryze) konvexní funkce je (ryze) konvexní funkce.

3. Funkce f je na intervalu I konvexní právě když pro libovolné tři body $u < v < w$ z intervalu I platí

$$f(v)(w-u) \leq f(w)(v-u) + f(u)(w-v)$$

neboli

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w)-f(v)}{w-v}\,.$$

Chování konvexních funkcí ilustrují obrázky:

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

VYTVÁŘENÍ NOVÝCH FUNKCÍ

Ze známých funkcí lze pomocí různých operací vytvořit další funkce.

Zajímavá je otázka, které ze zavedených vlastnosti se přenášejí z generující funkce na nově vzniklé funkce.

V následujících třech částech je definováno vytváření nových funkcí pomocí aritmetických operací a uspořádání na reálných číslech a pomocí skládání a inverzní operace.

Později budou přidány další operace (např. umocňování funkcemi, derivace, integrace).

Skládání a tvoření inverze je vlastnost obecných zobrazení.

Pro aritmetické operace se zobrazeními je potřeba, aby v jejich oboru hodnot byly tyto aritmetické operace definovány.

Podobně pro operace pomocí uspořádání musí na oboru hodnot uspořádání existovat.

Použití aritmetických operací $\mathbb{R}$

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce, budou značit $f+g$, $f \cdot g$, f/g funkce, které mají za hodnotu v bodě x postupně $f(x)+g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$.

Ve výrazu $k \cdot f$ můžeme číslo k chápat jako konstantní funkci na $\mathbb{R}$ s hodnotou k a potom je funkce $k \cdot f$ speciálním případem násobení funkcí, tj. $(k \cdot f)(x) = kf(x)$.

Stejně tak je rozdíl funkcí $f-g$ speciálním případem součtu funkcí f a $-g = (-1) \cdot g$.

Polynom je funkce tvaru

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla (jestliže $a_n \neq 0$, nazývá se n stupeň polynomu).

Podíl dvou polynomů se nazývá racionální funkce.

Použití uspořádání $\mathbb{R}$

DEFINICE. Pro funkce f, g se definuje $\max\{f, g\}$ (nebo $\min\{f, g\}$) jako funkce, která má v bodě x hodnotu $\max\{f(x), g(x)\}$ (resp. $\min\{f(x), g(x)\}$).

511

Pro funkci f se definují funkce $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = -\min\{f, 0\}$, tzv. kladná nebo záporná část funkce f.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

Skládání funkcí

Skládání funkcí je velmi důležité a s jeho použitím lze sestrojit mnoho důležitých složitějších funkcí pomocí jednoduchých funkcí.

DEFINICE. Složení $f \circ g$ dvou funkcí f, g se definuje jako funkce, která má v bodě x hodnotu $f(g(x))$.

Funkce g se pak někdy nazývá vnitřní funkcí a f vnější funkcí. Např. $|f|$ (absolutní hodnota funkce f) je složení funkce f (vnitřní funkce) a funkce absolutní hodnota (vnější funkce).

Definiční obor tohoto složení jsou právě ty body x z definičního oboru funkce g, pro které náleží $g(x)$ do definičního oboru funkce f. Symbolicky lze napsat

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}(g) \cap g^{-1}(\mathcal{D}(f)) \,.$$

Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8

Inverzní funkce

Inverzní funkce jsou důležitým nástrojem při řešení rovnic. I když někdy nedovedeme inverzní funkci přesně napsat, dovedeme popsat její vlastnosti a s jejich pomocí popsat i řešení rovnice.

DEFINICE. Je-li f prostá funkce definovaná na množině D s oborem hodnot E, pak funkce, která přiřadí bodu $y \in E$ ten jediný bod $x \in D$, pro který je $f(x) = y$, se nazývá inverzní funkce k f a značí se f^{-1}.

Pokud se nakreslí grafy funkce $y = f(x)$ a funkce k ní inverzní y=$f^{-1}(x)$ do stejné souřadnicové soustavy, vyjdou grafy symetrické podle osy prvního kvadrantu.

511

POZOROVÁNÍ.

1. Pro prostou funkci f je definiční obor funkce f^{-1} totožný s oborem hodnot funkce f a platí

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \text{ pro } y \in \mathcal{D}(f^{-1}) \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ pro } x \in \mathcal{D}(f) .$$

2. Jestliže f má inverzní funkci f^{-1}, pak f je inverzní funkcí k f^{-1}.

3. Každá ryze monotónní funkce má inverzní funkci.

4. Inverzní funkce f^{-1} je rostoucí (nebo klesající), právě když je funkce f rostoucí (nebo klesající, resp.)

5. Inverzní funkce f^{-1} je konvexní (nebo konkávní), právě když je funkce f konkávní (nebo konvexní, resp.).

Poznámky 9 Příklady 9 Otázky 9 9

DALŠÍ MOŽNOSTI POPISU FUNKCÍ

Existují i jiné možnosti, jak zadávat funkce. Dále uvedené možnosti zadávají funkce po částech, ale jiným způsobem, než bylo uvedeno po definici funkce. Důkaz, že se jedná opravdu o „kousky" funkcí, je náročnější a bude uveden až v teorii funkcí dvou proměnných.

Předpis $y^2 = 1 - x^2$, neboli $x^2 + y^2 - 1 = 0$, nedefinuje funkci (proč?). Nicméně množina bodů (x, y) v rovině splňujících uvedenou rovnost tvoří kružnici s poloměrem 1 o středu v počátku a jedná se o důležitou křivku, která je zadaná jednoduchým způsobem a je složena z grafů dvou funkcí (horní a dolní polokružnice). Podobných případů je více a jsou důležité.

Rovnost $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je funkce dvou reálných proměnných x, y, se nazývá implicitně zadaná funkce (krátce implicitní funkce) a rozumí se, že na jistých intervalech je y funkcí x, např. $y = g(x)$, přičemž na daném intervalu je $f(x, g(x)) = 0$. Grafem implicitně zadané funkce je $\{(x, y); f(x, y) = 0\}$.

Tento termín *implicitní funkce* je nutné chápat vcelku, nikoli jako složení dvou slov *implicitní* a *funkce*.

Dalšími příklady jsou $y^2 = x$ (parabola), $y^2 - x^2 = 1$ (hyperbola), $(x - y)^4 = 4(x^2 + y^2)$ (kardioida).

Mnoho těchto křivek lze zadat v jistém smyslu jednodušeji pomocí parametru. Na příklad kardioida je zadána jako

$$x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \text{ pro } t \in \langle 0, 2\pi\rangle .$$

Obecně tedy lze definovat parametricky zadanou funkci předpisem

$$x = \varphi(t) , \quad y = \psi(t) , \quad t \in J ,$$

kde $\varphi(t), \psi(t)$ jsou reálné funkce definované na množině (většinou intervalu) J. Grafem parametricky zadané funkce je $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in J\}$.

Stejně jako u implicitních funkcí je nutné brát termín *parametricky zadaná funkce* vcelku.

Dalším příkladem může být elipsa:

$$x = a\cos t , \quad y = b\sin t , \quad t \in [0, 2\pi) ,$$

kde $a, b > 0$ jsou délky poloos.

Opět lze ukázat, že části parametricky zadané funkce jsou funkcemi.

Speciálním případem parametricky zadané funkce je zadání pomocí polárních souřadnic r, φ, kde r (vzdálenost bodu křivky od počátku) je popsáno nějakou funkcí $r = h(\varphi)$ úhlu mezi průvodičem bodu a osou x.

Protože $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, dostane se parametrické zadání

$$x = h(\varphi)\cos\varphi, \quad y = h(\varphi)\sin\varphi , \quad \varphi \in J .$$

Někdy (viz následující příklad lemniskaty) může být příslušná funkce popisující závislost r na φ zadána implicitně.

Kružnice

implicitně: $x^2 + y^2 = a^2$
parametricky: $x = a\cos t, y = a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$
polárně: $r = a$

Kardioida

implicitně: $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$
parametricky: $x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$
polárně: $r = 2a(1 + \cos\varphi)$

Lemniskata

implicitně: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
parametricky: $x = \frac{at(1+t^2)}{1+t^4}, \quad y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^4}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$
polárně: $r^2 = a^2\cos(2\varphi)$