

# Spojitosť funkce



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Spojitosť funkce



Spojitosť je nejdůležitější obecná vlastnost funkcí. Umožňuje aproximace různých řešení. Je důležité vědět, kdy se malá změna nějakého měření projeví málo na konečném výsledku. Zpřesňuje-li se měření, měl by se příslušný počítaný výsledek blížit k přesnému výsledku. To vyjadřuje následující definice, která je zformulována pro funkce s obecným definičním oborem. Pro představu a základní použití je třeba mít na mysli funkce definované na intervalu.

## LEKCE05-SPO

### Spojitosť definice

- základy
- spojitosť s okolními
- spojitosť a konstrukce
- spojitosť
- součtu, max, ...
- spojitosť složení
- spojitosť inverze

### nespojitosť

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojitosť
- mon.funkce

### spojitosť na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojitosť a konvexita periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITOST POMOCÍ POSLOUPNOSTÍ

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je funkce,  $a \in \mathcal{D}(f)$ , a pro jakoukoli posloupnost  $\{x_n\}$  z  $\mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  necht'  $\lim f(x_n) = f(a)$ . Pak říkáme, že  $f$  je **spojitá v bodě**  $a$  a tento bod se nazývá **bodem spjitosti** funkce  $f$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolími

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojitést

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitést

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITOST POMOCÍ POSLOUPNOSTÍ

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je funkce,  $a \in \mathcal{D}(f)$ , a pro jakoukoli posloupnost  $\{x_n\}$  z  $\mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  necht'  $\lim f(x_n) = f(a)$ . Pak říkáme, že  $f$  je **spojitá v bodě**  $a$  a tento bod se nazývá **bodem spjitosti** funkce  $f$ .



Je-li  $f$  spjitá v každém bodě svého definičního oboru, říkáme, že  $f$  je **spjitá**.



## LEKCE05-SPO

Spjitost  
definice

základy  
spjitost s okolními  
spjitost a konstrukce  
spjitost  
součtu, max, ...  
spjitost složení  
spjitost inverze

nespjitost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespjitost  
mon.funkce

spjitost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spji-  
tost

spjitost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITOST POMOCÍ POSLOUPNOSTÍ

**DEFINICE.** Necht'  $f$  je funkce,  $a \in \mathcal{D}(f)$ , a pro jakoukoli posloupnost  $\{x_n\}$  z  $\mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  necht'  $\lim f(x_n) = f(a)$ . Pak říkáme, že  $f$  je **spojitá v bodě**  $a$  a tento bod se nazývá **bodem spjitosti** funkce  $f$ .



Je-li  $f$  spjitá v každém bodě svého definičního oboru, říkáme, že  $f$  je **spojitá**.



Na tuhle definici si dejte pozor!!! Jestliže se posloupnost blíží k  $a$ , pak se blíží funkční hodnoty k  $f(a)$ .

## LEKCE05-SPO

Spjitost  
definice

základy  
spjitost s okolními  
spjitost a konstrukce  
spjitost  
součtu, max, ...  
spjitost složení  
spjitost inverze

nespjitost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespjitost  
mon.funkce

spjitost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina

Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spji-  
tost

spjitost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jestliže se v definici berou jen posloupnosti s prvky  $x_n \geq a$  (nebo  $x_n \leq a$ ), hovoří se o **spojitosti zprava** (resp. **spojitosti zleva**), dohromady o tzv. jednostranných spojitostech (spojitosti se pak říká oboustranná spojitost).



## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolími

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojitost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitost

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojitost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li  $f$  spojitá v každém bodě množiny  $A$ , říkáme, že  $f$  je **spojitá na množině  $A$** .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

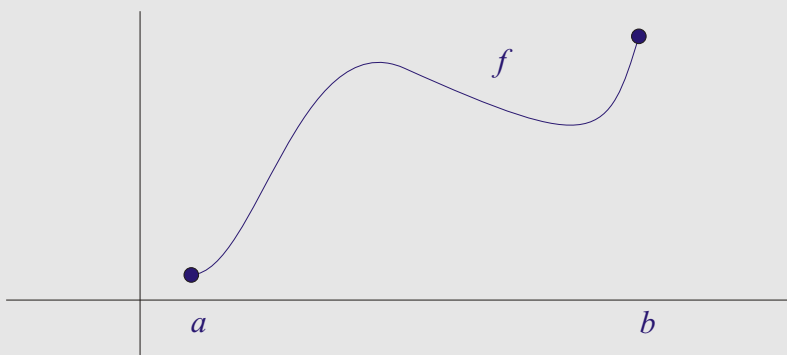
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Základní snaha je popsat děje, které probíhají plynule. Grafem spojité funkce by měla být souvislá čára.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

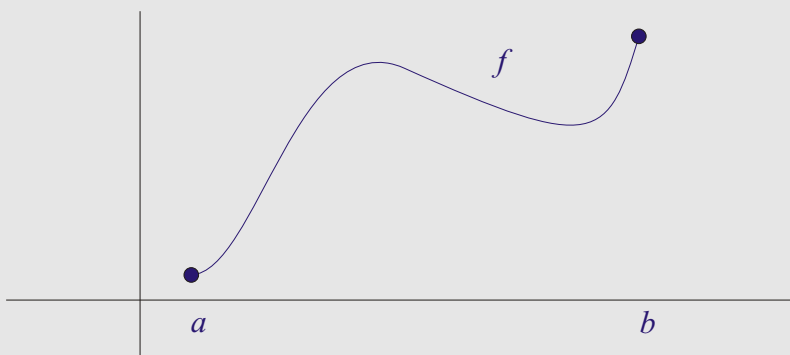
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Základní snaha je popsat děje, které probíhají plynule. Grafem spojité funkce by měla být souvislá čára.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takhle si kreslíme obecnou spojitou funkci.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

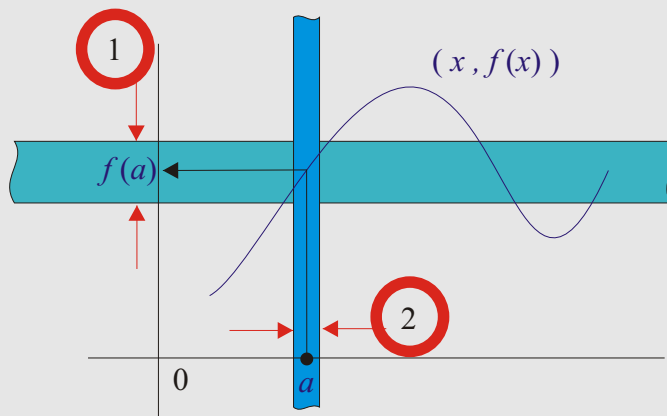
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chceme, aby se k dané přesnosti výsledku dalo dopracovat přiblížením ke zkoumanému bodu.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon. funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

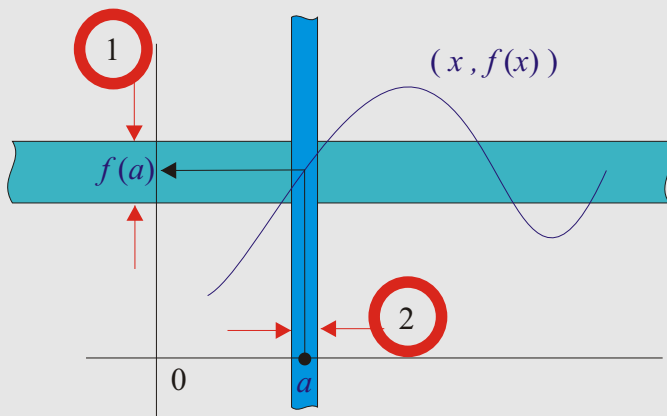
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chceme, aby se k dané přesnosti výsledku dalo dopracovat přiblížením ke zkoumanému bodu.



Napřed nastavíme přesnost (1) a pak najdeme malé okolí (2), kde se již přesnosti dosahuje.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

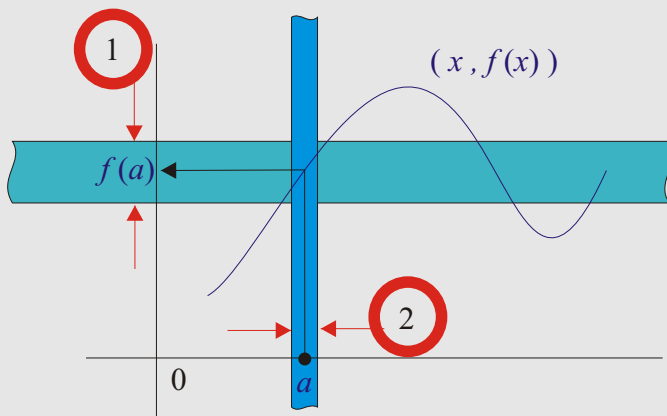
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Chceme, aby se k dané přesnosti výsledku dalo dopracovat přiblížením ke zkoumanému bodu.



Napřed nastavíme přesnost (1) a pak najdeme malé okolí (2), kde se již přesnosti dosahuje.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tuto strategii uplatňujeme pro jednotlivé posloupnosti. Chápete jak? Po čase zjistíme, že to jde uplatňovat globálně na všechny body v okolí (2).



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

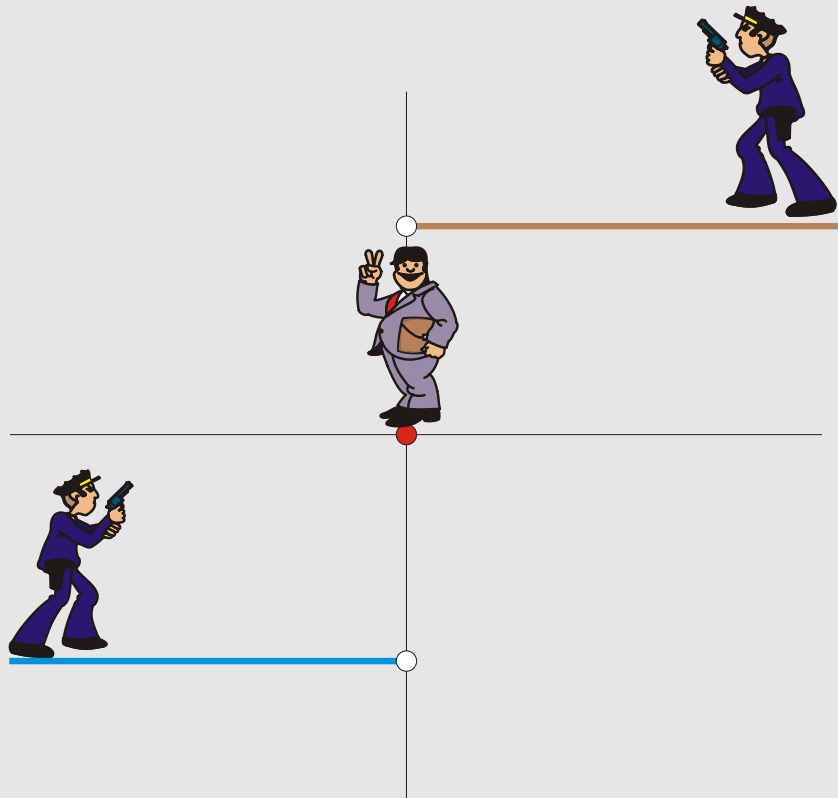
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

To, čemu má spojitost zabránit, je situace, kdy hodnota v daném bodě „uteče“ svému okolí.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9







K funkční hodnotě (zločinci) se takhle nedostaneme.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

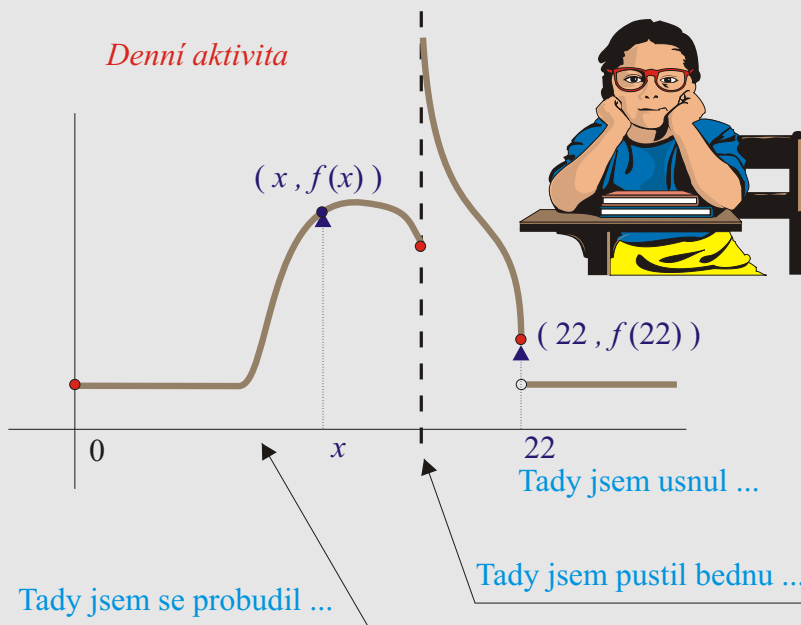
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že běžná funkce může mít body spojitosti i jiné body.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

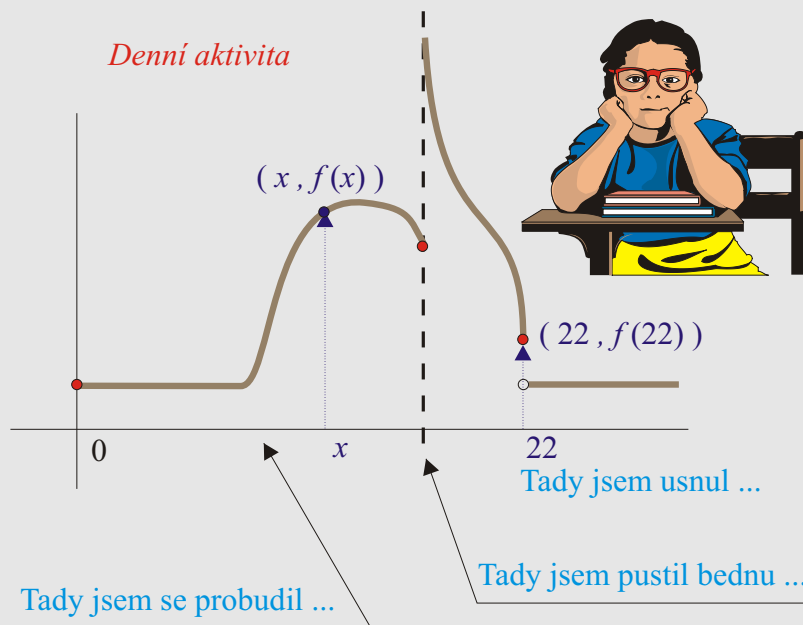
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že běžná funkce může mít body spjitosti i jiné body.



Jak se v životě snadno najde bod nespojitosti. Po puštění bedny jsi jiný člověk.

## LEKCE05-SPO

### Spojítost

#### definice

##### základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

##### spojítost

součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

#### nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

#### spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

#### spojítost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

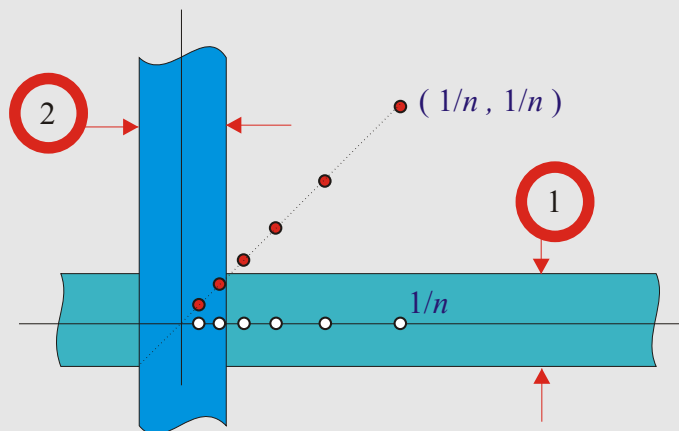
1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spojitosť lze zkoumat v jediném bodě.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

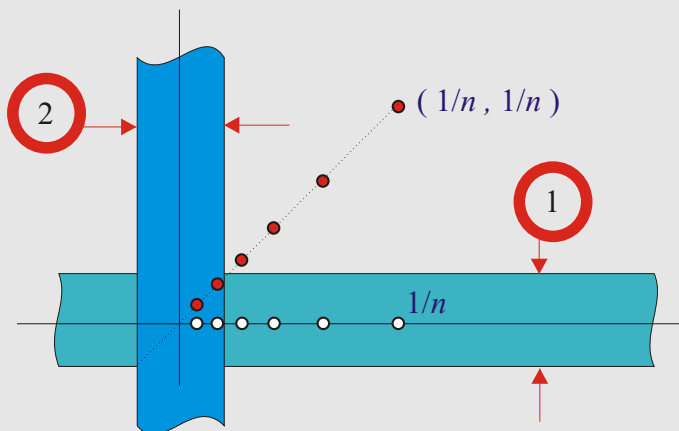
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojítost lze zkoumat v jediném bodě.



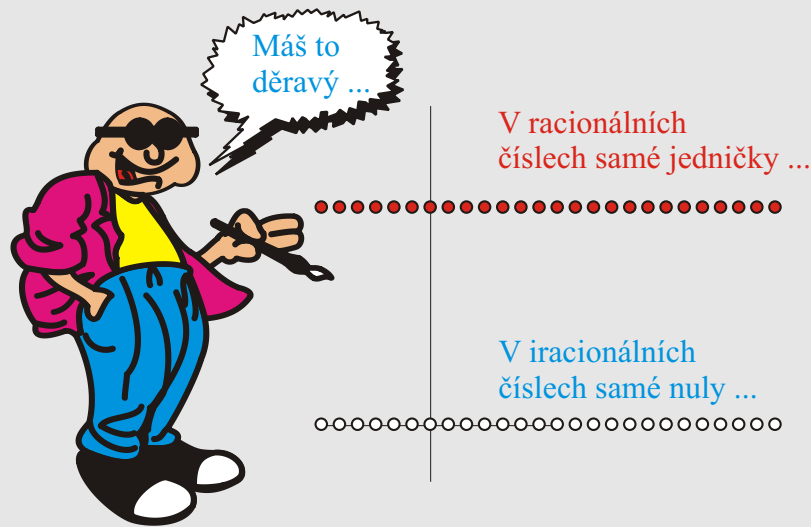
Funkce spojitá v počátku.  
Nejprve si určíme toleranci (1), pak si najdeme okolí (2) bodu, v němž dosahujeme danou toleranci.

## LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
- spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojítost
  - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze mono-
  - tónní
  - monotonie a spoji-
  - tost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Funkce nemusí mít žádný bod spojitosti.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

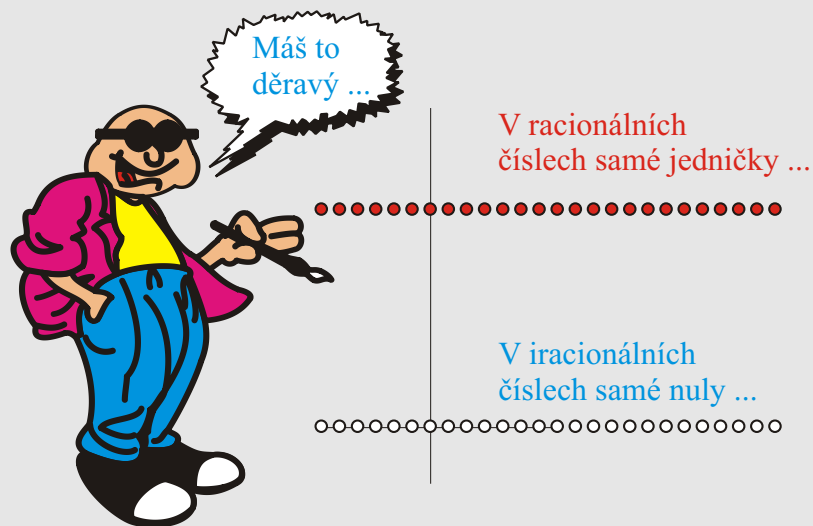
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce nemusí mít žádný bod spojitosti.



Dirichletova funkce není nikde spojitá. Libovolně blízko libovolného bodu jsou racionální i iracionální body a tedy hodnoty 0 a 1.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

**POZOROVÁNÍ.**

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. V definici spojitosti lze brát jen ryze monotónní posloupnosti, tj.  $f$  je spojitá v  $a \in \mathcal{D}(f)$  jestliže pro každou rostoucí nebo klesající posloupnost  $\{x_n\}$  z  $\mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  je  $\lim f(x_n) = f(a)$ . (Viz poznámku o [výběru monotónních podposloupností](#).)



## LEKCE05-SPO

### Spojitost definice

základy

spojitost s okolními

### spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

### nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

### spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

### monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

### spojitost a konvexita periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



1. V definici spojitosti lze brát jen ryze monotónní posloupnosti, tj.  $f$  je spojitá v  $a \in \mathcal{D}(f)$  jestliže pro každou rostoucí nebo klesající posloupnost  $\{x_n\}$  z  $\mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  je  $\lim f(x_n) = f(a)$ . (Viz poznámku o [výběru monotónních podposloupností](#).)



2. Funkce  $f$  je spojitá zprava (nebo zleva) v  $a$ , právě když pro každou klesající (resp. rostoucí) posloupnost  $\{x_n\}$  s  $\lim x_n = a$  je  $\lim f(x_n) = f(a)$ .



## LEKCE05-SPO

### Spojitost definice

- základy
- spojitost s okolími
- spojitost a konstrukce
- spojitost
  - součtu, max, ...
  - spojitost složení
  - spojitost inverze

### nespojitost

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojitost
- mon.funkce

### spojitost na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-  
tónní
- monotonie a spoji-  
tost

### spojitost a konvexita periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. V definici spojitosti lze brát jen ryze monotónní posloupnosti, tj.  $f$  je spojitá v  $a \in \mathcal{D}(f)$  jestliže pro každou rostoucí nebo klesající posloupnost  $\{x_n\}$  z  $\mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  je  $\lim f(x_n) = f(a)$ . (Viz poznámku o [výběru monotónních podposloupností](#).)



2. Funkce  $f$  je spojitá zprava (nebo zleva) v  $a$ , právě když pro každou klesající (resp. rostoucí) posloupnost  $\{x_n\}$  s  $\lim x_n = a$  je  $\lim f(x_n) = f(a)$ .



3. Funkce je v nějakém bodě spojitá právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITOST POMOCÍ OKOLÍ



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolími

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je velmi důležité. Ukazuje ekvivalenci definice spojitosti pomocí spočetných množin (posloupností) s definicí pomocí okolí, tj. pomocí nespočetných množin, t.j. množin zdánlivě jiného charakteru.

**VĚTA.** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in \mathcal{D}(f)$  právě když pro každé okolí  $U$  bodu  $f(a)$  existuje okolí  $V$  bodu  $a$  takové, že  $f(x) \in U$  jakmile  $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je velmi důležité. Ukazuje ekvivalenci definice spojitosti pomocí spočetných množin (posloupností) s definicí pomocí okolí, tj. pomocí nespočetných množin, t.j. množin zdánlivě jiného charakteru.

**VĚTA.** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in \mathcal{D}(f)$  právě když pro každé okolí  $U$  bodu  $f(a)$  existuje okolí  $V$  bodu  $a$  takové, že  $f(x) \in U$  jakmile  $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$ .



**Důkaz.** Důkaz bude veden sporem v obou směrech.

Jestliže  $f$  není spojitá v  $a$  pak existuje  $x_n \rightarrow a, x_n \in \mathcal{D}(f)$  tak, že  $f(x_n)$  nekonverguje k  $f(a)$ . Podle vlastnosti konvergence posloupnosti existuje okolí  $U$  bodu  $f(a)$  tak, že pro nekonečně mnoho indexů  $n$  je  $f(x_n) \notin U$ . Ale každé okolí  $V$  bodu  $a$  obsahuje skoro všechna  $x_n$  a tedy existuje bod  $x_n$  z  $V$  tak, že  $f(x_n) \notin U$ .

Nechť nyní existuje okolí  $U$  bodu  $f(a)$  takové, že pro každé okolí  $V$  bodu  $a$  existuje bod  $x_V \in V, x_V \in \mathcal{D}(f)$  s vlastností  $f(x_V) \notin U$ . Za okolí  $V$  lze postupně volit např. intervaly  $(a - 1/n, a + 1/n)$  a označit příslušné body  $x_V$  jako  $x_n$ . Je zřejmé, že  $\lim x_n = a$  ale  $\lim f(x_n) \neq f(a)$  protože všechny body  $f(x_n)$  leží mimo okolí  $U$  bodu  $f(a)$ .  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složením

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je velmi důležité. Ukazuje ekvivalenci definice spojitosti pomocí spočetných množin (posloupností) s definicí pomocí okolí, tj. pomocí nespočetných množin, t.j. množin zdánlivě jiného charakteru.

**VĚTA.** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in \mathcal{D}(f)$  právě když pro každé okolí  $U$  bodu  $f(a)$  existuje okolí  $V$  bodu  $a$  takové, že  $f(x) \in U$  jakmile  $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$ .



**Důkaz.** Důkaz bude veden sporem v obou směrech.

Jestliže  $f$  není spojitá v  $a$  pak existuje  $x_n \rightarrow a, x_n \in \mathcal{D}(f)$  tak, že  $f(x_n)$  nekonverguje k  $f(a)$ . Podle vlastnosti konvergence posloupnosti existuje okolí  $U$  bodu  $f(a)$  tak, že pro nekonečně mnoho indexů  $n$  je  $f(x_n) \notin U$ . Ale každé okolí  $V$  bodu  $a$  obsahuje skoro všechna  $x_n$  a tedy existuje bod  $x_n$  z  $V$  tak, že  $f(x_n) \notin U$ .

Nechť nyní existuje okolí  $U$  bodu  $f(a)$  takové, že pro každé okolí  $V$  bodu  $a$  existuje bod  $x_V \in V, x_V \in \mathcal{D}(f)$  s vlastností  $f(x_V) \notin U$ . Za okolí  $V$  lze postupně volit např. intervaly  $(a - 1/n, a + 1/n)$  a označit příslušné body  $x_V$  jako  $x_n$ . Je zřejmé, že  $\lim x_n = a$  ale  $\lim f(x_n) \neq f(a)$  protože všechny body  $f(x_n)$  leží mimo okolí  $U$  bodu  $f(a)$ .  $\diamond$



Jestliže se použijí jen **symetrické intervaly** okolo příslušného bodu (každé okolí obsahuje takový interval), dostane se následující, tzv.  $\varepsilon$ - $\delta$  charakterizace spojitosti.

**DŮSLEDEK.** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in \mathcal{D}(f)$  právě když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  jakmile  $|x - a| < \delta, x \in \mathcal{D}(f)$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složením

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je velmi důležité. Ukazuje ekvivalenci definice spojitosti pomocí spočetných množin (posloupností) s definicí pomocí okolí, tj. pomocí nespočetných množin, t.j. množin zdánlivě jiného charakteru.

**VĚTA.** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in \mathcal{D}(f)$  právě když pro každé okolí  $U$  bodu  $f(a)$  existuje okolí  $V$  bodu  $a$  takové, že  $f(x) \in U$  jakmile  $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$ .



**Důkaz.** Důkaz bude veden sporem v obou směrech.

Jestliže  $f$  není spojitá v  $a$  pak existuje  $x_n \rightarrow a, x_n \in \mathcal{D}(f)$  tak, že  $f(x_n)$  nekonverguje k  $f(a)$ . Podle vlastnosti konvergence posloupnosti existuje okolí  $U$  bodu  $f(a)$  tak, že pro nekonečně mnoho indexů  $n$  je  $f(x_n) \notin U$ . Ale každé okolí  $V$  bodu  $a$  obsahuje skoro všechna  $x_n$  a tedy existuje bod  $x_n$  z  $V$  tak, že  $f(x_n) \notin U$ .

Nechť nyní existuje okolí  $U$  bodu  $f(a)$  takové, že pro každé okolí  $V$  bodu  $a$  existuje bod  $x_V \in V, x_V \in \mathcal{D}(f)$  s vlastností  $f(x_V) \notin U$ . Za okolí  $V$  lze postupně volit např. intervaly  $(a - 1/n, a + 1/n)$  a označit příslušné body  $x_V$  jako  $x_n$ . Je zřejmé, že  $\lim x_n = a$  ale  $\lim f(x_n) \neq f(a)$  protože všechny body  $f(x_n)$  leží mimo okolí  $U$  bodu  $f(a)$ .  $\diamond$



Jestliže se použijí jen **symetrické intervaly** okolo příslušného bodu (každé okolí obsahuje takový interval), dostane se následující, tzv.  $\varepsilon$ - $\delta$  charakterizace spojitosti.

**DŮSLEDEK.** Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a \in \mathcal{D}(f)$  právě když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  jakmile  $|x - a| < \delta, x \in \mathcal{D}(f)$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složením

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To je jen tak pro dětičky.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





To je jen tak pro dětičky.



Já v tom cítím, že se budou dokazovat nějaké nerovnosti s absolutními hodnotami. Cítím to v kostech.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To je jen tak pro dětičky.



Já v tom cítím, že se budou dokazovat nějaké nerovnosti s absolutními hodnotami. Cítím to v kostech.



Naštěstí se v praxi spojitost většinou zjišťuje velmi jednoduše pomocí různých vět a větiček.

## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolními  
spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A podle mých zkušeností se nespojitosti dosáhne jenom dělením nulou, nebo nešikovným odmocňováním.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímo z definice spojitosti plyne následující jednoduché ale důležité tvrzení (dokažte).

**VĚTA.** Je-li  $f$  spojitá v  $a$  a  $f(a) > 0$ , pak existuje okolí  $U$  bodu  $a$  tak, že pro všechna  $x \in U \cap \mathcal{D}(f)$  je  $f(x) > 0$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolími

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojitost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitost

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímo z definice spojitosti plyne následující jednoduché ale důležité tvrzení (dokažte).

**VĚTA.** Je-li  $f$  spojitá v  $a$  a  $f(a) > 0$ , pak existuje okolí  $U$  bodu  $a$  tak, že pro všechna  $x \in U \cap \mathcal{D}(f)$  je  $f(x) > 0$ .



To je OBROVSKÁ věta.



## LEKCE05-SPO

Spojitost

definice

základy

spojitost s okolími

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojitost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitost

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímo z definice spojitosti plyne následující jednoduché ale důležité tvrzení (dokažte).

**VĚTA.** Je-li  $f$  spojitá v  $a$  a  $f(a) > 0$ , pak existuje okolí  $U$  bodu  $a$  tak, že pro všechna  $x \in U \cap \mathcal{D}(f)$  je  $f(x) > 0$ .



To je OBROVSKÁ věta.



Vrána k vráně sedá, rovný rovného si hledá. Mezi blízkými známými kladného hrdiny najdete jenom samý klad'asy, to je fakt.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# SPOJITOST A KONSTRUKCE FUNKCÍ

Nyní bude vidět, jak je výhodné dokazovat obecná tvrzení pro obecné funkce.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# SPOJITOST A KONSTRUKCE FUNKCÍ

Nyní bude vidět, jak je výhodné dokazovat obecná tvrzení pro obecné funkce.



Následující tvrzení ukazují, že konstrukce nových funkcí zavedené v předchozí části, zachovávají spojitost.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITOST A KONSTRUKCE FUNKCÍ

Nyní bude vidět, jak je výhodné dokazovat obecná tvrzení pro obecné funkce.



Následující tvrzení ukazují, že konstrukce nových funkcí zavedené v předchozí části, zachovávají spojitost.



Z těchto tvrzení ihned vyplývá spojitost mnoha funkcí bez dalšího dokazování.



## LEKCE05-SPO

Spojité  
definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Jsou-li funkce  $f, g$  spojité v bodě  $a$ , jsou i funkce  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  a v případě  $g(a) \neq 0$  i funkce  $f/g$  spojité v bodě  $a$ .



## LEKCE05-SPO

### Spojitosť

#### definice

základy

spojitosť s okolními

#### spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

#### nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

#### spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

#### spojitosť a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Jsou-li funkce  $f, g$  spojité v bodě  $a$ , jsou i funkce  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  a v případě  $g(a) \neq 0$  i funkce  $f/g$  spojité v bodě  $a$ .



Maximum, minimum, součet, součin a podíl spojitých funkcí jsou spojité funkce.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Jsou-li funkce  $f, g$  spojité v bodě  $a$ , jsou i funkce  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  a v případě  $g(a) \neq 0$  i funkce  $f/g$  spojité v bodě  $a$ .



Maximum, minimum, součet, součin a podíl spojitých funkcí jsou spojité funkce.



Jak jsem říkal, udělat nespojitost vyžaduje aktivní snahu a nečestné úmysly.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost  
odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu  
souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass

maxima, minima  
monotónní funkce  
prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Jsou-li funkce  $f, g$  spojité v bodě  $a$ , jsou i funkce  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  a v případě  $g(a) \neq 0$  i funkce  $f/g$  spojité v bodě  $a$ .



Maximum, minimum, součet, součin a podíl spojitých funkcí jsou spojité funkce.



Jak jsem říkal, udělat nespojitost vyžaduje aktivní snahu a nečestné úmysly.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Mluvili jste o mně, nebo  
o mé sbírce nespojitých  
funkcí?



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Mluvili jste o mně, nebo o mé sbírce nespojitých funkcí?



**Důkaz.** Postup důkazu je stejný pro všechny uvedené operace s funkcemi. Např. pro součin:



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Mluvili jste o mně, nebo o mé sbírce nespojitých funkcí?



**Důkaz.** Postup důkazu je stejný pro všechny uvedené operace s funkcemi. Např. pro součin:



Je třeba ukázat, že pro libovolnou posloupnost  $\{x_n\}$  konvergující k  $a$  konverguje  $\{(fg)(x_n)\}$  k  $(fg)(a)$ . Protože  $\lim f(x_n) = f(a)$ ,  $\lim g(x_n) = g(a)$  (spojitost  $f, g$  v  $a$ ), je podle **věty o součinu limit posloupností**  $\lim f(x_n)g(x_n) = f(a)g(a)$ , což podle definice součinu funkcí je to, co se mělo dokázat.  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Mluvili jste o mně, nebo o mé sbírce nespojitých funkcí?



**Důkaz.** Postup důkazu je stejný pro všechny uvedené operace s funkcemi. Např. pro součin:



Je třeba ukázat, že pro libovolnou posloupnost  $\{x_n\}$  konvergující k  $a$  konverguje  $\{(fg)(x_n)\}$  k  $(fg)(a)$ . Protože  $\lim f(x_n) = f(a)$ ,  $\lim g(x_n) = g(a)$  (spojitost  $f, g$  v  $a$ ), je podle **věty o součinu limit posloupností**  $\lim f(x_n)g(x_n) = f(a)g(a)$ , což podle definice součinu funkcí je to, co se mělo dokázat.  $\diamond$



Tak jste to viděli. Sám jsem nevěřil, jak to je snadné.

## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolními  
spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To jsou ty moje přednosti.  
Dopředu jsem si všechno  
nachystala.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

## POZOROVÁNÍ.

1. Je-li  $f$  spojitá v  $a$ , je i  $k \cdot f$  spojitá v  $a$  pro každé reálné číslo  $k$  a tedy i funkce  $-f$ .



### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To jsou ty moje přednosti.  
Dopředu jsem si všechno  
nachystala.

Poznámky 2   Příklady 2   Otázky 2

## POZOROVÁNÍ.

1. Je-li  $f$  spojitá v  $a$ , je i  $k \cdot f$  spojitá v  $a$  pro každé reálné číslo  $k$  a tedy i funkce  $-f$ .



2. Jsou-li  $f, g$  spojité v  $a$ , jsou i funkce  $f - g$  spojité v  $a$ .



### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To jsou ty moje přednosti.  
Dopředu jsem si všechno  
nachystala.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

## POZOROVÁNÍ.

1. Je-li  $f$  spojitá v  $a$ , je i  $k \cdot f$  spojitá v  $a$  pro každé reálné číslo  $k$  a tedy i funkce  $-f$ .



2. Jsou-li  $f, g$  spojité v  $a$ , jsou i funkce  $f - g$  spojité v  $a$ .



3. Je-li  $f$  spojitá v  $a$ , jsou i funkce  $f_+, f_-$  spojité v  $a$  a tedy je i  $|f|$  spojitá v  $a$ .

### LEKCE05-SPO

Spojitost
definice
základy
spojitost s okolními
spojitost a konstrukce
spojitost
součtu, max, ...
spojitost složení
spojitost inverze
nespojitost
odstranitelná
skok
oscilace
nespojitost
mon.funkce
spojitost na intervalu
souvislý obraz
souvislý obraz
odmocnina
Weierstrass
maxima, minima
monotónní funkce
prostá=ryze mono-
tónní
monotonie a spoji-
tost
spojitost a konvexita
periodické funkce
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá v bodě  $a$  a funkce  $f$  spojitá v bodě  $g(a)$ , je funkce  $f \circ g$  spojitá v bodě  $a$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá v bodě  $a$  a funkce  $f$  spojitá v bodě  $g(a)$ , je funkce  $f \circ g$  spojitá v bodě  $a$ .



Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá v bodě  $a$  a funkce  $f$  spojitá v bodě  $g(a)$ , je funkce  $f \circ g$  spojitá v bodě  $a$ .



Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.



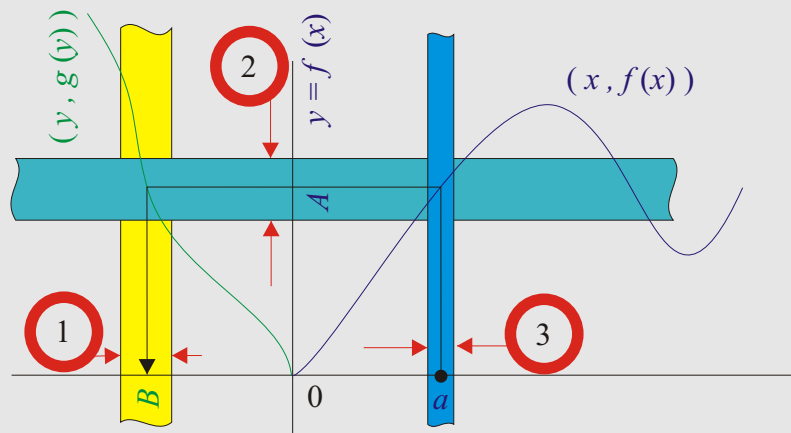
**Důkaz.** Jestliže  $\{x_n\}$  konverguje k  $a$ , je  $\lim g(x_n) = g(a)$  (proč?) a tedy  $\lim f(g(x_n)) = f(g(a))$  (proč?), což podle definice složené funkce značí spojitost  $f \circ g$  v  $a$ .  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
  - spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
- nespojítost
  - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze mono-
  - tónní
  - monotonie a spoji-
  - tost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při skládání se spojitost neporuší.



## LEKCE05-SPO

### Spojítost

#### definice

##### základy

##### spojítost s okolními

##### spojítost a konstrukce

##### spojítost

##### součtu, max, ...

##### spojítost složení

##### spojítost inverze

#### nespojítost

##### odstranitelná

##### skok

##### oscilace

##### nespojítost

##### mon.funkce

#### spojítost na intervalu

##### souvislý obraz

##### souvislý obraz

##### odmocnina

##### Weierstrass

##### maxima, minima

#### monotónní funkce

##### prostá=ryze mono-

##### tónní

##### monotonie a spoji-

##### tost

#### spojítost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

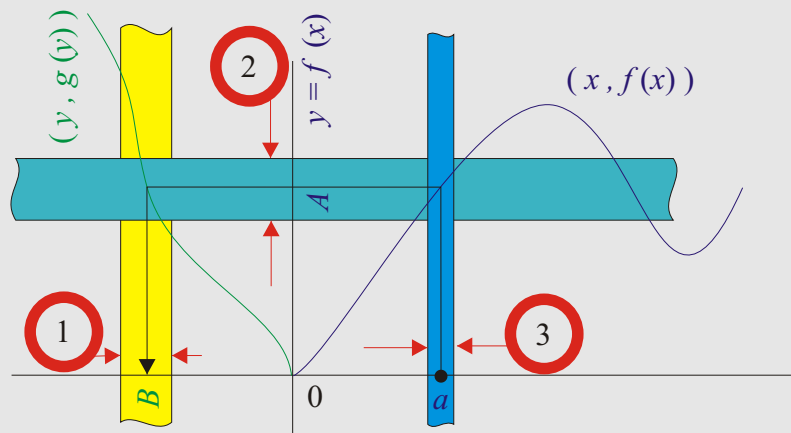
#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při skládání se spojitost neporuší.



Složení spojitých funkcí je spojité.

## LEKCE05-SPO

### Spojité

#### definice

##### základy

##### spojitost s okolními

##### spojitost a konstrukce

##### spojitost

##### součtu, max, ...

##### spojitost složení

##### spojitost inverze

#### nespojité

##### odstranitelná

##### skok

##### oscilace

##### nespojité

##### mon.funkce

#### spojitost na intervalu

##### souvislý obraz

##### souvislý obraz

##### odmocnina

##### Weierstrass

##### maxima, minima

#### monotónní funkce

##### prostá=ryze mono-

##### tónní

##### monotonie a spoji-

##### tost

#### spojitost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá a prostá na intervalu  $J$ , je její inverzní funkce spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá a prostá na intervalu  $J$ , je její inverzní funkce spojitá.



Důkaz tohoto tvrzení je odložen do části o **spojitých monotónních funkcích**, protože tam se dokáže ještě o něco více.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá a prostá na intervalu  $J$ , je její inverzní funkce spojitá.



Důkaz tohoto tvrzení je odložen do části o **spojitých monotónních funkcích**, protože tam se dokáže ještě o něco více.



**DŮSLEDEK.** 1. Funkce  $n$ -tá odmocnina  $\sqrt[n]{x}$  je spojitá funkce.  
2. Logaritmus  $\log_a x$  je spojitá funkce.  
3. Cyklometrické funkce jsou spojité.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá a prostá na intervalu  $J$ , je její inverzní funkce spojitá.



Důkaz tohoto tvrzení je odložen do části o **spojitých monotónních funkcích**, protože tam se dokáže ještě o něco více.



**DŮSLEDEK.** 1. Funkce  $n$ -tá odmocnina  $\sqrt[n]{x}$  je spojitá funkce.  
2. Logaritmus  $\log_a x$  je spojitá funkce.  
3. Cyklometrické funkce jsou spojité.



Ano, my jsme se dostali až sem !!!



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Je-li funkce  $g$  spojitá a prostá na intervalu  $J$ , je její inverzní funkce spojitá.



Důkaz tohoto tvrzení je odložen do části o **spojitých monotónních funkcích**, protože tam se dokáže ještě o něco více.



**DŮSLEDEK.** 1. Funkce  $n$ -tá odmocnina  $\sqrt[n]{x}$  je spojitá funkce.  
2. Logaritmus  $\log_a x$  je spojitá funkce.  
3. Cyklometrické funkce jsou spojité.



Ano, my jsme se dostali až sem !!!



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





POZOR !!! Tento dárek dostanete právě zde !!! Tato příležitost se nebude opakovat !!! Dokazovat totiž spojitost takových funkcí ručičkama je za trest ...

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

## POZOROVÁNÍ.

1. Je-li  $f$  spojitá v  $a$ , je i  $|f|$  spojitá v  $a$ .



### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



POZOR !!! Tento dárek dostanete právě zde !!! Tato příležitost se nebude opakovat !!! Dokazovat totiž spojitost takových funkcí ručičkama je za trest ...

Poznámky 3   Příklady 3   Otázky 3

## POZOROVÁNÍ.

1. Je-li  $f$  spojitá v  $a$ , je i  $|f|$  spojitá v  $a$ .



2. Posunutím grafu spojitě funkce dostaneme graf spojitě funkce.



### LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolními  
spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



POZOR !!! Tento dárek dostanete právě zde !!! Tato příležitost se nebude opakovat !!! Dokazovat totiž spojitost takových funkcí ručičkama je za trest ...

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

## POZOROVÁNÍ.

1. Je-li  $f$  spojitá v  $a$ , je i  $|f|$  spojitá v  $a$ .



2. Posunutím grafu spojitě funkce dostaneme graf spojitě funkce.



### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je to všechno průzračně jednoduché.

## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie a spojitost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# KLASIFIKACE NESPOJITOSTI

Před dalším zkoumáním spojitých funkcí je vhodné si uvědomit, co znamená, že funkce není spojitá v nějakém bodě.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# KLASIFIKACE NESPOJITOSTI

Před dalším zkoumáním spojitých funkcí je vhodné si uvědomit, co znamená, že funkce není spojitá v nějakém bodě.



Zavádí se klasifikace bodů nespojitosti.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# KLASIFIKACE NESPOJITOSTI

Před dalším zkoumáním spojitých funkcí je vhodné si uvědomit, co znamená, že funkce není spojitá v nějakém bodě.



Zavádí se klasifikace bodů nespojitosti.



Každý takový vykuk dostane nálepku. Já mám taky jednu.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DEFINICE.** Necht'  $a$  je bod definičního oboru funkce  $f$ . Potom

1.  $f$  má v  $a$  **odstranitelnou nespojitost**, jestliže existují a rovnají se  $\lim f(x_n) = b$  pro všechny posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ , přičemž  $b \neq f(a)$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**DEFINICE.** Necht'  $a$  je bod definičního oboru funkce  $f$ . Potom

1.  $f$  má v  $a$  **odstranitelnou nespojitost**, jestliže existují a rovnají se  $\lim f(x_n) = b$  pro všechny posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ , přičemž  $b \neq f(a)$ .



2.  $f$  má v  $a$  **skok**, jestliže existují a rovnají se  $\lim f(x_n) = b$  (nebo  $\lim f(x_n) = c$ ) pro všechny rostoucí (resp. klesající) posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ , přičemž  $b \neq c$ .



## LEKCE05-SPO

- Spojité definice
  - základy
  - spojitost s okolními
- spojitost a konstrukce
  - spojitost
  - součtu, max, ...
  - spojitost složení
  - spojitost inverze
- nespojité
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojité
  - mon.funkce
- spojitost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze monotónní
  - monotonie a spojitost
- spojitost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DEFINICE.** Necht'  $a$  je bod definičního oboru funkce  $f$ . Potom

1.  $f$  má v  $a$  **odstranitelnou nespojitost**, jestliže existují a rovnají se  $\lim f(x_n) = b$  pro všechny posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ , přičemž  $b \neq f(a)$ .



2.  $f$  má v  $a$  **skok**, jestliže existují a rovnají se  $\lim f(x_n) = b$  (nebo  $\lim f(x_n) = c$ ) pro všechny rostoucí (resp. klesající) posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ , přičemž  $b \neq c$ .



3.  $f$  má v  $a$  **oscilaci**, jestliže neexistuje  $\lim f(x_n)$  pro nějakou rostoucí nebo klesající posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitést

definice

základy

spojitést s okolními  
spojitést a konstrukce

spojitést

součtu, max, ...

spojitést složení

spojitést inverze

nespojitést

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitést

mon.funkce

spojitést na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitést a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DEFINICE.** Necht'  $a$  je bod definičního oboru funkce  $f$ . Potom

1.  $f$  má v  $a$  **odstranitelnou nespojitost**, jestliže existují a rovnají se  $\lim f(x_n) = b$  pro všechny posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ , přičemž  $b \neq f(a)$ .



2.  $f$  má v  $a$  **skok**, jestliže existují a rovnají se  $\lim f(x_n) = b$  (nebo  $\lim f(x_n) = c$ ) pro všechny rostoucí (resp. klesající) posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ , přičemž  $b \neq c$ .



3.  $f$  má v  $a$  **oscilaci**, jestliže neexistuje  $\lim f(x_n)$  pro nějakou rostoucí nebo klesající posloupnosti  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$ .



Bod  $a$  se potom nazývá po řadě bodem odstranitelné nespojitosti, bodem skoku, bodem oscilace.



Odstranitelná nespojitost a skok jsou triviality, miluji body oscilace.

#### LEKCE05-SPO

- Spojitést
- definice
- základy
- spojitést s okolními
- spojitést a konstrukce
- spojitést
- součtu, max, ...
- spojitést složení
- spojitést inverze
- nespojitést
- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojitést
- mon.funkce
- spojitést na intervalu
- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima
- monotónní funkce
- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost
- spojitést a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

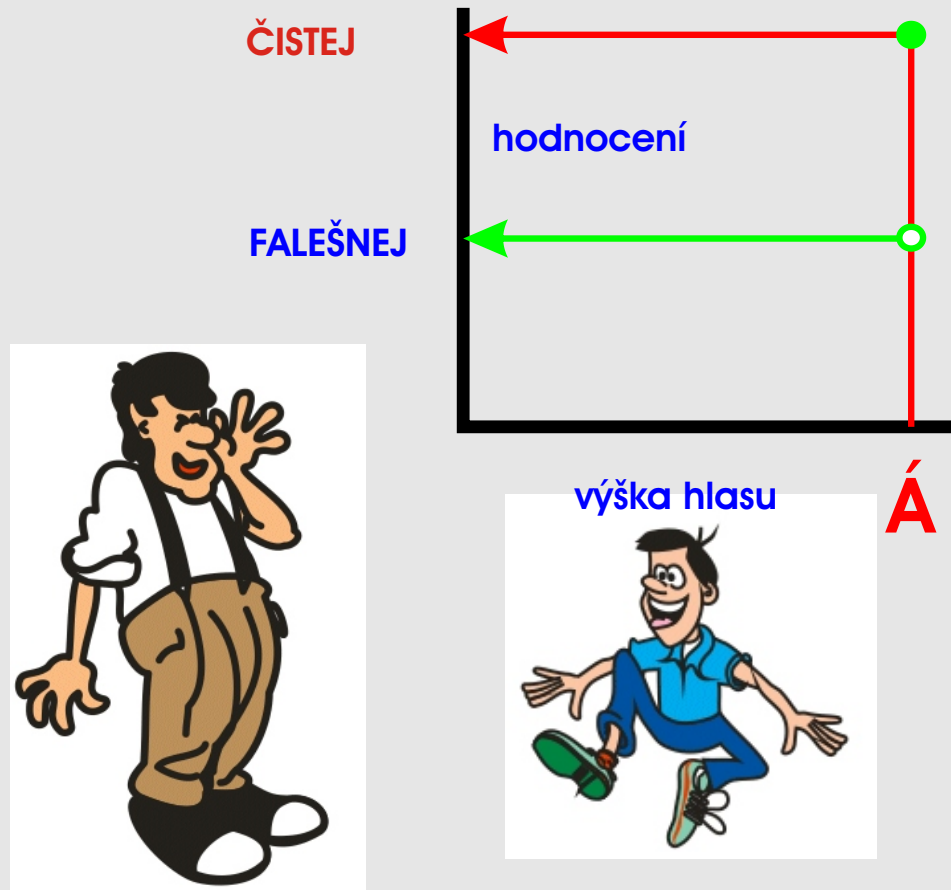
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad odstranitelné nespojitosti najdeme u člověka s absolutním sluchem, pro kterého všechny nečisté tóny jsou FALEŠNÉ.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

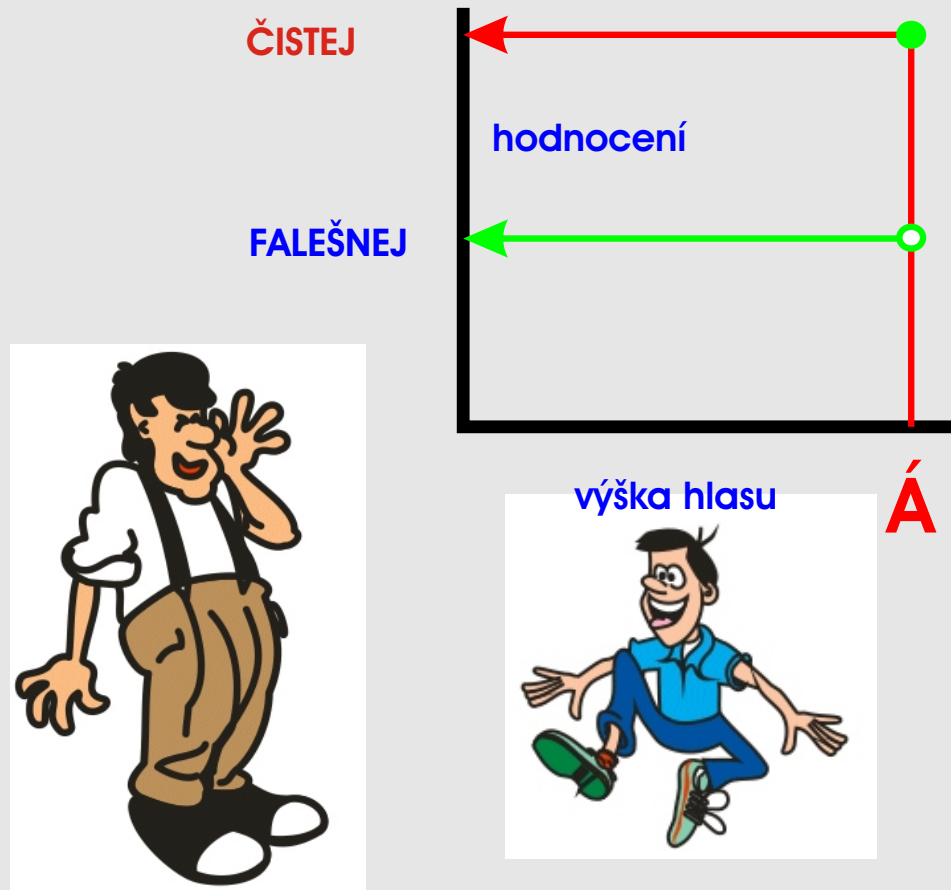
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad odstranitelné nespojitosti najdeme u člověka s absolutním sluchem, pro kterého všechny nečisté tóny jsou FALEŠNÉ.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Odstranitelná nespojitost

...



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

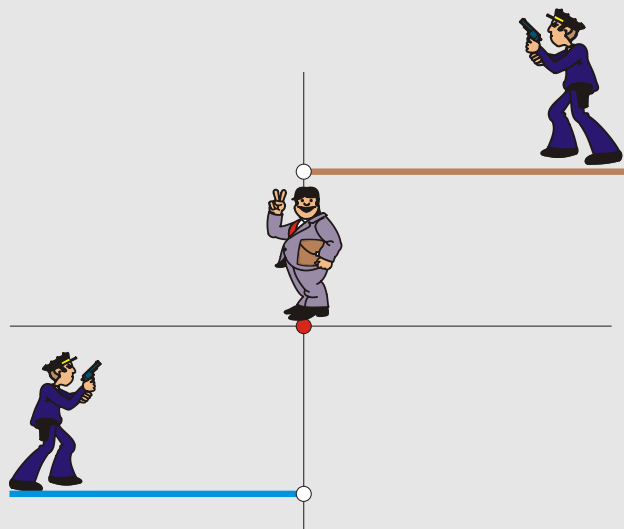
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Skok najdeme u funkce signum.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

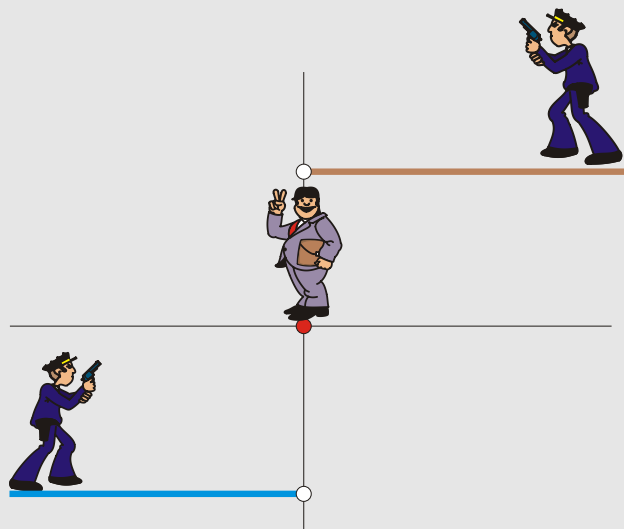
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Skok najdeme u funkce signum.



Skok je v počátku. Jak funkci dodefinovat je otázka  
...

## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

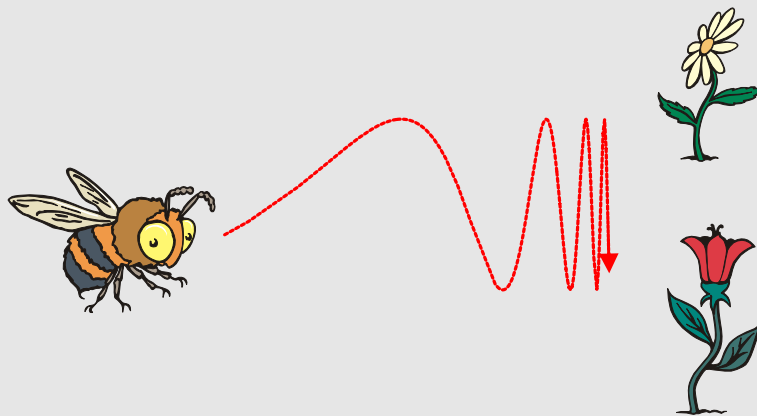
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Oscilaci najdeme u váhající včelky. Letí k jedné kytce, protože se jí líbí. Když přiletí blíže, nesedne jí její vůně a tak změří směr ke druhé kytce. Ta jí zblízka také nevoní, tak se obrátí ...



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

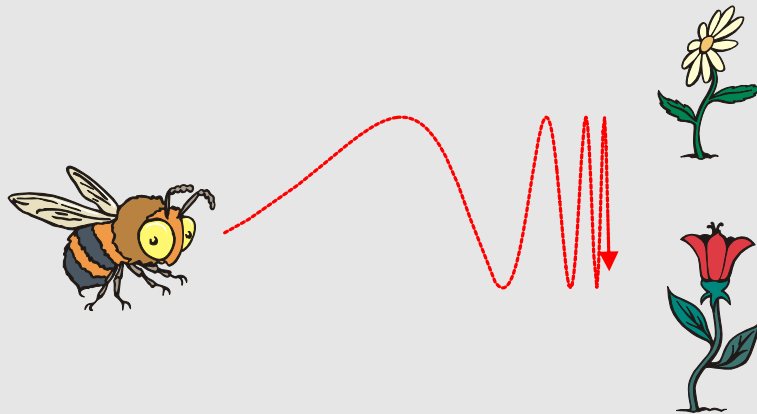
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Oscilaci najdeme u váhající včelky. Letí k jedné kytce, protože se jí líbí. Když přiletí blíže, nesedne jí její vůně a tak změří směr ke druhé kytce. Ta jí zblízka také nevoní, tak se obrátí ...



Oscilace je problémový bod, dodefinování je oříšek

...



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

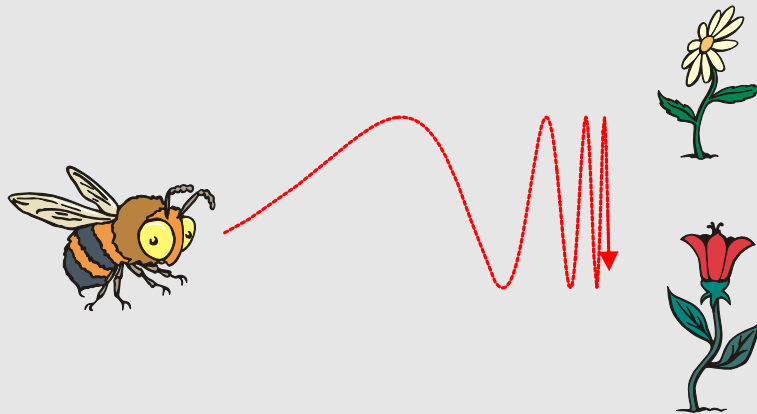
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Oscilaci najdeme u váhající včelky. Letí k jedné kytce, protože se jí líbí. Když přiletí blíže, nesedne jí její vůně a tak změří směr ke druhé kytce. Ta jí zblízka také nevoní, tak se obrátí ...



Oscilace je problémový bod, dodefinování je oříšek

...



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



BTW, u čmeláka se takové chování nepodařilo zdokumentovat ...

Poznámky 4   Příklady 4   Otázky 4

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITÉ FUNKCE NA INTERVALU

V této části je ukázáno, že spojité funkce do jisté míry zachovávají některé vlastnosti intervalů, např. souvislost nebo současně uzavřenost a omezenost.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITÉ FUNKCE NA INTERVALU

V této části je ukázáno, že spojité funkce do jisté míry zachovávají některé vlastnosti intervalů, např. souvislost nebo současně uzavřenost a omezenost.



Obě vlastnosti jsou podstatné pro řešení mnoha úloh.



## LEKCE05-SPO

Spojité  
definice

základy

spojitost s okolními  
spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující dvě tvrzení pocházejí od Bolzana a bude na ně odkazováno jako na **Bolzanovu větu**.

**LEMMA.** Je-li  $f$  spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a  $f(a), f(b)$  mají opačná znaménka, pak existuje  $c \in (a, b)$  s hodnotou  $f(c) = 0$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

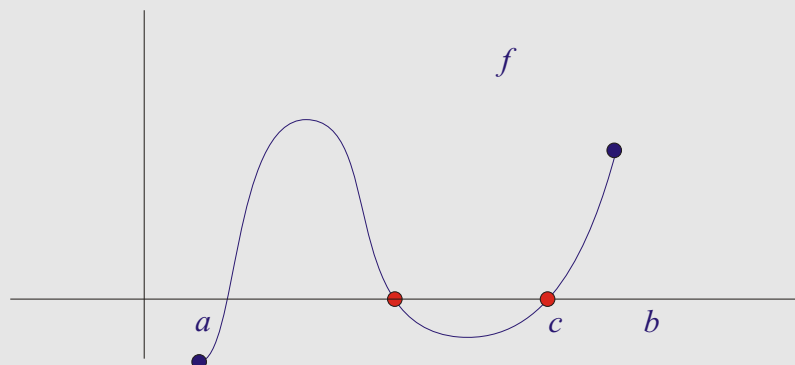


Následující dvě tvrzení pocházejí od Bolzana a bude na ně odkazováno jako na **Bolzanovu větu**.

**LEMMA.** Je-li  $f$  spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a  $f(a), f(b)$  mají opačná znaménka, pak existuje  $c \in (a, b)$  s hodnotou  $f(c) = 0$ .



**Důkaz.** Necht' např.  $f(a) < 0$ . Položme  $c = \sup\{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$ . Vzhledem ke spojitosti a k hodnotám  $f$  v krajních bodech je  $c \in (a, b)$ . Je zřejmé, že  $f(c) = 0$  (proč?, co by nastalo, kdyby  $f(c) < 0$  nebo  $f(c) > 0$ ? – použijte **větu o supremech**).  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

### Spojítost definice

- základy
- spojítost s okolími
- spojítost a konstrukce
- spojítost
- součtu, max, ...
- spojítost složení
- spojítost inverze

### nespojítost

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojítost
- mon.funkce

### spojítost na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojítost a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

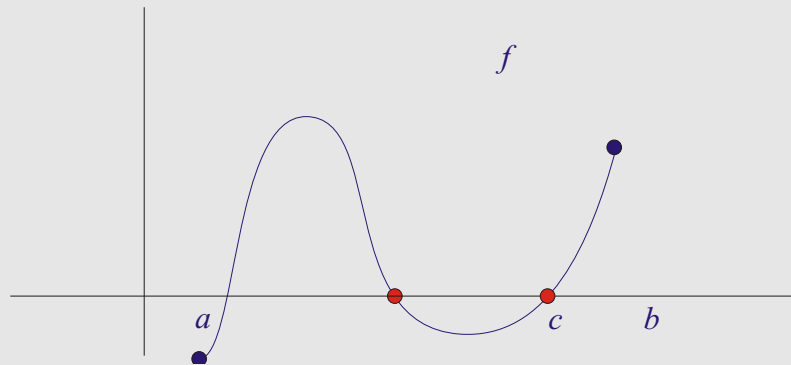
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující dvě tvrzení pocházejí od Bolzana a bude na ně odkazováno jako na **Bolzanovu větu**.

**LEMMA.** Je-li  $f$  spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a  $f(a), f(b)$  mají opačná znaménka, pak existuje  $c \in (a, b)$  s hodnotou  $f(c) = 0$ .



**Důkaz.** Necht' např.  $f(a) < 0$ . Položme  $c = \sup\{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$ . Vzhledem ke spojitosti a k hodnotám  $f$  v krajních bodech je  $c \in (a, b)$ . Je zřejmé, že  $f(c) = 0$  (proč?, co by nastalo, kdyby  $f(c) < 0$  nebo  $f(c) > 0$ ? – použijte **větu o supremech**).  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

### Spojítost definice

- základy
- spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
- spojítost
- součtu, max, ...
- spojítost složení
- spojítost inverze

### nespojítost

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojítost
- mon.funkce

### spojítost na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojítost a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



$V c$  je nulový bod funkce  $f$ .



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



$V c$  je nulový bod funkce  $f$ .

Pokud teď opravdu všemu rozumíte, tedy ta věta vám připadá jako pochoutka, tak si můžete nějakou pochoutku dopřát.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



$V_c$  je nulový bod funkce  $f$ .



Pokud teď opravdu všemu rozumíte, tedy ta věta vám připadá jako pochoutka, tak si můžete nějakou pochoutku dopřát.



Nesu ti vitamíny.

## LEKCE05-SPO

### Spojítost

#### definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro jistotu budu pokračovat  
ve výkladu pomalu, jedna  
nikdy neví ...



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Každý polynom lichého stupně má reálný kořen.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

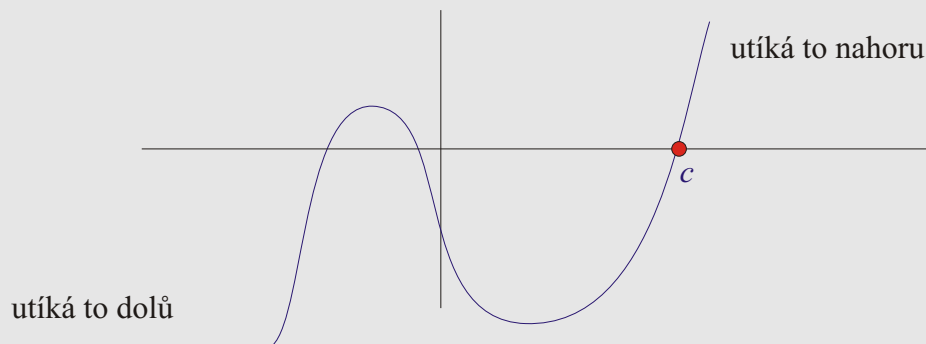
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# DŮSLEDEK. Každý polynom lichého stupně má reálný kořen.



Tedy rovnice  $x = 0$  má kořen, kdo by to řekl ...



## LEKCE05-SPO

### Spojítost

#### definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující tvrzení je vlastně jednoduchým důsledkem lemmatu, ale vzhledem k důležitosti je zformulováno jako věta.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je spojitá na intervalu  $I$ . Je třeba ukázat, že jakmile  $u < w < v, u, v \in f(I)$ , pak  $w \in f(I)$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je spojitá na intervalu  $I$ . Je třeba ukázat, že jakmile  $u < w < v, u, v \in f(I)$ , pak  $w \in f(I)$ .



Tedy existují  $a, b \in I$  tak, že  $f(a) = u, f(b) = v$ . Bud'  $J$  uzavřený interval v  $I$  s koncovými body  $a, b$ . Pak funkce  $F = f - w$  splňuje na  $I$  podmínky lemmatu a tedy existuje  $c \in I$  tak, že  $F(c) = 0$ , tedy  $f(c) = w$ .  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je spojitá na intervalu  $I$ . Je třeba ukázat, že jakmile  $u < w < v, u, v \in f(I)$ , pak  $w \in f(I)$ .



Tedy existují  $a, b \in I$  tak, že  $f(a) = u, f(b) = v$ . Bud'  $J$  uzavřený interval v  $I$  s koncovými body  $a, b$ . Pak funkce  $F = f - w$  splňuje na  $I$  podmínky lemmatu a tedy existuje  $c \in I$  tak, že  $F(c) = 0$ , tedy  $f(c) = w$ .  $\diamond$



Použili jsme vlastnost intervalu: mezi dvěma body nic nechybí.

### LEKCE05-SPO

#### Spojitost definice

- základy
- spojitost s okolními
- spojitost a konstrukce
- spojitost součtu, max, ...
- spojitost složení
- spojitost inverze

#### nespojité

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojité
- mon.funkce

#### spojitost na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

#### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

#### spojitost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dalším z důsledků je existence **odmocnin** (uvědomte si, že odmocnina je inverzní funkce k mocnině a její definiční obor je tedy obor hodnot příslušné mocniny).



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dalším z důsledků je existence **odmocnin** (uvědomte si, že odmocnina je inverzní funkce k mocnině a její definiční obor je tedy obor hodnot příslušné mocniny).



**DŮSLEDEK.** Je-li  $n \in \mathbb{N}$  liché, existuje  $n$ -tá odmocnina z každého reálného čísla, je-li  $n \in \mathbb{N}$  sudé, existuje  $n$ -tá odmocnina z každého nezáporného reálného čísla.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dalším z důsledků je existence **odmocnin** (uvědomte si, že odmocnina je inverzní funkce k mocnině a její definiční obor je tedy obor hodnot příslušné mocniny).



**DŮSLEDEK.** Je-li  $n \in \mathbb{N}$  liché, existuje  $n$ -tá odmocnina z každého reálného čísla, je-li  $n \in \mathbb{N}$  sudé, existuje  $n$ -tá odmocnina z každého nezáporného reálného čísla.



Všimli jste si, jak je to všechno průzračné?



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dalším z důsledků je existence **odmocnin** (uvědomte si, že odmocnina je inverzní funkce k mocnině a její definiční obor je tedy obor hodnot příslušné mocniny).



**DŮSLEDEK.** Je-li  $n \in \mathbb{N}$  liché, existuje  $n$ -tá odmocnina z každého reálného čísla, je-li  $n \in \mathbb{N}$  sudé, existuje  $n$ -tá odmocnina z každého nezáporného reálného čísla.



Všimli jste si, jak je to všechno průzračné?



Když se ví, odkud se na co koukat ...

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

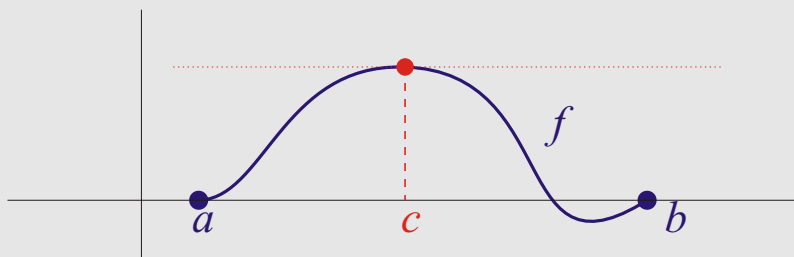
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující věta má také název: **Weierstrassova věta**.

**VĚTA.** Spojitá funkce nabývá na uzavřeném omezeném intervalu  $J$  své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body  $c, d \in J$  takové, že

$$f(c) = \sup_{x \in J} f(x), \quad f(d) = \inf_{x \in J} f(x).$$



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

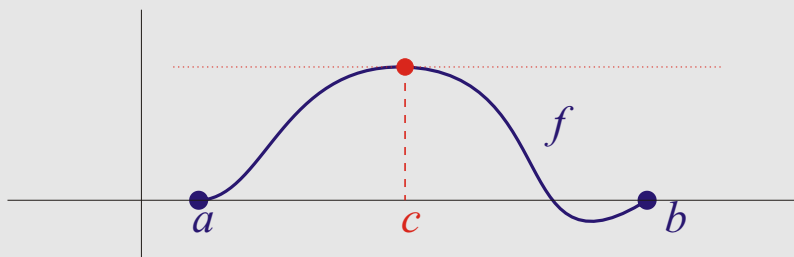
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující věta má také název: **Weierstrassova věta**.

**VĚTA.** Spojitá funkce nabývá na uzavřeném omezeném intervalu  $J$  své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body  $c, d \in J$  takové, že

$$f(c) = \sup_{x \in J} f(x), \quad f(d) = \inf_{x \in J} f(x).$$



Konečně něco opravdu užitečného! Budeme mít zase co hledat.

#### LEKCE05-SPO

- Spojitost
- definice
- základy
- spojitost s okolními
- spojitost a konstrukce
- spojitost
- součtu, max, ...
- spojitost složení
- spojitost inverze
- nespojité
- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojité
- mon.funkce
- spojitost na intervalu
- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima
- monotónní funkce
- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost
- spojitost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** Bud'  $A = \sup_{x \in J} f(x)$ . Podle **věty o supremech** reálných čísel existuje posloupnost  $\{f(x_n)\}$  pro  $x_n \in J$  konvergující k  $A$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** Bud'  $A = \sup_{x \in J} f(x)$ . Podle **věty o supremech** reálných čísel existuje posloupnost  $\{f(x_n)\}$  pro  $x_n \in J$  konvergující k  $A$ .



Podle **Bolzano–Weierstrassovy věty** (protože  $J$  je omezená množina) existuje konvergentní podposloupnost  $\{x_{k_n}\}$ , konvergující k nějakému bodu  $c$ .



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** Bud'  $A = \sup_{x \in J} f(x)$ . Podle **věty o supretech** reálných čísel existuje posloupnost  $\{f(x_n)\}$  pro  $x_n \in J$  konvergující k  $A$ .



Podle **Bolzano–Weierstrassovy věty** (protože  $J$  je omezená množina) existuje konvergentní podposloupnost  $\{x_{k_n}\}$ , konvergující k nějakému bodu  $c$ .



Protože  $J$  je uzavřený interval, je  $c \in J$ . Protože  $f$  je spojitá, je  $\lim f(x_{k_n}) = f(c)$  a tedy  $f(c) = A$ .



## LEKCE05-SPO

### Spojitosť definice

- základy
- spojitosť s okolními
- spojitosť a konstrukce
- spojitosť
- součtu, max, ...
- spojitosť složení
- spojitosť inverze

### nespojitosť

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojitosť
- mon.funkce

### spojitosť na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojitosť a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Důkaz.** Bud'  $A = \sup_{x \in J} f(x)$ . Podle **věty o supretech** reálných čísel existuje posloupnost  $\{f(x_n)\}$  pro  $x_n \in J$  konvergující k  $A$ .



Podle **Bolzano–Weierstrassovy věty** (protože  $J$  je omezená množina) existuje konvergentní podposloupnost  $\{x_{k_n}\}$ , konvergující k nějakému bodu  $c$ .



Protože  $J$  je uzavřený interval, je  $c \in J$ . Protože  $f$  je spojitá, je  $\lim f(x_{k_n}) = f(c)$  a tedy  $f(c) = A$ .



Podobně pro bod  $d$ . ◇



## LEKCE05-SPO

### Spojitosť definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** Bud'  $A = \sup_{x \in J} f(x)$ . Podle **věty o supremech** reálných čísel existuje posloupnost  $\{f(x_n)\}$  pro  $x_n \in J$  konvergující k  $A$ .



Podle **Bolzano–Weierstrassovy věty** (protože  $J$  je omezená množina) existuje konvergentní podposloupnost  $\{x_{k_n}\}$ , konvergující k nějakému bodu  $c$ .



Protože  $J$  je uzavřený interval, je  $c \in J$ . Protože  $f$  je spojitá, je  $\lim f(x_{k_n}) = f(c)$  a tedy  $f(c) = A$ .



Podobně pro bod  $d$ .



Techniku tohoto důkazu je nezbytně nutné pochopit.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Spojitá funkce zobrazuje uzavřený omezený interval na bod nebo na uzavřený omezený interval.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Spojitá funkce zobrazuje uzavřený omezený interval na bod nebo na uzavřený omezený interval.



Toto tvrzení je velmi důležité a užitečné. Mimo jiné pak funkce nabývá maxima.

Poznámky 6   Příklady 6   Otázky 6

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Spojitosť a monotónie

Spojité monotónní funkce jsou velmi důležité. Z následujících výsledků je vidět, že tyto funkce mají další výhodné vlastnosti.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Spojitosť a monotónie

Spojité monotónní funkce jsou velmi důležité. Z následujících výsledků je vidět, že tyto funkce mají další výhodné vlastnosti.



Budeme hlavně potřebovat inverzní funkce. Hledáme podmínky, kdy to půjde. Ukáže se, že prostá spojitá funkce má spojitou inverzní funkci.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy  
spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce  
spojitosť  
součtu, max, ...  
spojitosť složení  
spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojitosť  
mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ryze monotónní funkce  
jsou prosté. Pro spojité  
funkce platí i opak:



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Spojitá a prostá funkce na intervalu je ryze monotónní a její inverzní funkce je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA.** Spojitá a prostá funkce na intervalu je ryze monotónní a její inverzní funkce je spojitá.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je spojitá a prostá na intervalu  $I$  a  $z$  je vnitřní bod  $I$ , který rozděluje  $I$  na intervaly  $I_- = I \cap (-\infty, z]$ ,  $I_+ = I \cap [z, \infty)$ . Protože  $f$  je prostá a spojitá, jsou obrazy obou menších intervalů zase intervaly (díky spojitosti) dotýkající se v bodě  $f(z)$  (díky prostotě). Necht' obraz  $I_-$  má pravý krajní bod  $f(z)$  (a tedy obraz  $I_+$  má levý krajní bod  $f(z)$ ).



## LEKCE05-SPO

### Spojité definice

- základy
- spojitost s okolními
- spojitost a konstrukce
- spojitost
- součtu, max, ...
- spojitost složení
- spojitost inverze

### nespojité

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojité
- mon.funkce

### spojitost na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojitost a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Spojitá a prostá funkce na intervalu je ryze monotónní a její inverzní funkce je spojitá.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je spojitá a prostá na intervalu  $I$  a  $z$  je vnitřní bod  $I$ , který rozděljuje  $I$  na intervaly  $I_- = I \cap (-\infty, z]$ ,  $I_+ = I \cap [z, \infty)$ . Protože  $f$  je prostá a spojitá, jsou obrazy obou menších intervalů zase intervaly (díky spojitosti) dotýkající se v bodě  $f(z)$  (díky prostotě). Necht' obraz  $I_-$  má pravý krajní bod  $f(z)$  (a tedy obraz  $I_+$  má levý krajní bod  $f(z)$ ).



Pro body  $u < v$  z  $I$  buď oba náležejí jednomu z intervalů  $I_-$ ,  $I_+$  nebo každý jinému (pak  $u \in I_-$ ,  $v \in I_+$  a zřejmě  $f(u) < f(v)$ ). Pokud  $u, v \in I_-$ , je obraz intervalu  $[u, v)$  disjunktní s obrazem intervalu  $[v, z]$  a oba obrazy leží v  $I_-$ . Obraz intervalu má pravý krajní bod  $f(z)$  a tedy body obrazu  $[u, v)$  musí být menší než  $f(v)$ . Tedy opět  $f(u) < f(v)$  a totéž se stejně dokáže pro zbývajících případ  $I_+$ .

Tím jsme dokázali monotonii. Inverzní funkci máme díky prostotě  $f$ . Její spojitost plyne z následující úvahy. Zvolme rostoucí posloupnost bodů  $z_n$  konvergující k  $z$ . Pak  $f(z_n)$  konverguje monotónně k  $f(z)$  díky spojitosti  $f$ . Nyní použijeme  $\varepsilon - \delta$  definici jednostranné spojitosti inverzní funkce k  $f$ . Podobně z druhé strany.  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

### Spojitost definice

- základy
- spojitost s okolními
- spojitost a konstrukce
- spojitost
- součtu, max, ...
- spojitost složení
- spojitost inverze

### nespojité

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojité
- mon.funkce

### spojitost na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass

### maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojitost a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Promyslete si důkaz, jeho  
idea je jednoduchá.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existují funkce nespojité, které zobrazují intervaly na intervaly. Pro monotónní funkce tato situace nemůže nastat:



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existují funkce nespojité, které zobrazují intervaly na intervaly. Pro monotónní funkce tato situace nemůže nastat:



**VĚTA.** Monotónní funkce  $f$  na intervalu  $J$ , která zobrazuje intervaly v  $J$  na bod nebo intervaly, je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existují funkce nespojité, které zobrazují intervaly na intervaly. Pro monotónní funkce tato situace nemůže nastat:



**VĚTA.** Monotónní funkce  $f$  na intervalu  $J$ , která zobrazuje intervaly v  $J$  na bod nebo intervaly, je spojitá.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je např. neklesající funkce na  $J$ , zobrazující intervaly v  $J$  na intervaly nebo bod a  $\{x_n\}$  je rostoucí posloupnost v  $J$  konvergující k  $a \in J$ . Kdyby  $\lim f(x_n) < f(a)$ , tak obraz intervalu  $[x_1, a]$  není interval (neobsahuje body mezi  $\lim f(x_n)$ ,  $f(a)$ ). Podobně pro spojitost zprava.  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existují funkce nespojité, které zobrazují intervaly na intervaly. Pro monotónní funkce tato situace nemůže nastat:



**VĚTA.** Monotónní funkce  $f$  na intervalu  $J$ , která zobrazuje intervaly v  $J$  na bod nebo intervaly, je spojitá.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je např. neklesající funkce na  $J$ , zobrazující intervaly v  $J$  na intervaly nebo bod a  $\{x_n\}$  je rostoucí posloupnost v  $J$  konvergující k  $a \in J$ . Kdyby  $\lim f(x_n) < f(a)$ , tak obraz intervalu  $[x_1, a]$  není interval (neobsahuje body mezi  $\lim f(x_n)$ ,  $f(a)$ ). Podobně pro spojitost zprava.  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je to zcela jasné z obrázku.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# Spojitosť, konvexita a periodické funkce



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolími

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Spojítost, konvexita a periodické funkce



Ukážeme, jak jsou konvexita a konkávnost silné vlastnosti. V podstatě implikují spojitost.



## LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
  - spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojítost
  - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze monotónní
  - monotonie a spojitost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Konvexní nebo konkávní funkce na otevřeném intervalu je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Konvexní nebo konkávní funkce na otevřeném intervalu je spojitá.



**Důkaz.** Necht'  $f$  je konvexní na otevřeném intervalu  $I$ ,  $x \in I$  a  $\{x_n\}$  je rostoucí posloupnost v  $I$  konvergující k  $x$ . Posloupnost směrnic  $s_n = (f(x) - f(x_n))/(x - x_n)$  je **neklesající** a shora omezená směrnicí přímky mezi body  $(x, f(x))$ ,  $(u, f(u))$  pro libovolný bod  $u \in I$  větší než  $x$  (otevřenost  $I$ ). Pak  $\lim(f(x) - f(x_n)) = \lim s_n(x - x_n) = 0$ , protože  $s_n$  je omezená a  $x - x_n \rightarrow 0$ . Podobně se ukáže spojitost zprava.  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

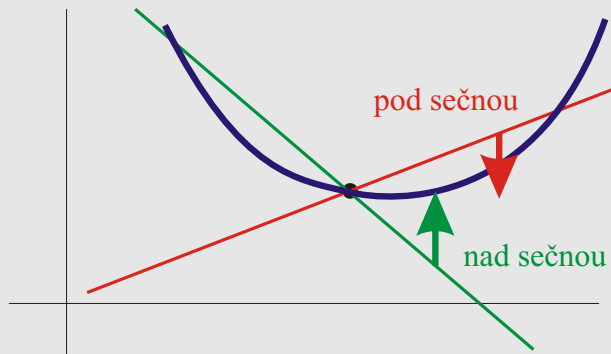
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz jde udělat i obrázkem:



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

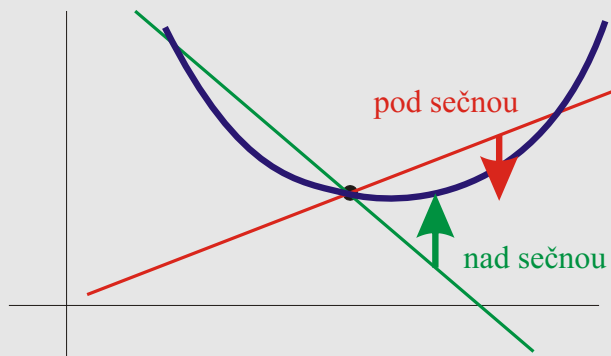
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz jde udělat i obrázkem:



Vpravo od bodu je graf funkce omezen sečnami, tedy podle věty o polícajtech má funkce v bodě limitu.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bylo zmíněno, že Dirichletova funkce má za periody všechna kladná racionální čísla. Taková situace nemůže nastat u spojitých periodických funkcí (kromě konstantní funkce).



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bylo zmíněno, že Dirichletova funkce má za periody všechna kladná racionální čísla. Taková situace nemůže nastat u spojitých periodických funkcí (kromě konstantní funkce).



**VĚTA.** Spojitá nekonstantní periodická funkce má nejmenší periodu.

**Důkaz.** Necht'  $f$  je periodická funkce, která nemá nejmenší periodu. Bud'  $p$  infimum všech period funkce  $f$ . Pak existuje klesající posloupnost period  $p_n$  konvergující k  $p$ . Zřejmě je  $f(x + p) = \lim f(x + p_n) = \lim f(x) = f(x)$  (první rovnost ze spojitosti, druhá z periodicity). Podle předpokladu ale  $p$  není perioda, takže musí být  $p = 0$ .



## LEKCE05-SPO

### Spojité

#### definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Bylo zmíněno, že Dirichletova funkce má za periody všechna kladná racionální čísla. Taková situace nemůže nastat u spojitých periodických funkcí (kromě konstantní funkce).



**VĚTA.** Spojitá nekonstantní periodická funkce má nejmenší periodu.

**Důkaz.** Necht'  $f$  je periodická funkce, která nemá nejmenší periodu. Bud'  $p$  infimum všech period funkce  $f$ . Pak existuje klesající posloupnost period  $p_n$  konvergující k  $p$ . Zřejmě je  $f(x + p) = \lim f(x + p_n) = \lim f(x) = f(x)$  (první rovnost ze spojitosti, druhá z periodicity). Podle předpokladu ale  $p$  není perioda, takže musí být  $p = 0$ .



Jestliže  $p = 0$ , pak pro libovolná  $x \neq y$  existuje posloupnost  $\{k_n\}$  celých čísel tak, že  $\lim(x + k_n p_n) = y$  (nebot' každý interval  $(y - p_n, y + p_n)$  obsahuje nějaký součet  $x + k_n p_n$ ). Potom  $f(x) = \lim f(x + k_n p_n) = f(y)$  ze spojitosti, a tedy  $f(x) = f(y)$ . Tedy  $f$  je konstantní.  $\diamond$



## LEKCE05-SPO

### Spojité

#### definice

##### základy

##### spojitost s okolními

##### spojitost a konstrukce

##### spojitost

##### součtu, max, ...

##### spojitost složení

##### spojitost inverze

### nespojité

##### odstranitelná

##### skok

##### oscilace

##### nespojité

##### mon.funkce

### spojitost na intervalu

##### souvislý obraz

##### souvislý obraz

##### odmocnina

##### Weierstrass

##### maxima, minima

### monotónní funkce

##### prostá=ryze mono-

##### tónní

##### monotonie a spoji-

##### tost

### spojitost a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde v podstatě o samozřejmost.

Poznámky 8   Příklady 8   Otázky 8   Cvičení 8   Učení 8



## LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
  - spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojítost
  - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze monotónní
  - monotonie a spojitost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# POZNÁMKY

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

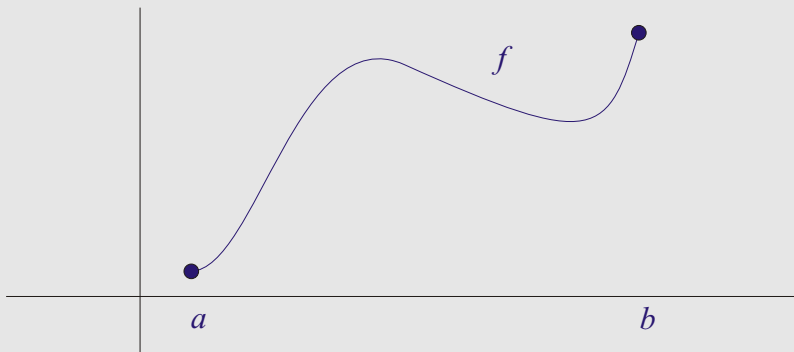
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 1 :

Lze si představit, že graf spojitě funkce na intervalu je spojitá (v normálním smyslu, tj. nepřerušená) čára.



### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť funkce je definována jen pro body z definičního oboru.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť funkcie je definovaná len pre body z definičného oboru.



V bode  $a$ , ktorý nepatrí do definičného oboru funkcie  $f$ , nemá spojitosť  $f$  zmysel.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definície

základy  
spojitosť s okolím  
spojitosť a konštrukcie  
spojitosť  
súčtu, max, ...  
spojitosť zložením  
spojitosť inverzie

nespojitosť

odstraniteľná  
skok  
oscilácie  
nespojitosť  
mon. funkcie

spojitosť na intervale

súvislý obraz  
súvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass

maxima, minima

monotónne funkcie

prostá=ryze mono-  
tónne  
monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkcie

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť vlastně znamená záměnu funkce a limity:

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$$

pro posloupnosti ležící i s limitou v definičním oboru funkce  $f$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitost vlastně znamená záměnu funkce a limity:

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$$

pro posloupnosti ležící i s limitou v definičním oboru funkce  $f$ .



Změnit pořadí při oblékání nelze!



## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolími

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spojitosť zprava funkce  $f$  v bodě  $a$  je spojitosť zúžení funkce na množinu  $\mathcal{D}(f) \cap [a, \infty)$  v bodě  $a$ . Podobně spojitosť zleva.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spojitosť zprava funkce  $f$  v bodě  $a$  je spojitosť zúžení funkce na množinu  $\mathcal{D}(f) \cap [a, \infty)$  v bodě  $a$ . Podobně spojitosť zleva.



Z tohoto důvodu není třeba dokazovat a formulovat zvlášť tvrzení a definice pro spojitosť jednostranné.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

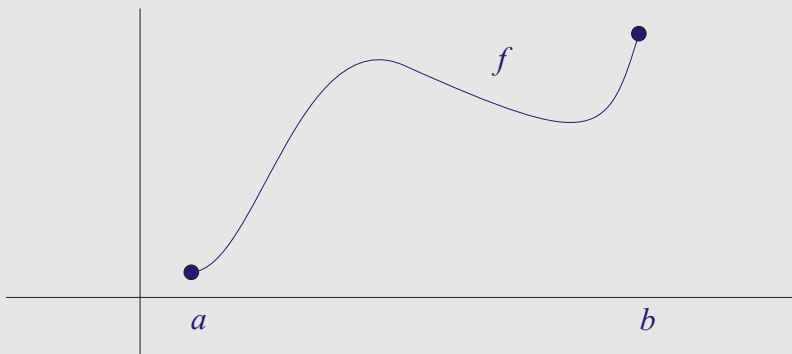
Spojítost zprava funkce  $f$  v bodě  $a$  je spojitost zúžení funkce na množinu  $\mathcal{D}(f) \cap [a, \infty)$  v bodě  $a$ . Podobně spojitost zleva.



Z tohoto důvodu není třeba dokazovat a formulovat zvlášť tvrzení a definice pro spojitosti jednostranné.



Je-li definičním oborem funkce  $f$  interval a  $a$  je vnitřním bodem tohoto intervalu, může se rozlišovat oboustranná spojitost  $f$  v  $a$  od jednostranné, v krajních bodech intervalu má smysl jen jednostranná spojitost.



V levém krajním bodě je spojitost totéž, co spojitost zprava, v pravém krajním bodě co spojitost zleva.



## LEKCE05-SPO

### Spojítost definice

- základy
- spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
- spojítost
- součtu, max, ...
- spojítost složení
- spojítost inverze

### nespojítost

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojítost
- mon.funkce

### spojítost na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojítost a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li  $a$  izolovaný bod v  $\mathcal{D}(f)$ , je  $f$  v tomto bodě spojitá (proč?) a tedy každá posloupnost je spojitá funkce.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li  $a$  izolovaný bod v  $\mathcal{D}(f)$ , je  $f$  v tomto bodě spojitá (proč?) a tedy každá posloupnost je spojitá funkce.



V těchto bodech nemá pojem spojitosti praktický význam a v mnoha učebnicích se spojitost definuje jen pro hromadné body definičních oborů.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy  
spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce  
spojitosť  
součtu, max, ...  
spojitosť složení  
spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojitosť  
mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li  $a$  izolovaný bod v  $\mathcal{D}(f)$ , je  $f$  v tomto bodě spojitá (proč?) a tedy každá posloupnost je spojitá funkce.



V těchto bodech nemá pojem spojitosti praktický význam a v mnoha učebnicích se spojitost definuje jen pro hromadné body definičních oborů.



V případě zkoumání funkcí definovaných na intervalech nebo jejich sjednocení se tyto izolované body nevy-skytují.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je vhodné si uvědomit, že definice spojitosti je vázána na reálná čísla jen prostřednictvím konvergence posloupností.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je vhodné si uvědomit, že definice spojitosti je vázána na reálná čísla jen prostřednictvím konvergence posloupností.



Je-li funkce definována mezi množinami, kde je definována konvergence posloupností (např. mezi Euklidovskými nebo normovanými prostory) lze hovořit o její spojitosti.



## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy  
spojitost s okolními  
spojitost a konstrukce  
spojitost  
součtu, max, ...  
spojitost složení  
spojitost inverze

nespojité

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojité  
mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojitost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je vhodné si uvědomit, že definice spojitosti je vázána na reálná čísla jen prostřednictvím konvergence posloupností.



Je-li funkce definována mezi množinami, kde je definována konvergence posloupností (např. mezi Euklidovskými nebo normovanými prostory) lze hovořit o její spojitosti.



To už neplatí pro jednostranné spojitosti, kde se používá uspořádání na  $\mathbb{R}$ . Proto u funkcí více proměnných nemá jednostranná spojitost smysl.

Konec poznámek 1.

## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojitost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitost

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 2 :

Z důkazu je vidět, že jestliže pro nějakou (např. binární) operaci  $*$  na oboru hodnot (např. na  $\mathbb{R}$ ) funkcí  $f, g$  platí

$$(\lim x_n) * (\lim y_n) = \lim(x_n * y_n)$$

pro libovolné posloupnosti, pak funkce  $f * g$  s hodnotami  $f(x) * g(x)$  v bodech  $x$ , je spojitá.



### LEKCE05-SPO

#### Spojitosť definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 2 :

Z důkazu je vidět, že jestliže pro nějakou (např. binární) operaci  $*$  na oboru hodnot (např. na  $\mathbb{R}$ ) funkcí  $f, g$  platí

$$(\lim x_n) * (\lim y_n) = \lim(x_n * y_n)$$

pro libovolné posloupnosti, pak funkce  $f * g$  s hodnotami  $f(x) * g(x)$  v bodech  $x$ , je spojitá.



To je hezké.

Konec poznámek 2.

### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

Důkaz ukazuje mnohem obecnější tvrzení.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 3 :

Důkaz ukazuje mnohem obecnější tvrzení.



Funkce  $f \circ g$  je spojitá, jakmile  $f, g$  jsou spojité (a  $f \circ g$  má smysl), nehledě na definiční obory a obory hodnot (nemusí být v  $\mathbb{R}$ ).

Konec poznámek 3.

### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 4 :

Často se definuje spojitost funkce pomocí jiných nástrojů než pomocí konvergence posloupnosti, např. pomocí okolí. Přesto se nespojitost funkce  $f$  v nějakém bodě  $a$  většinou ukazuje tak, že se najde posloupnost konvergující k  $a$  s  $f$ -hodnotami nekonvergujícími k  $f(a)$ .



### LEKCE05-SPO

#### Spojitost definice

základy

spojitost s okolími

#### spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

#### nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

#### spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

#### spojitost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud má funkce  $f$  v bodě  $a$  skok nebo oscilaci, ať se předefinuje hodnota  $f(a)$  jakkoli, nebude  $f$  v  $a$  spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud má funkce  $f$  v bodě  $a$  skok nebo oscilaci, ať se předefinuje hodnota  $f(a)$  jakkoli, nebude  $f$  v  $a$  spojitá.



Nicméně u skoku lze vždy předefinovat  $f(a)$  tak, že  $f$  je v  $a$  zleva spojitá a tak, že je zprava spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud má funkce  $f$  v bodě  $a$  skok nebo oscilaci, ať se předefinuje hodnota  $f(a)$  jakkoli, nebude  $f$  v  $a$  spojitá.



Nicméně u skoku lze vždy předefinovat  $f(a)$  tak, že  $f$  je v  $a$  zleva spojitá a tak, že je zprava spojitá.



U oscilace toto může jít nejvýše u jedné jednostranné spojitosti, často to nejde ani zleva ani zprava.

Konec poznámek 4.

## LEKCE05-SPO

### Spojitosť definice

- základy
- spojitosť s okolními
- spojitosť a konstrukce
- spojitosť
- součtu, max, ...
- spojitosť složení
- spojitosť inverze

### nespojitosť

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojitosť
- mon.funkce

### spojitosť na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojitosť a konvexita

### periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 5 :

Uvedený důkaz Bolzanovy věty používá uspořádání na definičním oboru a nelze ho tedy přímo použít na důkaz obdobné věty pro zobrazení mezi Euklidovskými prostory.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 5 :

Uvedený důkaz Bolzanovy věty používá uspořádání na definičním oboru a nelze ho tedy přímo použít na důkaz obdobné věty pro zobrazení mezi Euklidovskými prostory.



Existují jiné postupy v důkaze, které platí i v mnoha obecnějších prostorech (spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina). Jednou z možností je následující postup pomocí středů úseček.



### LEKCE05-SPO

Spojitost

definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojitést

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitést

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 5 :

Uvedený důkaz Bolzanovy věty používá uspořádání na definičním oboru a nelze ho tedy přímo použít na důkaz obdobné věty pro zobrazení mezi Euklidovskými prostory.



Existují jiné postupy v důkaze, které platí i v mnoha obecnějších prostorech (spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina). Jednou z možností je následující postup pomocí středů úseček.



Jestliže se najdou dva body  $x_1, x_2$  s hodnotami funkce  $f$  opačných znamének, zvolí se za  $x_3$  střed úsečky s koncovými body  $x_1, x_2$ .



### LEKCE05-SPO

Spojitost	
definice	
základy	
spojitost s okolími	
spojitost a konstrukce	
spojitost	
součtu, max, ...	
spojitost složení	
spojitost inverze	
nespojité	
odstranitelná	
skok	
oscilace	
nespojité	
mon.funkce	
spojitost na intervalu	
souvislý obraz	
souvislý obraz	
odmocnina	
Weierstrass	
maxima, minima	
monotónní funkce	
prostá=ryze mono-	
tónní	
monotonie a spoji-	
tost	
spojitost a konvexita	
periodické funkce	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

## Poznámky 5 :

Uvedený důkaz Bolzanovy věty používá uspořádání na definičním oboru a nelze ho tedy přímo použít na důkaz obdobné věty pro zobrazení mezi Euklidovskými prostory.



Existují jiné postupy v důkaze, které platí i v mnoha obecnějších prostorech (spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina). Jednou z možností je následující postup pomocí středů úseček.



Jestliže se najdou dva body  $x_1, x_2$  s hodnotami funkce  $f$  opačných znamének, zvolí se za  $x_3$  střed úsečky s koncovými body  $x_1, x_2$ .



Bud' je  $x_3$  řešením nebo má jedna dvojice hodnot v  $x_1, x_3$  nebo v  $x_3, x_2$  různá znaménka a postup se opakuje.



### LEKCE05-SPO

Spojitost

definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 5 :

Uvedený důkaz Bolzanovy věty používá uspořádání na definičním oboru a nelze ho tedy přímo použít na důkaz obdobné věty pro zobrazení mezi Euklidovskými prostory.



Existují jiné postupy v důkaze, které platí i v mnoha obecnějších prostorech (spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina). Jednou z možností je následující postup pomocí středů úseček.



Jestliže se najdou dva body  $x_1, x_2$  s hodnotami funkce  $f$  opačných znamének, zvolí se za  $x_3$  střed úsečky s koncovými body  $x_1, x_2$ .



Bud' je  $x_3$  řešením nebo má jedna dvojice hodnot v  $x_1, x_3$  nebo v  $x_3, x_2$  různá znaménka a postup se opakuje.



Získaná posloupnost  $\{x_n\}$  konverguje k řešení dané rovnice.



### LEKCE05-SPO

Spojitost	
definice	
základy	
spojitost s okolními	
spojitost a konstrukce	
spojitost	
součtu, max, ...	
spojitost složení	
spojitost inverze	
nespojité	
odstranitelná	
skok	
oscilace	
nespojité	
mon.funkce	
spojitost na intervalu	
souvislý obraz	
souvislý obraz	
odmocnina	
Weierstrass	
maxima, minima	
monotónní funkce	
prostá=ryze mono-	
tónní	
monotonie a spoji-	
tost	
spojitost a konvexita	
periodické funkce	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

## Poznámky 5 :

Uvedený důkaz Bolzanovy věty používá uspořádání na definičním oboru a nelze ho tedy přímo použít na důkaz obdobné věty pro zobrazení mezi Euklidovskými prostory.



Existují jiné postupy v důkaze, které platí i v mnoha obecnějších prostorech (spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina). Jednou z možností je následující postup pomocí středů úseček.



Jestliže se najdou dva body  $x_1, x_2$  s hodnotami funkce  $f$  opačných znamének, zvolí se za  $x_3$  střed úsečky s koncovými body  $x_1, x_2$ .



Bud' je  $x_3$  řešením nebo má jedna dvojice hodnot v  $x_1, x_3$  nebo v  $x_3, x_2$  různá znaménka a postup se opakuje.



Získaná posloupnost  $\{x_n\}$  konverguje k řešení dané rovnice.



### LEKCE05-SPO

Spojitost	
definice	
základy	
spojitost s okolími	
spojitost a konstrukce	
spojitost	
součtu, max, ...	
spojitost složení	
spojitost inverze	
nespojité	
odstranitelná	
skok	
oscilace	
nespojité	
mon.funkce	
spojitost na intervalu	
souvislý obraz	
souvislý obraz	
odmocnina	
Weierstrass	
maxima, minima	
monotónní funkce	
prostá=ryze mono-	
tónní	
monotonie a spoji-	
tost	
spojitost a konvexita	
periodické funkce	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	



Místo středů úseček lze brát průsečíky úsečky  $f(x_i), f(x_j)$  s osou  $x$  (obecně s přímkou určenou body  $x_1, x_2$ ).



## LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolími
- spojítost a konstrukce
  - spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojítost
  - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze monotónní
  - monotonie a spojitost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je nutné si uvědomit, že tvrzení neříká nic o tom, jestli spojitá zobrazení zachovávají i tvar intervalu (otevřený, ...). O tom vypovídají až následující tvrzení.



## LEKCE05-SPO

### Spojitosť

#### definice

základy

spojitosť s okolními

#### spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

#### nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

#### spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

#### spojitosť a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí lemma a věta pochází od B.Bolzana a používá se nejen při hledání kořenů polynomů ale i při řešení jiných rovnic tvaru  $f(x) = a$  pro spojitě funkce  $f$ .

Konec poznámek 5.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu,max,...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima,minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 6 :

Význam tvrzení spočívá ve znalosti existence řešení různých úloh na maxima nebo minima.



### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 6 :

Význam tvrzení spočívá ve znalosti existence řešení různých úloh na maxima nebo minima.



Existenční věta. Řešení se musí najít jinak.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 6 :

Význam tvrzení spočívá ve znalosti existence řešení různých úloh na maxima nebo minima.



Existenční věta. Řešení se musí najít jinak.



Mnoho geometrických nebo fyzikálních úloh je tohoto typu (např. hledání plochou největšího obdélníku vepsaného do kruhu apod., nebo hledání nejrychlejší cesty různými prostředními apod.).



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 6 :

Význam tvrzení spočívá ve znalosti existence řešení různých úloh na maxima nebo minima.



Existenční věta. Řešení se musí najít jinak.



Mnoho geometrických nebo fyzikálních úloh je tohoto typu (např. hledání plochou největšího obdélníku vepsaného do kruhu apod., nebo hledání nejrychlejší cesty různými prostředními apod.).



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kde je nejvíce sluníčka k opalování je tedy stále nejasné.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bývá vhodné si uvědomit situaci v mezních (krajních) případech, aby funkce, u níž extrém hledáme, byla úlohou definována na uzavřeném omezeném intervalu. Je-li  $f$  spojitá, je jistota existence řešení.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tvrzení (nazývané též Weierstrassova věta) neplatí na ostatních typech intervalů.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení (nazývané též Weierstrassova věta) neplatí na ostatních typech intervalů.



Omezené uzavřené intervaly na reálné přímce jsou tedy velmi důležité pro aplikace. Mnohdy se pro ně používá termín **kompaktní** intervaly.



## LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
- spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojítost
  - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze mono-
  - tónní
  - monotonie a spoji-
  - tost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

K důkazu tvrzení byla potřeba Bolzano–Weierstrassova věta o existenci konvergentní podposloupnosti. Jakmile tedy máme množinu  $A$  (např. v Euklidovském prostoru) kde z každé posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergentní v  $A$ , nabývá každá reálná funkce na  $A$  svého maxima a minima. Takové množiny v  $\mathbb{R}$  (ale i v dalších Euklidovských prostorech) jsou právě kompaktní množiny, tj. omezené a uzavřené množiny.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

K důkazu tvrzení byla potřeba Bolzano–Weierstrassova věta o existenci konvergentní podposloupnosti. Jakmile tedy máme množinu  $A$  (např. v Euklidovském prostoru) kde z každé posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergentní v  $A$ , nabývá každá reálná funkce na  $A$  svého maxima a minima. Takové množiny v  $\mathbb{R}$  (ale i v dalších Euklidovských prostorech) jsou právě kompaktní množiny, tj. omezené a uzavřené množiny.



Tady se vždycky trochu bojím ;-)

Konec poznámek 6.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 7 :

Důkaz hlavního tvrzení této části (spojitá prostá funkce na intervalu má spojitou inverzi) je proveden pomocí uspořádání na  $\mathbb{R}$  a zdá se, že ho není možné provést např. v rovině.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 7 :

Důkaz hlavního tvrzení této části (spojitá prostá funkce na intervalu má spojitou inverzi) je proveden pomocí uspořádání na  $\mathbb{R}$  a zdá se, že ho není možné provést např. v rovině.



Existují však jiné postupy, které dovolí dokázat tvrzení nejen pro funkce více proměnných, ale i pro funkci jedné proměnné definované na obecnější množině, než je interval.



### LEKCE05-SPO

#### Spojitosť

#### definice

##### základy

##### spojitosť s okolím

#### spojitosť a konstrukce

##### spojitosť

##### součtu, max, ...

##### spojitosť složení

##### spojitosť inverze

#### nespojitosť

##### odstranitelná

##### skok

##### oscilace

##### nespojitosť

##### mon.funkce

#### spojitosť na intervalu

##### souvislý obraz

##### souvislý obraz

##### odmocnina

##### Weierstrass

##### maxima, minima

#### monotónní funkce

##### prostá=ryze mono-

##### tónní

##### monotonie a spoji-

##### tost

#### spojitosť a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 7 :

Důkaz hlavního tvrzení této části (spojitá prostá funkce na intervalu má spojitou inverzi) je proveden pomocí uspořádání na  $\mathbb{R}$  a zdá se, že ho není možné provést např. v rovině.



Existují však jiné postupy, které dovolí dokázat tvrzení nejen pro funkce více proměnných, ale i pro funkci jedné proměnné definované na obecnější množině, než je interval.



Pak ovšem není možné dokázat onu silnou vlastnost prosté spojitě funkce na intervalu, totiž že je ryze monotónní.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť	
definice	
základy	
spojitosť s okolím	
spojitosť a konstrukce	
spojitosť	
součtu, max, ...	
spojitosť složení	
spojitosť inverze	
nespojitosť	
odstranitelná	
skok	
oscilace	
nespojitosť	
mon.funkce	
spojitosť na intervalu	
souvislý obraz	
souvislý obraz	
odmocnina	
Weierstrass	
maxima, minima	
monotónní funkce	
prostá=ryze mono-	
tónní	
monotonie a spoji-	
tosť	
spojitosť a konvexita	
periodické funkce	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

## Poznámky 7 :

Důkaz hlavního tvrzení této části (spojitá prostá funkce na intervalu má spojitou inverzi) je proveden pomocí uspořádání na  $\mathbb{R}$  a zdá se, že ho není možné provést např. v rovině.



Existují však jiné postupy, které dovolí dokázat tvrzení nejen pro funkce více proměnných, ale i pro funkci jedné proměnné definované na obecnější množině, než je interval.



Pak ovšem není možné dokázat onu silnou vlastnost prosté spojitě funkce na intervalu, totiž že je ryze monotónní.



Dá se to očekávat, protože pro funkce více proměnných pojem monotónnosti ztrácí smysl.



### LEKCE05-SPO

Spojitost	
definice	
základy	
spojitost s okolními	
spojitost a konstrukce	
spojitost	
součtu,max,...	
spojitost složení	
spojitost inverze	
nespojité	
odstranitelná	
skok	
oscilace	
nespojité	
mon.funkce	
spojitost na intervalu	
souvislý obraz	
souvislý obraz	
odmocnina	
Weierstrass	
maxima,minima	
monotónní funkce	
prostá=ryze mono-	
tónní	
monotonie a spoji-	
tost	
spojitost a konvexita	
periodické funkce	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	



## Poznámky 7 :

Důkaz hlavního tvrzení této části (spojitá prostá funkce na intervalu má spojitou inverzi) je proveden pomocí uspořádání na  $\mathbb{R}$  a zdá se, že ho není možné provést např. v rovině.



Existují však jiné postupy, které dovolí dokázat tvrzení nejen pro funkce více proměnných, ale i pro funkci jedné proměnné definované na obecnější množině, než je interval.



Pak ovšem není možné dokázat onu silnou vlastnost prosté spojitě funkce na intervalu, totiž že je ryze monotónní.



Dá se to očekávat, protože pro funkce více proměnných pojem monotónnosti ztrácí smysl.



V *Otázkách* je naznačen možný postup jiného důkazu. Pomocí *Příkladů* lze pak vyjasnit, co je pro ono hlavní tvrzení podstatné.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť	
definice	
základy	
spojitosť s okolím	
spojitosť a konstrukce	
spojitosť	
součtu, max, ...	
spojitosť složení	
spojitosť inverze	
nespojitosť	
odstranitelná	
skok	
oscilace	
nespojitosť	
mon.funkce	
spojitosť na intervalu	
souvislý obraz	
souvislý obraz	
odmocnina	
Weierstrass	
maxima, minima	
monotónní funkce	
prostá=ryze mono-	
tónní	
monotonie a spoji-	
tost	
spojitosť a konvexita	
periodické funkce	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Víte, že spojitý obraz kompaktního intervalu je kompaktní interval nebo bod a že obecně spojitý obraz otevřeného (nebo uzavřeného) intervalu nemusí být otevřený (nebo uzavřený). Aby spojitá funkce zachovávala i otevřené intervaly, musí být ryze monotónní – viz *Otázky*.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Víte, že spojitý obraz kompaktního intervalu je kompaktní interval nebo bod a že obecně spojitý obraz otevřeného (nebo uzavřeného) intervalu nemusí být otevřený (nebo uzavřený). Aby spojitá funkce zachovávala i otevřené intervaly, musí být ryze monotónní – viz *Otázky*.



To jsem všímavá, není-liž tomu tak? Já jsem prostě šikulka :-)

Konec poznámek 7.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 8 :



Jeden milý úsměv za snahu  
:-)

Konec poznámek 8.

### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# PŘÍKLADY

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Konstantní funkce je vždy spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

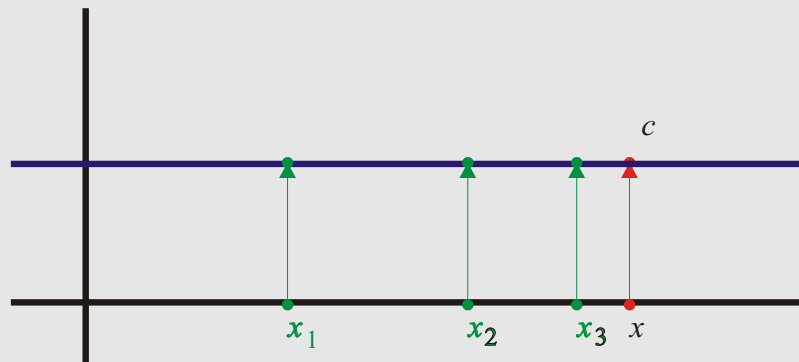
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 1 :

Konstantní funkce je vždy spojitá.



### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

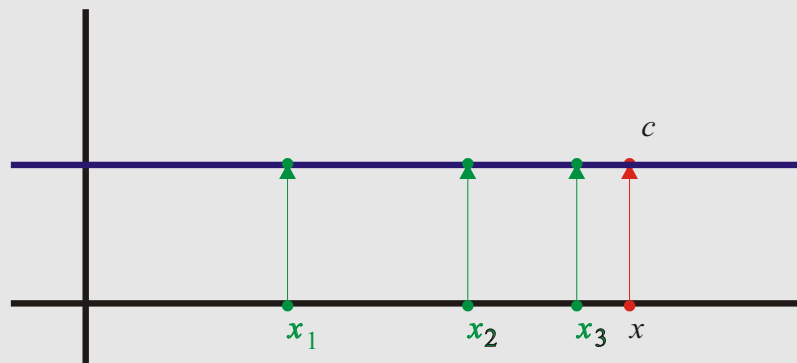
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Příklady 1 :

Konstantní funkce je vždy spojitá.



Když se posloupnost blíží k bodu  $x$ , tak funkční hodnoty tvoří konstantní posloupnost.

### LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolními
- spojítost a konstrukce
  - spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojítost
    - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze monotónní
  - monotonie a spojitost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Identická funkce je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

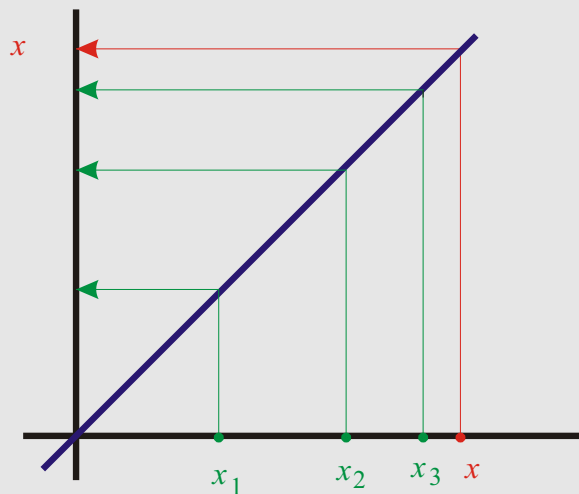
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Identická funkce je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

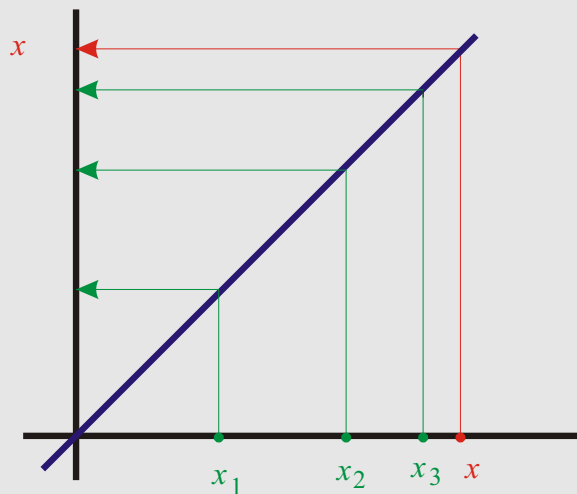
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Identická funkce je spojitá.



Když se posloupnost blíží k bodu  $x$ , tak se funkční hodnoty blíží k bodu  $x$ .

## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Funkce absolutní hodnota je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

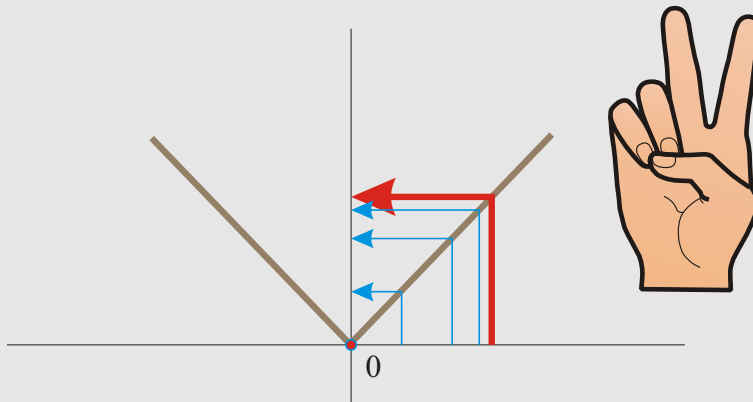
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce absolutní hodnota je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

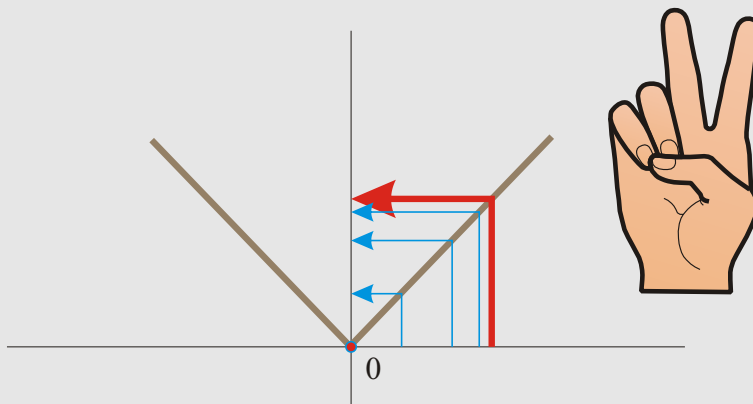
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce absolutní hodnota je spojitá.



Odvodíme to podobně jako u identity.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce sinus je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

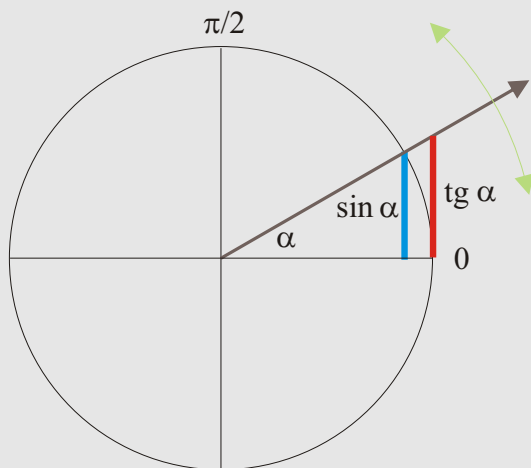
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Funkce sinus je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

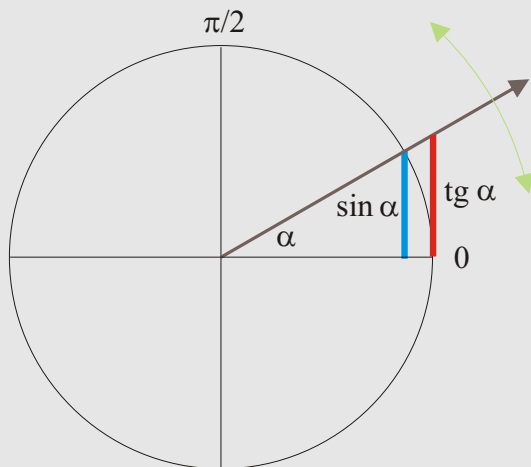
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce sinus je spojitá.



Toto tvrzení nelze dokázat z definice funkce sinus pomocí délek úseček. Později bude tato funkce zavedena jiným způsobem a spojitost bude dokázána.

## LEKCE05-SPO

Spojitost  
definice

základy

spojitost s okolními  
spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojitost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitost

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Funkce signum je spojitá v každém bodě kromě 0.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

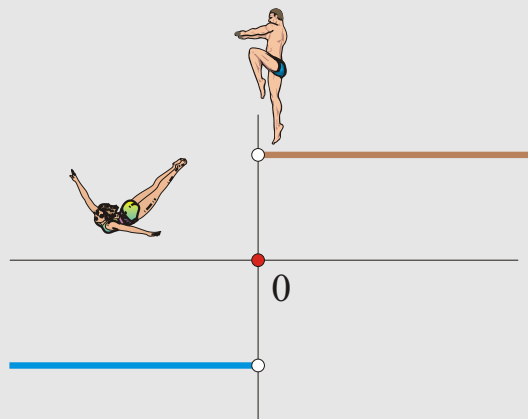
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce signum je spojitá v každém bodě kromě 0.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

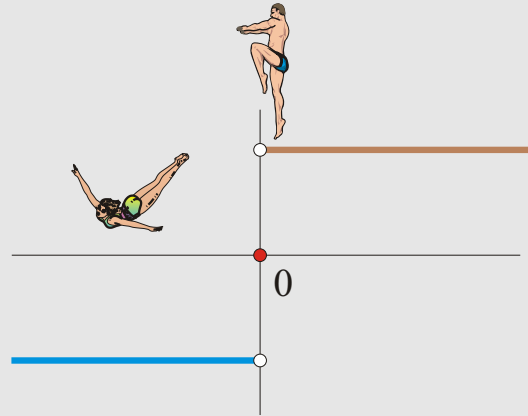
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce signum je spojitá v každém bodě kromě 0.



K nule konvergují posloupnosti (například  $1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, \dots$ ), jejichž funkční hodnoty nekonvergují.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

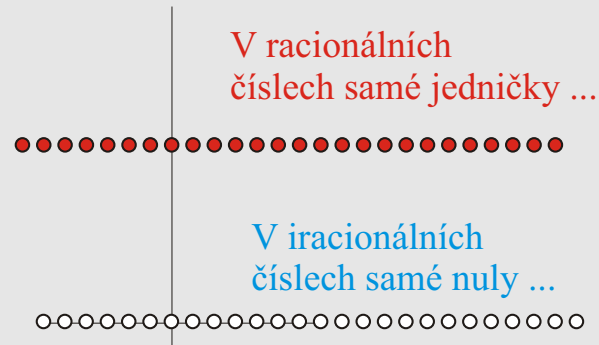
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

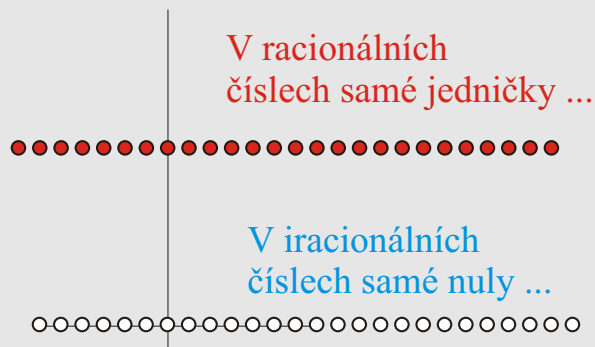
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě.



V posloupnosti můžeme střídat racionální a iracionální body.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu,max,...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima,minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Riemannova funkce je spojitá právě v iracionálních bodech a v bodě 0.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

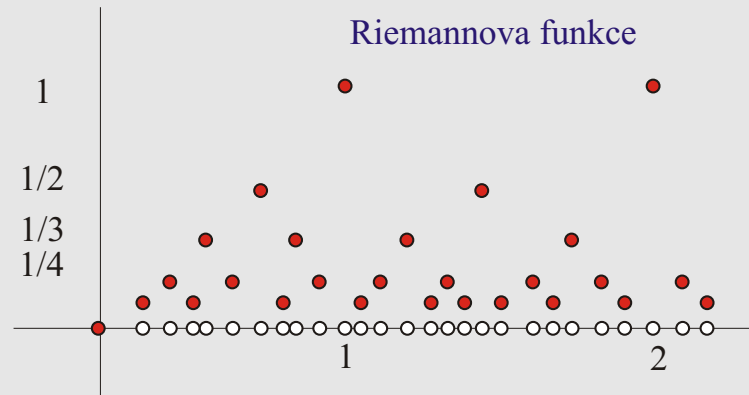
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Riemannova funkce je spojitá právě v iracionálních bodech a v bodě 0.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

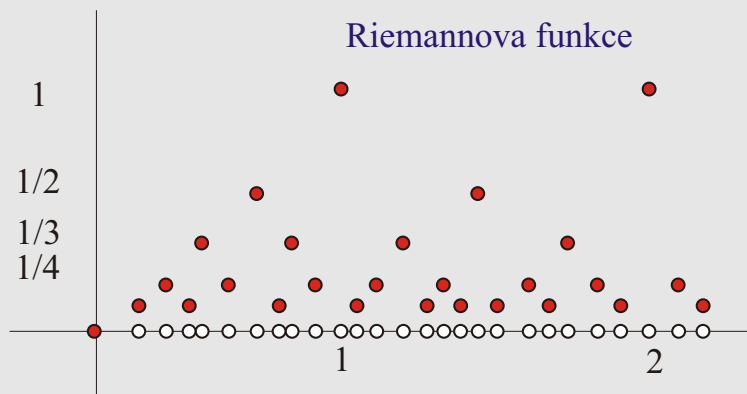
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Riemannova funkce je spojitá právě v iracionálních bodech a v bodě 0.



V libovolném intervalu okolo daného body najdeme pouze konečně mnoho bodů, v nichž je hodnota vyšší než  $1/1000$ . Když posloupnost překoná těchto konečně mnoho protivů, budou již hodnoty blíže nule než  $1/1000$ ,

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Poznámka: Rozšíříme definici mocniny  $a^x$  na reálná  $a > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pomocí suprema hodnot  $b^y$  pro racionální  $b$  a  $y$  menší než  $x$ . Podobně pomocí infima pro  $a \in (0, 1)$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámka: Rozšíříme definici mocniny  $a^x$  na reálná  $a > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pomocí suprema hodnot  $b^y$  pro racionální  $b$  a  $y$  menší než  $x$ . Podobně pomocí infima pro  $a \in (0, 1)$ .



Obecná exponenciální funkce je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámka: Rozšíříme definici mocniny  $a^x$  na reálná  $a > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pomocí suprema hodnot  $b^y$  pro racionální  $b$  a  $y$  menší než  $x$ . Podobně pomocí infima pro  $a \in (0, 1)$ .



Obecná exponenciální funkce je spojitá.



Necht' existuje  $z_k \rightarrow x$  v  $\mathbb{R}$  tak, že  $|a^{z_k} - a^x| > \varepsilon$  pro všechna  $k$  a nějaké  $\varepsilon$ . Pro každé  $k$  se vezme racionální číslo  $u_k$ , které je k  $z_k$  blíže než  $1/k$ , přičemž  $|a^{z_k} - a^{u_k}| < \varepsilon/2$  (podle definice obecné mocniny). Pak  $\{u_k\}$  je posloupnost racionálních čísel konvergující k  $x$ , takže  $a^{u_k} \rightarrow a^x$ , což snadno vede ke sporu.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Konec příkladů 1.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

Polynomy jsou spojité funkce.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklady 2 :

Polynomy jsou spojité funkce.



Jde o součet a součin identity a konstant. Použijeme indukci?



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie a spojitost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Racionální funkce jsou spojité funkce.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Racionální funkce jsou spojité funkce.



Jde o podíl polynomů.

Konec příkladů 2.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost  
odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu  
souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce  
prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Funkce  $\sin(x^3 - 2) - 1/\cos x^{-2}$  je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 3 :

Funkce  $\sin(x^3 - 2) - 1/\cos x^{-2}$  je spojitá.



Dosazováním funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$  za  $x$  do již spojitých funkcí dostaneme podle vět spojitou funkci.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 3 :

Funkce  $\sin(x^3 - 2) - 1/\cos x^{-2}$  je spojitá.



Dosazováním funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$  za  $x$  do již spojitých funkcí dostaneme podle vět spojitou funkci.



Je jasné, které věty používáme?



### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 3 :

Funkce  $\sin(x^3 - 2) - 1/\cos x^{-2}$  je spojitá.



Dosazováním funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$  za  $x$  do již spojitých funkcí dostaneme podle vět spojitou funkci.



Je jasné, které věty používáme?



Lepší vysvětlení vzniku této funkce je dosazení  $\sin x$  za  $x$  a  $\cos x$  za  $y$  do racionální funkce dvou proměnných  $R(x, y)$ .

Konec příkladů 3.

### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

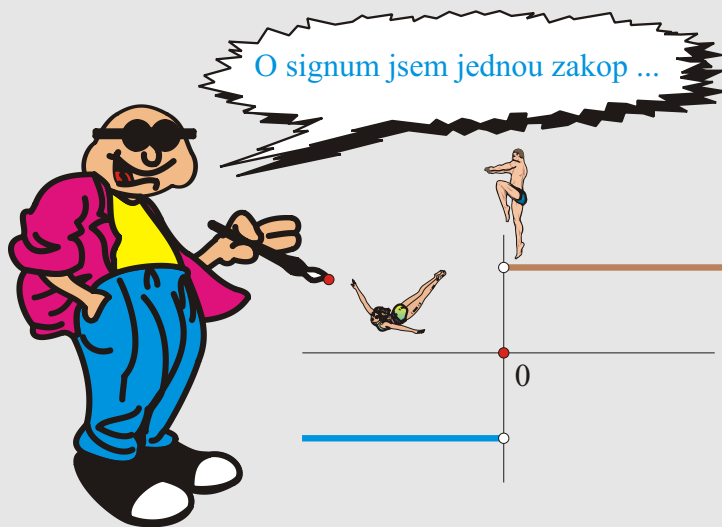
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 4 :

Funkce signum má v 0 skok.



### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

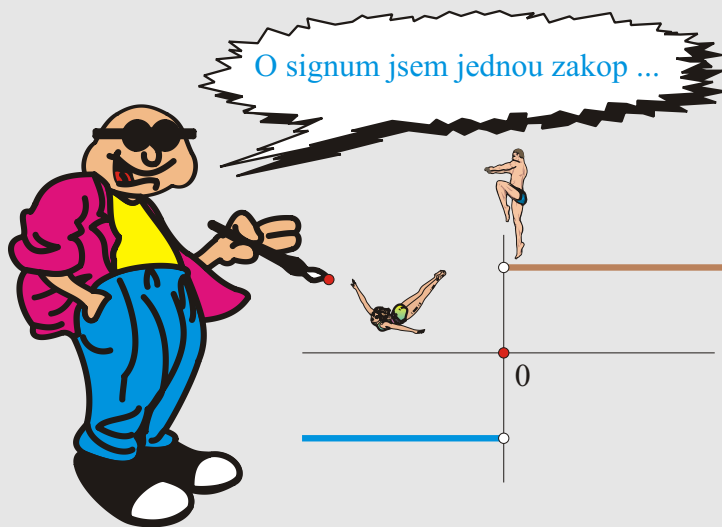
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Příklady 4 :

Funkce signum má v 0 skok.



Jednostranné limity existují,  
ale nerovnájí se.

### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

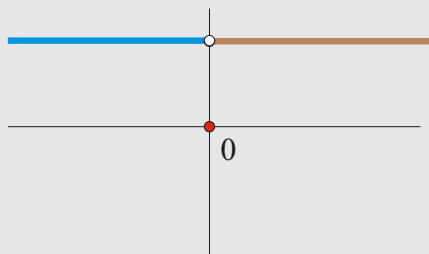
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce  $|\operatorname{sign} x|$  má v 0 odstranitelnou singularitu.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

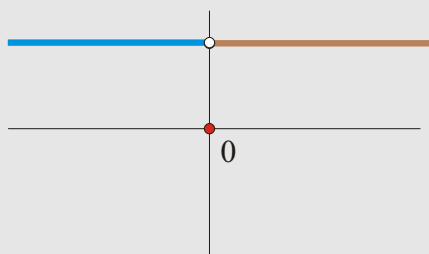
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce  $|\operatorname{sign} x|$  má v 0 odstranitelnou singularitu.



Jednostranné limity existují,  
ale nerovnjají se funkční  
hodnotě.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Funkce

$$\begin{cases} f(x) = \sin(1/x), x \neq 0; \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

má v 0 oscilaci, i když se hodnota v 0 definuje jiným číslem než nulou.



### LEKCE05-SPO

#### Spojitosť

##### definice

základy

spojitosť s okolními

#### spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

#### nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

#### spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

#### spojitosť a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

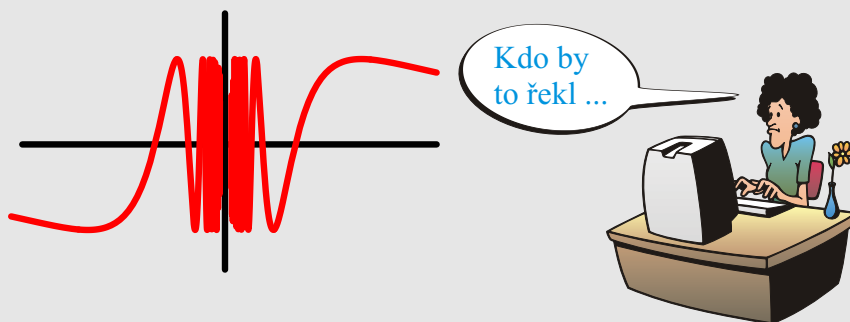
#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Funkce

$$\begin{cases} f(x) = \sin(1/x), x \neq 0; \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

má v 0 oscilaci, i když se hodnota v 0 definuje jiným číslem než nulou.



## LEKCE05-SPO

### Spojítost

#### definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

#### nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

#### spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

#### spojítost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

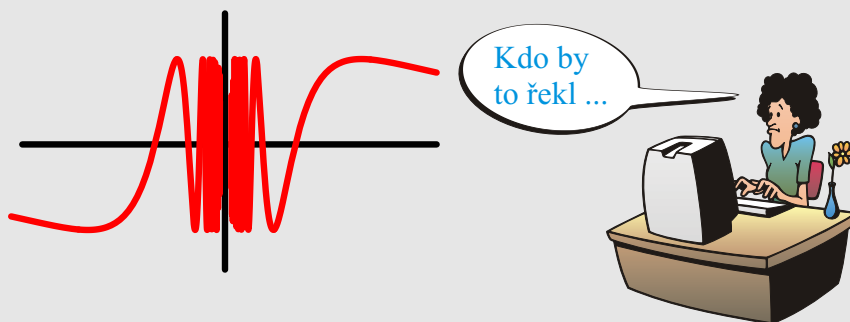
#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Funkce

$$\begin{cases} f(x) = \sin(1/x), x \neq 0; \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

má v 0 oscilaci, i když se hodnota v 0 definuje jiným číslem než nulou.



Oscilace se v praxi opravdu vyskytuje. Než si koupíte auto, váháte ...

## LEKCE05-SPO

### Spojítost definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec příkladů 4.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Příklady 5 :

Oborem hodnot funkce sinus je uzavřený interval  $[-1, 1]$ . Její obraz otevřeného intervalu  $(0, 3)$  je uzavřený interval  $[-1, 1]$ .



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

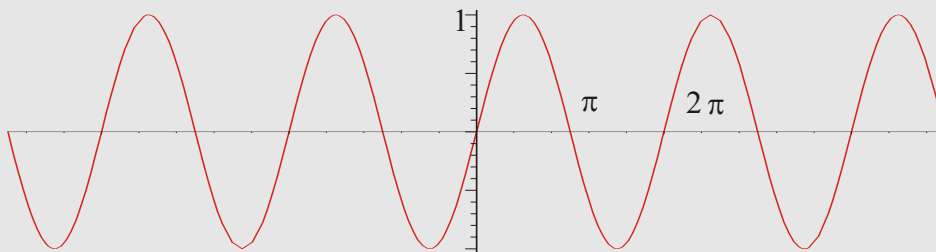
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 5 :

Oborem hodnot funkce sinus je uzavřený interval  $[-1, 1]$ . Její obraz otevřeného intervalu  $(0, 3)$  je uzavřený interval  $[-1, 1]$ .



Jde o ty krajní body a nabývání  $\pm 1$ .

### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dirichletova funkce není spojitá a její obraz libovolného intervalu jsou dva body 0,1.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

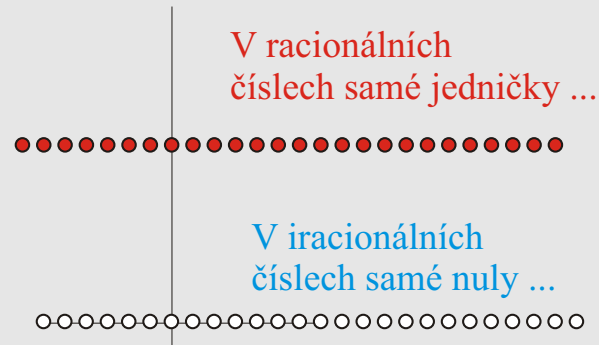
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dirichletova funkce není spojitá a její obraz libovolného intervalu jsou dva body 0,1.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

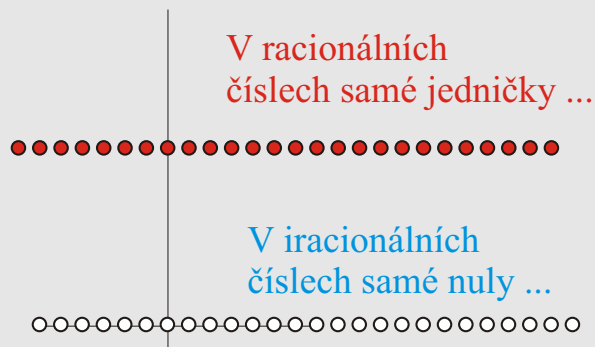
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dirichletova funkce není spojitá a její obraz libovolného intervalu jsou dva body 0,1.



V intervalu vždy najdeme racionální a iracionální body.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Obraz libovolného intervalu Riemannovou funkcí je skoro celá posloupnost  $\{1/n\}$  s její limitou 0.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

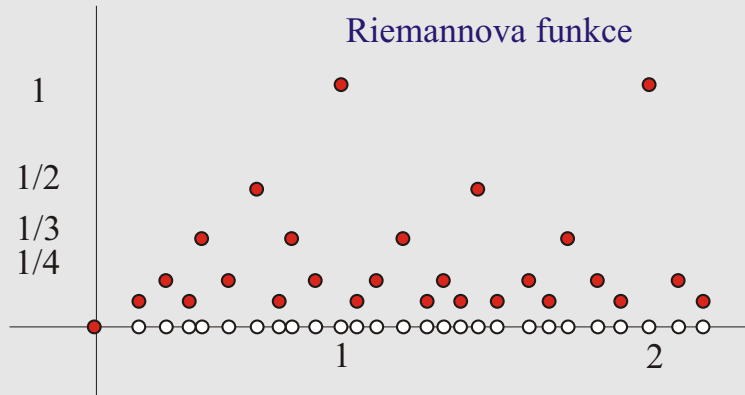
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obraz libovolného intervalu Riemannovou funkcí je skoro celá posloupnost  $\{1/n\}$  s její limitou 0.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy  
spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce  
spojítost  
součtu, max, ...  
spojítost složení  
spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojítost  
mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

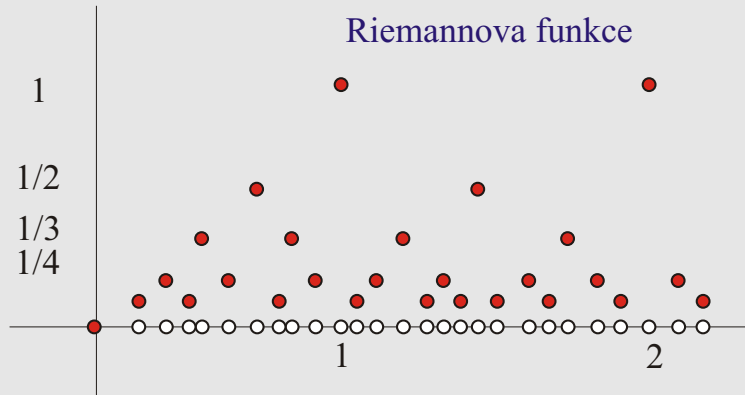
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obraz libovolného intervalu Riemannovou funkcí je skoro celá posloupnost  $\{1/n\}$  s její limitou 0.



Od určitého jmenovatele se v každém intervalu najdou příslušná racionální čísla.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9







Ted' něco pro domácí kutily  
a kutilky:



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' něco pro domácí kutily  
a kutilky:



\* Existuje funkce definovaná na  $\mathbb{R}$ , jejíž obraz libovolného intervalu je celé  $\mathbb{R}$ . Se-  
strojte nějakou takovou.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' něco pro domácí kutily  
a kutilky:



\* Existuje funkce definovaná na  $\mathbb{R}$ , jejíž obraz libovolného intervalu je celé  $\mathbb{R}$ . Se-  
strojte nějakou takovou.



Neporadím, neporadím, ne-  
poradím. Musíte přemýšlet  
sami.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' něco pro domácí kutily  
a kutilky:



\* Existuje funkce definovaná na  $\mathbb{R}$ , jejíž obraz libovolného intervalu je celé  $\mathbb{R}$ . Se-  
strojte nějakou takovou.



Neporadím, neporadím, ne-  
poradím. Musíte přemýšlet  
sami.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ani to není obtížné. Já vždycky najdu nespojitou v každém bodě, jak vy?

Konec příkladů 5.

## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 6 :

Funkce  $x^2$  dosahuje na otevřeném intervalu  $(-1, 1)$  svého minima (kde?), ale na intervalu  $(0, 1)$  nemá ani maximum ani minimum svých hodnot.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dirichletova a Riemannova funkce dosahují na každém intervalu svého maxima i minima. Totéž pro funkci signum.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie a spojitosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec příkladů 6.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Příklady 7 :

Jestliže se ve větě o existenci inverzní spojitě funkci vynechá předpoklad, že původní funkce je definována na intervalu, není možné chtít v tvrzení, aby funkce byla monotónní (proč?).



### LEKCE05-SPO

#### Spojitosť

##### definice

základy

spojitosť s okolními

#### spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

#### nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

#### spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

#### spojitosť a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 7 :

Jestliže se ve větě o existenci inverzní spojitě funkci vynechá předpoklad, že původní funkce je definována na intervalu, není možné chtít v tvrzení, aby funkce byla monotónní (proč?).



Je ale možné uvažovat o platnosti tvrzení: *Inverzní funkce k prosté spojitě funkci je spojitá.*



### LEKCE05-SPO

#### Spojitosť

##### definice

základy

spojitosť s okolím

##### spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

##### nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

##### spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

##### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

##### spojitosť a konvexita

##### periodické funkce

##### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

##### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

##### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

##### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

##### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Následující funkce  $f$  je spojitá a prostá na svém definičním oboru a je rostoucí na každém intervalu z definičního oboru. Její inverzní funkce je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Následující funkce  $f$  je spojitá a prostá na svém definičním oboru a je rostoucí na každém intervalu z definičního oboru. Její inverzní funkce je spojitá.



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 0); \\ x - 2, & x \in (0, 1); \\ x, & x \in (1, 2). \end{cases}$$



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Následující příklad ukazuje, že spojitá prostá funkce definovaná na sjednocení intervalů (dokonce mající interval za obor hodnot) nemusí mít inverzní funkci spojitou.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Následující příklad ukazuje, že spojitá prostá funkce definovaná na sjednocení intervalů (dokonce mající interval za obor hodnot) nemusí mít inverzní funkci spojitou.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & x \leq -1; \\ -2x, & x \in [-1/2, 1/2]; \\ \frac{1}{x} + 1, & \geq 1. \end{cases}$$



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Následující příklad ukazuje, že spojitá prostá funkce definovaná na sjednocení intervalů (dokonce mající interval za obor hodnot) nemusí mít inverzní funkci spojitou.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & x \leq -1; \\ -2x, & x \in [-1/2, 1/2]; \\ \frac{1}{x} + 1, & \geq 1. \end{cases}$$



Tato funkce je prostá a spojitá (je klesající na každém intervalu z definičního oboru) a zobrazuje svůj definiční obor na  $[-2, 2]$ . Inverzní funkce není spojitá (proč? – použijte Bolzanovu větu, nebo přímo najděte bod nespojitosti inverzní funkce).



## LEKCE05-SPO

### Spojité definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' jenom trošičku nespěte,  
dík :-)



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Ted' jenom trošičku nespěte,  
dík :-)



\*3. Upravte předchozí funkci tak, aby byla definována na omezené množině a měla jinak stejné vlastnosti.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

\*4. Další prostá spojitá funkce, která nemá spojitou inverzní funkci, má za definiční obor  $\mathbb{N}$  a je to tedy posloupnost.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

\*4. Další prostá spojitá funkce, která nemá spojitou inverzní funkci, má za definiční obor  $\mathbb{N}$  a je to tedy posloupnost.



Její konstrukce je snadná, zkuste to hned teď, než se podíváte na návod.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

\*4. Další prostá spojitá funkce, která nemá spojitou inverzní funkci, má za definiční obor  $\mathbb{N}$  a je to tedy posloupnost.



Její konstrukce je snadná, zkuste to hned teď, než se podíváte na návod.



Nechť  $f$  je prosté zobrazení  $\mathbb{N}$  na  $\mathbb{Q}$ . Pak inverzní zobrazení není spojité v žádném bodě svého definičního oboru, tj.  $\mathbb{Q}$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy  
spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce  
spojitosť  
součtu, max, ...  
spojitosť složení  
spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojitosť  
mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

\*4. Další prostá spojitá funkce, která nemá spojitou inverzní funkci, má za definiční obor  $\mathbb{N}$  a je to tedy posloupnost.



Její konstrukce je snadná, zkuste to hned teď, než se podíváte na návod.



Nechť  $f$  je prosté zobrazení  $\mathbb{N}$  na  $\mathbb{Q}$ . Pak inverzní zobrazení není spojité v žádném bodě svého definičního oboru, tj.  $\mathbb{Q}$ .



Tak to mám ráda, za málo peněz hodně muziky :-)

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy  
spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce  
spojitosť  
součtu, max, ...  
spojitosť složení  
spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojitosť  
mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec příkladů 7.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 8 :

Funkce signum je konvexní na  $(-\infty, 0]$ . Je konvexní nebo konkávní na  $[0, \infty)$ ? A co na  $[-1, 1]$ ?



### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

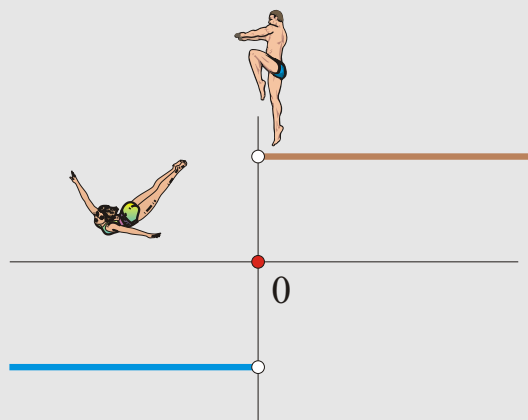
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 8 :

Funkce signum je konvexní na  $(-\infty, 0]$ . Je konvexní nebo konkávní na  $[0, \infty)$ ? A co na  $[-1, 1]$ ?



Konec příkladů 8.

### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# OTÁZKY

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 1 :

Necht'  $A \subsetneq \mathcal{D}(f())$ . Je rozdíl mezi spojitostí funkce  $f$  na množině  $A$  a spojitostí zúžení funkce  $f$  na množinu  $A$ ?



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 1 :

Necht'  $A \subsetneq \mathcal{D}(f())$ . Je rozdíl mezi spojitostí funkce  $f$  na množině  $A$  a spojitostí zúžení funkce  $f$  na množinu  $A$ ?



Co když  $A$  je interval (uzavřený, otevřený)?



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 1 :

Necht'  $A \subsetneq \mathcal{D}(f())$ . Je rozdíl mezi spojitostí funkce  $f$  na množině  $A$  a spojitostí zúžení funkce  $f$  na množinu  $A$ ?



Co když  $A$  je interval (uzavřený, otevřený)?



Samé jednoduchosti.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 1 :

Necht'  $A \subsetneq \mathcal{D}(f())$ . Je rozdíl mezi spojitostí funkce  $f$  na množině  $A$  a spojitostí zúžení funkce  $f$  na množinu  $A$ ?



Co když  $A$  je interval (uzavřený, otevřený)?



Samé jednoduchosti.



Necht' interval  $J = \bigcup_n I_n$ , kde  $\{I_n\}$  je posloupnost zvětšujících se intervalů (takže  $J$  je také interval). Dokažte, že funkce  $f$  je spojitá na  $J$  právě když je spojitá na každém  $I_n$ .

### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Když se dvě sovy při letu vidí neustále vedle sebe, tak opravdu letí vedle sebe. To jde dokázat:



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když se dvě sovy při letu vidí neustále vedle sebe, tak opravdu letí vedle sebe. To jde dokázat:



\* Ukažte: Jsou-li dvě funkce  $g, h$  spojité na intervalu  $J$  a mají stejné hodnoty na racionálních číslech z  $J$ , pak se na  $J$  rovnají.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když se dvě sovy při letu vidí neustále vedle sebe, tak opravdu letí vedle sebe. To jde dokázat:



\* Ukažte: Jsou-li dvě funkce  $g, h$  spojité na intervalu  $J$  a mají stejné hodnoty na racionálních číslech z  $J$ , pak se na  $J$  rovnají.



[Návod: Iracionální číslo  $x$  je limitou posloupnosti racionálních čísel  $x_n$ . Protože  $g(x_n) = h(x_n)$ , musí být i  $g(x) = h(x)$ .]



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Když se dvě sovy při letu vidí neustále vedle sebe, tak opravdu letí vedle sebe. To jde dokázat:



\* Ukažte: Jsou-li dvě funkce  $g, h$  spojité na intervalu  $J$  a mají stejné hodnoty na racionálních číslech z  $J$ , pak se na  $J$  rovnají.



[Návod: Iracionální číslo  $x$  je limitou posloupnosti racionálních čísel  $x_n$ . Protože  $g(x_n) = h(x_n)$ , musí být i  $g(x) = h(x)$ .]



Z důkazu je vidět, že místo racionálních čísel v tvrzení lze brát např. iracionální čísla, nebo jiná, jejichž limitami jsou všechna reálná čísla.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Použitím tohoto tvrzení  
lze snadněji dokázat ně-  
která tvrzení pro obecnou  
mocninu:



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Použitím tohoto tvrzení lze snadněji dokázat některá tvrzení pro obecnou mocninu:



Protože funkce  $g(x) = a^{-x}$ ,  $h(x) = \frac{1}{a^x}$  se rovnají v racionálních číslech a jsou spojité, rovnají se i ve všech reálných číslech.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Použitím tohoto tvrzení lze snadněji dokázat některá tvrzení pro obecnou mocninu:



Protože funkce  $g(x) = a^{-x}$ ,  $h(x) = \frac{1}{a^x}$  se rovnají v racionálních číslech a jsou spojité, rovnají se i ve všech reálných číslech.



Podobně pro další vlastnosti mocnin, např.  $g_1(x) = (a^y)^x$ ,  $h_1(x) = a^{xy}$ , kde  $y$  je racionální, a potom pro  $g_2(y) = (a^y)^x$ ,  $h_2(y) = a^{xy}$ , kde  $x$  je reálné – dohromady se pak dostane vztah  $(a^y)^x = a^{xy}$  pro libovolná reálná  $x, y$ .



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Použitím tohoto tvrzení lze snadněji dokázat některá tvrzení pro obecnou mocninu:



Protože funkce  $g(x) = a^{-x}$ ,  $h(x) = \frac{1}{a^x}$  se rovnají v racionálních číslech a jsou spojité, rovnají se i ve všech reálných číslech.



Podobně pro další vlastnosti mocnin, např.  $g_1(x) = (a^y)^x$ ,  $h_1(x) = a^{xy}$ , kde  $y$  je racionální, a potom pro  $g_2(y) = (a^y)^x$ ,  $h_2(y) = a^{xy}$ , kde  $x$  je reálné – dohromady se pak dostane vztah  $(a^y)^x = a^{xy}$  pro libovolná reálná  $x, y$ .



Oni totiž sovy mrkají velice často, ale velice krátce ;-)

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' nás čeká ještě jedna  
dobrota :-)



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' nás čeká ještě jedna  
dobrota :-)



\* Ukažte, že funkce  $f$  definovaná na  $\mathbb{R}$  je spojitá právě když  $f$ -vzor uzavřeného intervalu je uzavřená množina, tj.,  $f^{-1}(A)$  je uzavřená, jakmile  $A$  je uzavřený interval (nebo obecněji: uzavřená množina).



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Ted' nás čeká ještě jedna  
dobrota :-)



\* Ukažte, že funkce  $f$  definovaná na  $\mathbb{R}$  je spojitá právě když  $f$ -vzor uzavřeného intervalu je uzavřená množina, tj.,  $f^{-1}(A)$  je uzavřená, jakmile  $A$  je uzavřený interval (nebo obecněji: uzavřená množina).



[Návod: Pokud  $f$  není spojitá, existuje  $\{x_n\}$  s limitou  $a$  tak, že nějaká podposloupnost  $\{f(x_{k_n})\}$  konverguje k  $b \neq f(a)$ . Množina  $A$  skládající se z členů této podposloupnosti a z  $b$ , pokud je  $b$  vlastní, je uzavřená, ale její vzor nebude uzavřený. Vyžaduje-li se za  $A$  interval, je nutné vzít v obrazech podposloupnost monotónní,  $A$  pak bude obsahovat tuto podposloupnost (a případně její limitu). Druhá implikace je jednoduchá.]



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tohle je prostě dobrá bašta  
pro všechny :-)

Konec otázek 1.

## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 2 :

Uveďte příklad nespojité funkce  $f$  takové, že  $f_+$  je spojitá funkce (může být i  $f_-$  spojitá?).



### LEKCE05-SPO

#### Spojitosť

##### definice

základy

spojitosť s okolím

#### spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

#### nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

#### spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

#### spojitosť a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

Uveďte příklad nespojité funkce  $f$  takové, že  $f_+$  je spojitá funkce (může být i  $f_-$  spojitá?).



Uveďte příklad nespojité funkce  $f$  takové, že  $f \cdot f$  je spojitá.

Konec otázek 2.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

Najděte nespojité funkce  $f, g$  na  $\mathbb{R}$ , jejichž složení  $f \circ g$  je spojité.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte pomocí skládání funkcí, že  $|f|$  je spojitá, jakmile  $f$  je spojitá.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zjistěte, v kterých bodech je spojitá funkce  $1/\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}$ .

Konec otázek 3.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 4 :

Dodefinujte funkci tangens v bodě  $\pi/2$  a určete, jakou nespojitost tato funkce v tomto bodě má.



### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ukažte, že  $f$  má v bodě  $a \in \mathcal{D}(f)$  skok nebo oscilaci právě když existuje  $x_n \rightarrow a$  taková, že posloupnost  $\{f(x_n)\}$  nemá limitu.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# POZOROVÁNÍ.

1. Bod nespojitosti monotónní funkce je bodem skoku.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# POZOROVÁNÍ.

1. Bod nespojitosti monotónní funkce je bodem skoku.



2. Monotónní funkce na intervalu má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# POZOROVÁNÍ.

1. Bod nespojitosti monotónní funkce je bodem skoku.



2. Monotónní funkce na intervalu má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.



U monotónní funkce může být hodně bodů skoku. Nejvýše je jich spočetně.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Monotónní funkce může mít v bodech nespojitosti jen skoky, typická je funkce signum, která je neklesající.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie a spojitosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

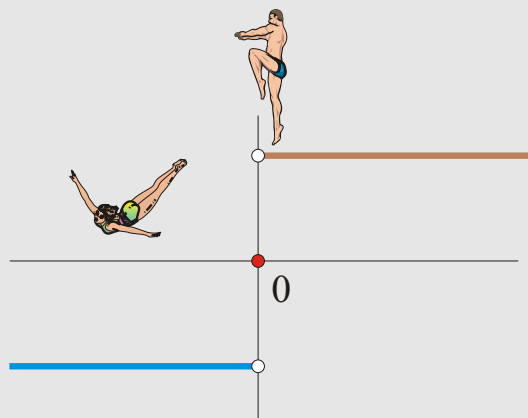
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Monotónní funkce může mít v bodech nespojitosti jen skoky, typická je funkce signum, která je neklesající.



## LEKCE05-SPO

### Spojítost

#### definice

##### základy

##### spojítost s okolními

#### spojítost a konstrukce

##### spojítost

##### součtu, max, ...

##### spojítost složení

##### spojítost inverze

#### nespojítost

##### odstranitelná

##### skok

##### oscilace

##### nespojítost

##### mon.funkce

#### spojítost na intervalu

##### souvislý obraz

##### souvislý obraz

##### odmocnina

##### Weierstrass

##### maxima, minima

#### monotónní funkce

##### prostá=ryze mono-

##### tónní

##### monotonie a spoji-

##### tost

#### spojítost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

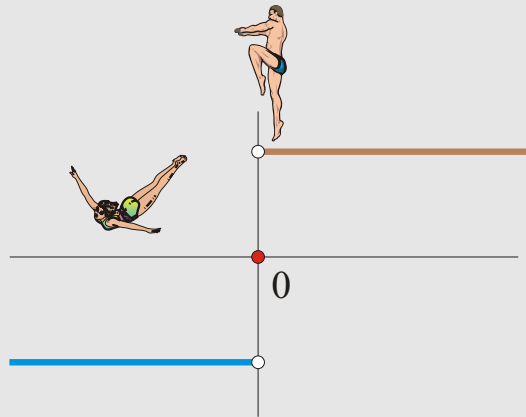
#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Monotónní funkce může mít v bodech nespojitosti jen skoky, typická je funkce signum, která je neklesající.



Jeden skok.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

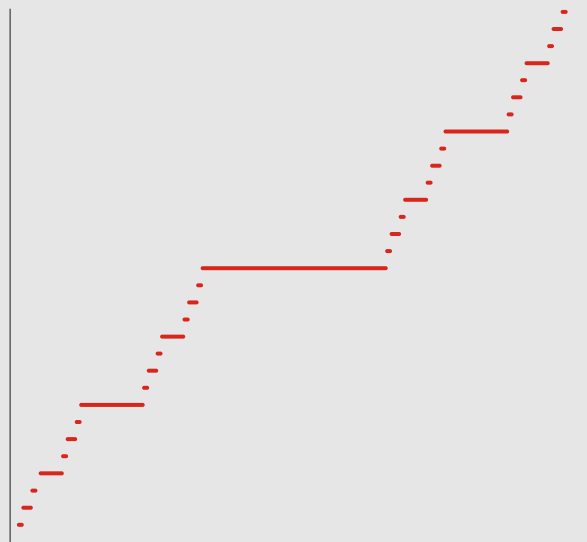
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existuje funkce s nekonečně mnoha skoky.



## LEKCE05-SPO

### Spojítost

#### definice

základy

spojítost s okolími

#### spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

#### nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

#### spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

#### spojítost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

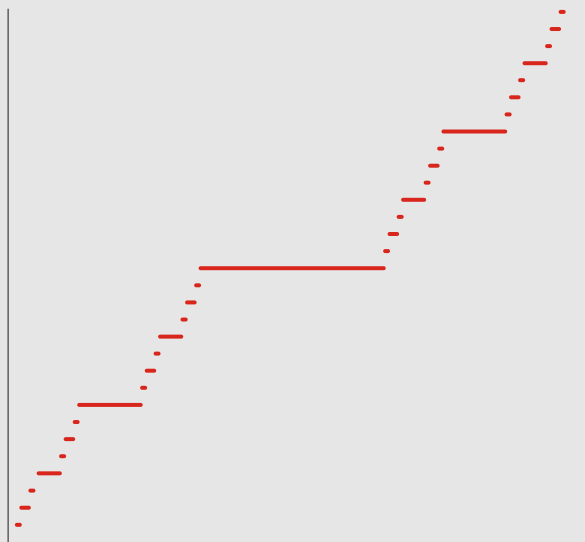
1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existuje funkce s nekonečně mnoha skoky.



Konstantní v prostřední třetině, jako naši hokejisti ...



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

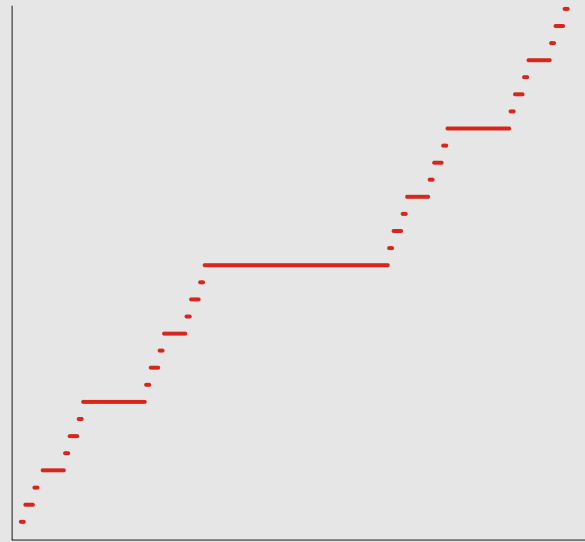
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existuje funkce s nekonečně mnoha skoky.



Konstantní v prostřední třetině, jako naši hokejisti ...



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Má oblíbená funkce ...



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec otázek 4.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 5 :

Ukažte na příkladech, že spojitý obraz otevřeného intervalu (např.  $\mathbb{R}$ ) může být interval jakéhokoli druhu (tj. otevřený, uzavřený nebo polootevřený).



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že obor hodnot obecné exponenciální funkce  $a^x$  je pro  $a \neq 1$  interval  $(0, +\infty)$ .  
Uvědomte si, že tato funkce nabývá libovolně velkých hodnot i libovolně malých kladných hodnot.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že obor hodnot obecné exponenciální funkce  $a^x$  je pro  $a \neq 1$  interval  $(0, +\infty)$ .  
Uvědomte si, že tato funkce nabývá libovolně velkých hodnot i libovolně malých kladných hodnot.



Odtud vyplývá, že logaritmická funkce má za definiční obor interval  $(0, +\infty)$ .



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zjistěte, zda má polynom  $8x^3 - 16x^2 + 4x + 1$  kořen v intervalu  $(0, 1)$ .

Konec otázek 5.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Otázky 6 :

Sestrojte funkci na intervalu  $[0, 1]$ , která nemá na tomto intervalu největší ani nejmenší hodnotu.

Konec otázek 6.

### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 7 :



Ted' si můžeme trochu zjednodušit život. To se hodí:



### LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 7 :



Ted' si můžeme trochu zjednodušit život. To se hodí:



\* Spojitost inverzní funkce.



### LEKCE05-SPO

Spojtitost

definice

základy

spojtitost s okolími

spojtitost a konstrukce

spojtitost

součtu,max,...

spojtitost složení

spojtitost inverze

nespojtitost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojtitost

mon.funkce

spojtitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima,minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojtitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 7 :



Ted' si můžeme trochu zjednodušit život. To se hodí:



### \* Spojitost inverzní funkce.



V *Příkladech* uvedené spojité prosté funkce, které nemají spojitou inverzní funkci, byly definovány na neomezených uzavřených množinách, nebo na omezených neuzavřených množinách.

Přesto toto tvrzení platí pro funkce definované na intervalech a na obecnějších množinách než na intervalech.



## LEKCE05-SPO

### Spojtitost

#### definice

základy

spojtitost s okolími

spojtitost a konstrukce

spojtitost

součtu,max,...

spojtitost složení

spojtitost inverze

#### nespojtitost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojtitost

mon.funkce

#### spojtitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima,minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

#### spojtitost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je vhodné najít důkaz tvrzení, který nezávisí na intervalech:



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je vhodné najít důkaz tvrzení, který nezávisí na intervalech:



*Inverzní funkce k prosté spojité funkci  $f$  definované na intervalu  $J$ , je spojitá.*



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je vhodné najít důkaz tvrzení, který nezávisí na intervalech:



*Inverzní funkce k prosté spojité funkci  $f$  definované na intervalu  $J$ , je spojitá.*



[Návod: Má se dokázat, že pokud  $f(a_n) \rightarrow f(a)$  (pro  $a, a_n \in J$ ), pak  $a_n \rightarrow a$ . Pokud existuje podposloupnost  $\{a_{k_n}\}$  konvergující k nějakému  $b \in J$ , musí být  $b = a$ . Ukažte, že posloupnost  $\{a_n\}$  je omezená.]



## LEKCE05-SPO

Spojité definice	základy
spojitost a konstrukce	spojitost s okolními
spojitost	spojitost
	součtu, max, ...
	spojitost složení
	spojitost inverze
nespojité	odstranitelná
	skok
	oscilace
	nespojité
	mon.funkce
spojitost na intervalu	souvislý obraz
	souvislý obraz
	odmocnina
	Weierstrass
	maxima, minima
monotónní funkce	prostá=ryze mono-
	tónní
	monotonie a spoji-
	tost
spojitost a konvexita	periodické funkce
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte pomocí předešlého návodu tvrzení



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dokažte pomocí předešlého návodu tvrzení



*Inverzní funkce k prosté spojité funkci definované na omezené uzavřené (tj. kompaktní) množině, je spojitá.*



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# \* Monotonie versus modifikovaná Bolzanova věta.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## \* Monotonie versus modifikovaná Bolzanova věta.



Ukažte, že spojitá funkce na intervalu  $J$  je ryze monotónní právě když zobrazuje otevřené intervaly v  $J$  na otevřené intervaly.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie a spojitost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## \* Monotonie versus modifikovaná Bolzanova věta.



Ukažte, že spojitá funkce na intervalu  $J$  je ryze monotónní právě když zobrazuje otevřené intervaly v  $J$  na otevřené intervaly.



A je to nad slunce jasnější ;-)  
)

Konec otázek 7.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy  
spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce  
spojitosť  
součtu, max, ...  
spojitosť složení  
spojitosť inverze

nespojitosť  
odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojitosť  
mon.funkce

spojitosť na intervalu  
souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce  
prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 8 :

Ukažte, že každé konkávní funkci na uzavřeném omezeném intervalu lze změnit hodnoty v krajních bodech intervalu tak, že zůstane konkávní, ale nebude tam spojitá.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie a spojitost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 8 :

Ukažte, že každé konkávní funkci na uzavřeném omezeném intervalu lze změnit hodnoty v krajních bodech intervalu tak, že zůstane konkávní, ale nebude tam spojitá.



Limonádka.

Konec otázek 8.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# CVIČENÍ

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Cvičení 1 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Konec cvičení 1.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 2 :

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec cvičení 2.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 3 :

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec cvičení 3.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 4 :

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 5 :

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# Konec cvičení 5.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 6 :

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Cvičení 7 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Konec cvičení 7.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 8 :

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITOST FUNKCÍ - MIX



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# SPOJITOST FUNKCÍ - MIX



**Příklad.** Sestrojte funkci, která má právě dva body spojitosti.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



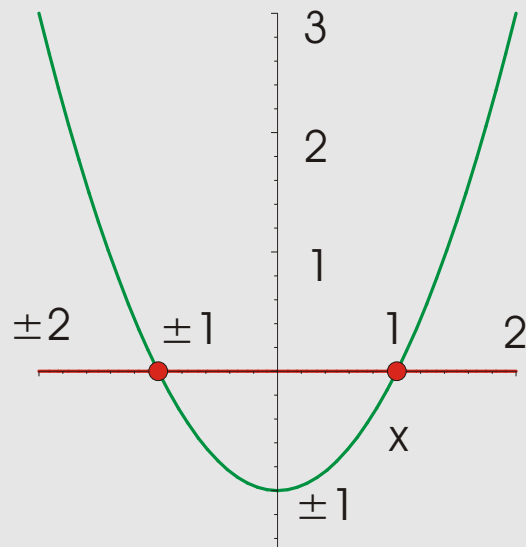
# SPOJITOST FUNKCÍ - MIX



**Příklad.** Sestrojte funkci, která má právě dva body spojitosti.



**Řešení.** Vynásobíme Dirichletovu funkci  $D(x)$  funkcí  $x^2 - 1$  a jsme hotovi.



## LEKCE05-SPO

- Spojítost
- definice
  - základy
  - spojítost s okolími
- spojítost a konstrukce
- spojítost
  - součtu, max, ...
  - spojítost složení
  - spojítost inverze
- nespojítost
  - odstranitelná
  - skok
  - oscilace
  - nespojítost
  - mon.funkce
- spojítost na intervalu
  - souvislý obraz
  - souvislý obraz
  - odmocnina
  - Weierstrass
  - maxima, minima
- monotónní funkce
  - prostá=ryze mono-
  - tónní
  - monotonie a spoji-
  - tost
- spojítost a konvexita
- periodické funkce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9





1 z 10. HOROR.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < 7\varepsilon'$$

$$3. \forall \varepsilon'' > 0 \exists \delta'' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta'' \implies |f(x) - A| \leq \varepsilon''$$



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < 7\varepsilon'$$

$$3. \forall \varepsilon'' > 0 \exists \delta'' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta'' \implies |f(x) - A| \leq \varepsilon''$$



**Řešení.** Platí-li (1), dokážeme (2). Necht' je  $\varepsilon'$  dáno, položíme  $\varepsilon = 7\varepsilon'$ , použijeme (1) a najdeme  $\delta$ . Položíme  $\delta' = \delta$ . Pak (2) platí. Podobně (2) dá (3) pomocí vztahů  $\varepsilon = \varepsilon''/2$  a  $\delta'' = \delta$ . Zbytek se udělá podobně.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy  
spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce  
spojitosť  
součtu, max, ...  
spojitosť složení  
spojitosť inverze

nespojitosť  
odstranitelná  
skok  
oscilace  
nespojitosť  
mon.funkce

spojitosť na intervalu  
souvislý obraz  
souvislý obraz  
odmocnina  
Weierstrass  
maxima, minima

monotónní funkce  
prostá=ryze mono-  
tónní  
monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < 7\varepsilon'$$

$$3. \forall \varepsilon'' > 0 \exists \delta'' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta'' \implies |f(x) - A| \leq \varepsilon''$$



**Řešení.** Platí-li (1), dokážeme (2). Necht' je  $\varepsilon'$  dáno, položíme  $\varepsilon = 7\varepsilon'$ , použijeme (1) a najdeme  $\delta$ . Položíme  $\delta' = \delta$ . Pak (2) platí. Podobně (2) dá (3) pomocí vztahů  $\varepsilon = \varepsilon''/2$  a  $\delta'' = \delta$ . Zbytek se udělá podobně.



Tomu říkám „trik se sedmi epsilonama“.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Chytrý člověk používá v každém výroku jinak indexovaná písmenka, zde  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  a pod.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Udělal 5 z 10.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte, co znamenají následující vztahy

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$3. \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Příklad.** Zkoumejte, co znamenají následující vztahy

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$3. \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$



**Řešení.** První podmínka znamená omezenost na jistém okolí.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte, co znamenají následující vztahy

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$3. \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$



**Řešení.** První podmínka znamená omezenost na jistém okolí.



Druhá podmínka znamená konstantnost na jistém okolí.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte, co znamenají následující vztahy

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$$

$$3. \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$



**Řešení.** První podmínka znamená omezenost na jistém okolí.



Druhá podmínka znamená konstantnost na jistém okolí.



Třetí podmínka znamená konstantnost na jistém okolí.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



1 z 10.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N} \exists \delta' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < \frac{1}{n}$$



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N} \exists \delta' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < \frac{1}{n}$$



**Řešení.** Platí-li (1), tak k danému  $n$  položíme  $\varepsilon = 1/n$  a  $\delta = \delta'$ . Pak platí (2). Platí-li (2), tak k danému  $\varepsilon$  najdeme  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby  $1/n < \varepsilon$ . Podle (2) pak najdeme  $\delta'$  a položíme  $\delta = \delta'$ .



## LEKCE05-SPO

### Spojitosť definice

- základy
- spojitosť s okolím
- spojitosť a konstrukce
- spojitosť
- součtu, max, ...
- spojitosť složení
- spojitosť inverze

### nespojitosť

- odstranitelná
- skok
- oscilace
- nespojitosť
- mon.funkce

### spojitosť na intervalu

- souvislý obraz
- souvislý obraz
- odmocnina
- Weierstrass
- maxima, minima

### monotónní funkce

- prostá=ryze mono-
- tónní
- monotonie a spoji-
- tost

### spojitosť a konvexita periodické funkce

### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N} \exists \delta' > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < \frac{1}{n}$$



**Řešení.** Platí-li (1), tak k danému  $n$  položíme  $\varepsilon = 1/n$  a  $\delta = \delta'$ . Pak platí (2). Platí-li (2), tak k danému  $\varepsilon$  najdeme  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby  $1/n < \varepsilon$ . Podle (2) pak najdeme  $\delta'$  a položíme  $\delta = \delta'$ .



Jednoduchosti mi dělají radost.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





5 z 10 :-)



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Příklad. Zkoumejte funkci

$$x \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x)$$



### LEKCE05-SPO

#### Spojítost

##### definice

základy

spojitost s okolími

#### spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

#### nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

#### spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

#### monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

#### spojitost a konvexita

#### periodické funkce

#### Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

#### Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte funkci

$$x \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x)$$



**Řešení.** V racionálních bodech  $x$  se dolimitíme k 1.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojitost s okolími

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte funkci

$$x \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x)$$



**Řešení.** V racionálních bodech  $x$  se dolimitíme k 1.



V iracionálních bodech  $x$  se dolimitíme k 0.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními  
spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklad. Zkoumejte funkci

$$x \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x)$$

↓  
Řešení. V racionálních bodech  $x$  se dolimitíme k 1.

↓  
V iracionálních bodech  $x$  se dolimitíme k 0.



Jde o jiný zápis Dirichletovy funkce.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím  
spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



2 z 10.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Porovnejte počet kvantifikátorů v definici spojitosti pomocí  $\varepsilon - \delta$  definice a v definici přes posloupnosti.



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Porovnejte počet kvantifikátorů v definici spojitosti pomocí  $\varepsilon - \delta$  definice a v definici přes posloupnosti.



**Řešení.**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

dává 3 kvantifikátory a jednu implikace.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Porovnejte počet kvantifikátorů v definici spojitosti pomocí  $\varepsilon - \delta$  definice a v definici přes posloupnosti.



**Řešení.**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

dává 3 kvantifikátory a jednu implikace.



Definice  $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a)$  dává po rozepsání

$$\forall \{x_n\} :$$

$$[\forall \varepsilon' > 0 \exists n_1 \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon']$$

$$\implies$$

$$[\forall \varepsilon'' > 0 \exists n_2 \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \implies |f(x_n) - A| < \varepsilon'']$$

přesně 7 kvantifikátorů a 3 implikace.



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolními

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Šlo by to dvěma kvantifikátory?



## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# NABÝVÁNÍ MEZIHODNOTY



## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# NABÝVÁNÍ MEZIHODNOTY



**Příklad.** Necht'  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je spojitá. Pak existuje  $x \in [0, 1]$  tak, že  $f(x) = x$



## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

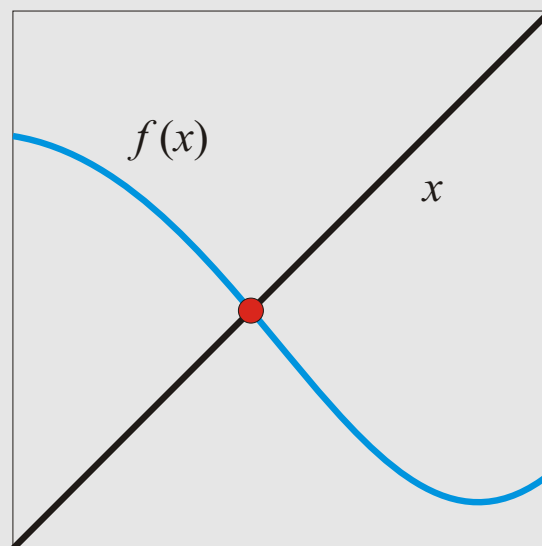
# NABÝVÁNÍ MEZIHODNOTY



**Příklad.** Necht'  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  je spojitá. Pak existuje  $x \in [0, 1]$  tak, že  $f(x) = x$



**Řešení.** Zkoumáme funkci  $g(x) = f(x) - x$ . Ta je spojitá a někde nabývá nuly jako své „mezihodnoty“.



## LEKCE05-SPO

Spojité  
definice

základy

spojitost s okolními

spojitost a konstrukce

spojitost

součtu, max, ...

spojitost složení

spojitost inverze

nespojité

odstranitelná

skok

oscilace

nespojité

mon.funkce

spojitost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pevný bod našli 2 z 10.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec cvičení 8.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Cvičení 9 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 9.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# UČENÍ

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolími

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 1 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Konec učení 1.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Učení 2 :

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec učení 2.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 3 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec učení 3.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 4 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Konec učení 4.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 5 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Konec učení 5.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 6 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Konec učení 6.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 7 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec učení 7.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Učení 8 :



Každá funkce má bod spojitosti.



### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolím

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie

a spojitost

spojitosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Učení 8 :



Každá funkce má bod spojitosti.



I Dirichletova?

### LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze monotónní

monotonie a spojitost

spojitost

spojitost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Riemannova funkce nemá bod spojitosti, protože to ty racionální body všude zkazí.



## LEKCE05-SPO

Spojítost

definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-

tónní

monotonie a spoji-

tost

spojítost a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Riemannova funkce nemá bod spojitosti, protože to ty racionální body všude zkaží.



Jejich síla je však jako tvoje výkony po 1 pivu. Nebojí se jich ani odmocnina ze dvou.

## LEKCE05-SPO

Spojítost  
definice

základy

spojítost s okolími

spojítost a konstrukce

spojítost

součtu, max, ...

spojítost složení

spojítost inverze

nespojítost

odstranitelná

skok

oscilace

nespojítost

mon.funkce

spojítost na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tost

spojítost a konvexita  
periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Konec učení 8.

## LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 9 :

## LEKCE05-SPO

Spojitosť  
definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Konec učení 9.

### LEKCE05-SPO

Spojitosť

definice

základy

spojitosť s okolními

spojitosť a konstrukce

spojitosť

součtu, max, ...

spojitosť složení

spojitosť inverze

nespojitosť

odstranitelná

skok

oscilace

nespojitosť

mon.funkce

spojitosť na intervalu

souvislý obraz

souvislý obraz

odmocnina

Weierstrass

maxima, minima

monotónní funkce

prostá=ryze mono-  
tónní

monotonie a spoji-  
tosť

spojitosť a konvexita

periodické funkce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9