Spojitost funkce

Spojitost je nejdůležitější obecná vlastnost funkcí. Umožňuje aproximace různých řešení. Je důležité vědět, kdy se malá změna nějakého měření projeví málo na konečném výsledku. Zpřesňuje-li se měření, měl by se příslušný počítaný výsledek blížit k přesnému výsledku. To vyjadřuje následující definice, která je zformulována pro funkce s obecným definičním oborem. Pro představu a základní použití je třeba mít na mysli funkce definované na intervalu.

SPOJITOST POMOCÍ POSLOUPNOSTÍ

DEFINICE. Nechť f je funkce, $a \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k a nechť $\lim f(x_n) = f(a)$. Pak říkáme, že f je spojitá v bodě a a tento bod se nazývá bodem spojitosti funkce f.

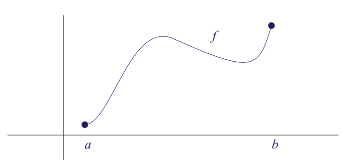
Je-li f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, říkáme, že f je spojitá.

Na tuhle definici si dejte pozor!!! Jestliže se posloupnost blíží k a, pak se blíží funkční hodnoty k $f(a)$.

Jestliže se v definici berou jen posloupnosti s prvky $x_n \geq a$ (nebo $x_n \leq a$), hovoří se o spojitosti zprava (resp. spojitosti zleva), dohromady o tzv. jednostranných spojitostech (spojitosti se pak říká oboustranná spojitost).

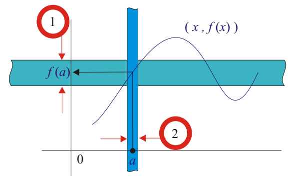
Je-li f spojitá v každém bodě množiny A, říkáme, že f je spojitá na množině A.

Základní snaha je popsat děje, které probíhají plynule. Grafem spojité funkce by měla být souvislá čára.



Takhle si kreslíme obecnou spojitou funkci.

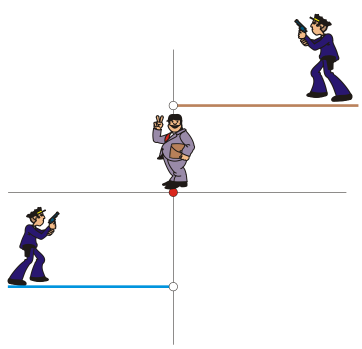
Chceme, aby se k dané přesnosti výsledku dalo dopracovat přiblížením ke zkoumanému bodu.



Napřed nastavíme přesnost (1) a pak najdeme malé okolí (2), kde se již přesnosti dosahuje.

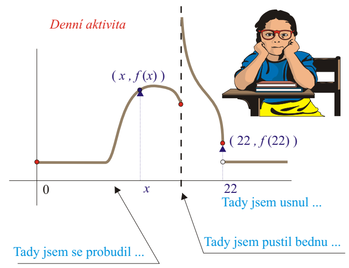
Tuto strategii uplatňujeme pro jednotlivé posloupnosti. Chápete jak? Po čase zjistíme, že to jde uplatňovat globálně na všechny body v okolí (2).

To, čemu má spojitost zabránit, je situace, kdy hodnota v daném bodě „uteče" svému okolí.



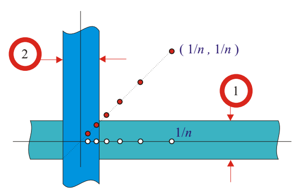
K funkční hodnotě (zločinci) se takhle nedostaneme.

Vidíme, že běžná funkce může mít body spojitosti i jiné body.



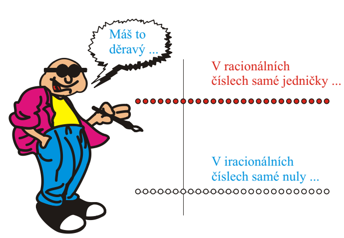
Jak se v životě snadno najde bod nespojitosti. Po puštění bedny jsi jiný člověk.

Spojitost lze zkoumat v jediném bodě.



Funkce spojitá v počátku. Nejprve si určíme toleranci (1), pak si najdeme okolí (2) bodu, v němž dosahujeme danou toleranci.

Funkce nemusí mít žádný bod spojitosti.



Dirichletova funkce není nikde spojitá. Libovolně blízko libovolného bodu jsou racionální i iracionální body a tedy hodnoty 0 a 1.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

POZOROVÁNÍ.

1. V definici spojitosti lze brát jen ryze monotónní posloupnosti, tj. f je spojitá v $a \in \mathcal{D}(f)$ jestliže pro každou rostoucí nebo klesající posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k a je $\lim f(x_n) = f(a)$. (Viz poznámku o výběru monotónních podposloupností.)

2. Funkce f je spojitá zprava (nebo zleva) v a, právě když pro každou klesající (resp. rostoucí) posloupnost $\{x_n\}$ s $\lim x_n = a$ je $\lim f(x_n) = f(a)$.

3. Funkce je v nějakém bodě spojitá právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

SPOJITOST POMOCÍ OKOLÍ

Následující tvrzení je velmi důležité. Ukazuje ekvivalenci definice spojitosti pomocí spočetných množin (posloupností) s definicí pomocí okolí, tj. pomocí nespočetných množin, t.j. množin zdánlivě jiného charakteru.

VĚTA. Funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ právě když pro každé okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$.

Důkaz. Důkaz bude veden sporem v obou směrech.

Jestliže f není spojitá v a pak existuje $x_n \to a, x_n \in \mathcal{D}(f)$ tak, že $f(x_n)$ nekonverguje k $f(a)$. Podle vlastnosti konvergence posloupnosti existuje okolí U bodu $f(a)$ tak, že pro nekonečně mnoho indexů n je $f(x_n) \notin U$. Ale každé okolí V bodu a obsahuje skoro všechna x_n a tedy existuje bod x_n z V tak, že $f(x_n) \notin U$.

Nechť nyní existuje okolí U bodu $f(a)$ takové, že pro každé okolí V bodu a existuje bod $x_V \in V, x_V \in \mathcal{D}(f)$ s vlastností $f(x_V) \notin U$. Za okolí V lze postupně volit např. intervaly $(a - 1/n, a + 1/n)$ a označit příslušné body x_V jako x_n. Je zřejmé, že $\lim x_n = a$ ale $\lim f(x_n) \neq f(a)$ protože všechny body $f(x_n)$ leží mimo okolí U bodu $f(a)$. $\diamond$

Jestliže se použijí jen symetrické intervaly okolo příslušného bodu (každé okolí obsahuje takový interval), dostane se následující, tzv. ε-δ charakterizace spojitosti.

DŮSLEDEK. Funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ jakmile $|x - a| < \delta, x \in \mathcal{D}(f)$.

To je jen tak pro dětičky.

Já v tom cítím, že se budou dokazovat nějaké nerovnosti s absolutními hodnotami. Cítím to v kostech.

Naštěstí se v praxi spojitost většinou zjišťuje velmi jednoduše pomocí různých vět a větiček.

A podle mých zkušeností se nespojitosti dosáhne jenom dělením nulou, nebo nešikovným odmocňováním.

Přímo z definice spojitosti plyne následující jednoduché ale důležité tvrzení (dokažte).

VĚTA. Je-li f spojitá v a a $f(a) > 0$, pak existuje okolí U bodu a tak, že pro všechna $x \in U \cap \mathcal{D}(f)$ je $f(x) > 0$.

To je OBROVSKÁ věta.

Vrána k vráně sedá, rovný rovného si hledá. Mezi blízkými známými kladného hrdiny najdete jenom samý klaďasy, to je fakt.

SPOJITOST A KONSTRUKCE FUNKCÍ

Nyní bude vidět, jak je výhodné dokazovat obecná tvrzení pro obecné funkce.

Následující tvrzení ukazují, že konstrukce nových funkcí zavedené v předchozí části, zachovávají spojitost.

Z těchto tvrzení ihned vyplyne spojitost mnoha funkcí bez dalšího dokazování.

VĚTA. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě a, jsou i funkce $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f + g$, $f \cdot g$ a v případě $g(a) \neq 0$ i funkce f/g spojité v bodě a.

Maximum, minimum, součet, součin a podíl spojitých funkcí jsou spojité funkce.

Jak jsem říkal, udělat nespojitost vyžaduje aktivní snahu a nečestné úmysly.

Mluvili jste o mně, nebo o mé sbírce nespojitých funkcí?

Důkaz. Postup důkazu je stejný pro všechny uvedené operace s funkcemi. Např. pro součin:

Je třeba ukázat, že pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ konvergující k a konverguje $\{(fg)(x_n)\}$ k $(fg)(a)$. Protože $\lim f(x_n) = f(a), \lim g(x_n) = g(a)$ (spojitost f, g v a), je podle věty o součinu limit posloupností $\lim f(x_n)g(x_n) = f(a)g(a)$, což podle definice součinu funkcí je to, co se mělo dokázat. $\diamond$

Tak jste to viděli. Sám jsem nevěřil, jak to je snadné.

To jsou ty moje přednosti. Dopředu jsem si všechno nachystala.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

POZOROVÁNÍ.

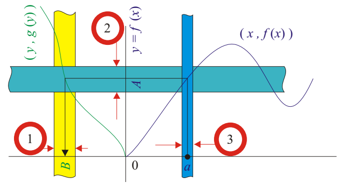
1. Je-li f spojitá v a, je i $k \cdot f$ spojitá v a pro každé reálné číslo k a tedy i funkce $-f$.
2. Jsou-li f, g spojité v a, jsou i funkce $f - g$ spojité v a.
3. Je-li f spojitá v a, jsou i funkce f_+, f_- spojité v a a tedy je i $|f|$ spojitá v a.

VĚTA. Je-li funkce g spojitá v bodě a a funkce f spojitá v bodě $g(a)$, je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě a.

Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.

Důkaz. Jestliže $\{x_n\}$ konverguje k a, je $\lim g(x_n) = g(a)$ (proč?) a tedy $\lim f(g(x_n)) = f(g(a))$ (proč?), což podle definice složené funkce značí spojitost $f \circ g$ v a. $\diamond$

Při skládání se spojitost neporuší.

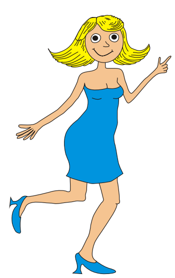


Složení spojitých funkcí je spojité.

VĚTA. Je-li funkce g spojitá a prostá na intervalu J, je její inverzní funkce spojitá.

Důkaz tohoto tvrzení je odložen do části o spojitých monotónních funkcích, protože tam se dokáže ještě o něco více.

DŮSLEDEK. 1. Funkce n-tá odmocnina $\sqrt[n]{x}$ je spojitá funkce.
2. Logaritmus $\log_a x$ je spojitá funkce.
3. Cyklometrické funkce jsou spojité.



Ano, my jsme se dostali až sem !!!

POZOR !!! Tento dárek dostanete právě zde !!! Tato příležitost se nebude opakovat !!! Dokazovat totiž spojitost takových funkcí ručičkama je za trest . . .

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

POZOROVÁNÍ.

1. Je-li f spojitá v a, je i $|f|$ spojitá v a.

2. Posunutím grafu spojité funkce dostaneme graf spojité funkce.

Je to všechno průzračně jednoduché.

KLASIFIKACE NESPOJITOSTI

Před dalším zkoumáním spojitých funkcí je vhodné si uvědomit, co znamená, že funkce není spojitá v nějakém bodě.

Zavádí se klasifikace bodů nespojitosti.

Každý takový vykuk dostane nálepku. Já mám taky jednu.

DEFINICE. Nechť a je bod definičního oboru funkce f. Potom

1. f má v a odstranitelnou nespojitost, jestliže existují a rovnají se $\lim f(x_n) = b$ pro všechny posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k a, přičemž $b \neq f(a)$.

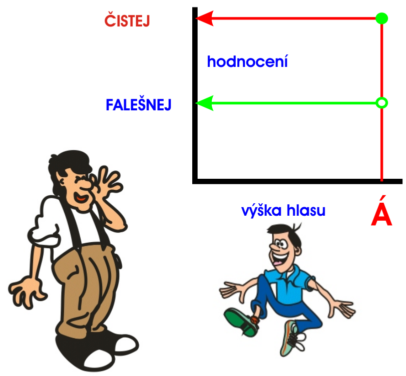
2. f má v a skok, jestliže existují a rovnají se $\lim f(x_n) = b$ (nebo $\lim f(x_n) = c$) pro všechny rostoucí (resp. klesající) posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k a, přičemž $b \neq c$.

3. f má v a oscilaci, jestliže neexistuje $\lim f(x_n)$ pro nějakou rostoucí nebo klesající posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k a.

Bod a se potom nazývá po řadě bodem odstranitelné nespojitosti, bodem skoku, bodem oscilace.

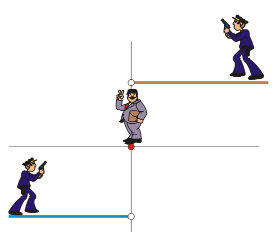
Odstranitelná nespojitost a skok jsou trivialitky, miluji body oscilace.

Příklad odstranitelné nespojitosti najdeme u člověka s absolutním sluchem, pro kterého všechny nečisté tóny jsou FALEŠNÉ.



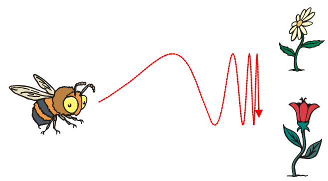
Odstranitelná nespojitost . . .

Skok najdeme u funkce signum.



Skok je v počátku. Jak funkci dodefinovat je otázka . . .

Oscilaci najdeme u váhající včelky. Letí k jedné kytce, protože se jí líbí. Když přiletí blíže, nesedne jí její vůně a tak změní směr ke druhé kytce. Ta jí zblízka také nevoní, tak se obrátí . . .



Oscilace je problémový bod, dodefinování je oříšek . . .

BTW, u čmeláka se takové chování nepodařilo zdokumentovat . . .

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

SPOJITÉ FUNKCE NA INTERVALU

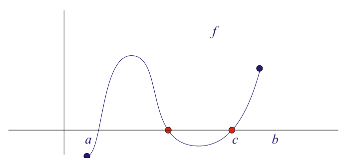
V této části je ukázáno, že spojité funkce do jisté míry zachovávají některé vlastnosti intervalů, např. souvislost nebo současně uzavřenost a omezenost.

Obě vlastnosti jsou podstatné pro řešení mnoha úloh.

Následující dvě tvrzení pocházejí od Bolzana a bude na ně odkazováno jako na Bolzanovu větu.

LEMMA. Je-li f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a $f(a), f(b)$ mají opačná znaménka, pak existuje $c \in (a, b)$ s hodnotou $f(c) = 0$.

Důkaz. Nechť např. $f(a) < 0$. Položme $c = \sup\{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$. Vzhledem ke spojitosti a k hodnotám f v krajních bodech je $c \in (a, b)$. Je zřejmé, že $f(c) = 0$ (proč?, co by nastalo, kdyby $f(c) < 0$ nebo $f(c) > 0$? – použijte větu o supremech). $\diamond$



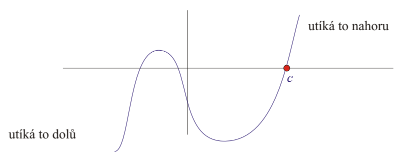
V c je nulový bod funkce f.

Pokud teď opravdu všemu rozumíte, tedy ta věta vám připadá jako pochoutka, tak si můžete nějakou pochoutku dopřát.

Nesu ti vitamímy.

Pro jistotu budu pokračovat ve výkladu pomalu, jedna nikdy neví ...

DŮSLEDEK. Každý polynom lichého stupně má reálný kořen.



Tedy rovnice $x = 0$ má kořen, kdo by to řekl ...

Následující tvrzení je vlastně jednoduchým důsledkem lemmatu, ale vzhledem k důležitosti je zformulováno jako věta.

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.

Důkaz. Nechť f je spojitá na intervalu I. Je třeba ukázat, že jakmile $u < w < v, u, v \in f(I)$, pak $w \in f(I)$.

Tedy existují $a, b \in I$ tak, že $f(a) = u, f(b) = v$. Buď J uzavřený interval v I s koncovými body a, b. Pak funkce $F = f - w$ splňuje na I podmínky lemmatu a tedy existuje $c \in I$ tak, že $F(c) = 0$, tedy $f(c) = w$. $\diamond$

Použili jsme vlastnost intervalu: mezi dvěma body nic nechybí.

Dalším z důsledků je existence odmocnin (uvědomte si, že odmocnina je inverzní funkce k mocnině a její definiční obor je tedy obor hodnot příslušné mocniny).

DŮSLEDEK. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, existuje n-tá odmocnina z každého reálného čísla, je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, existuje n-tá odmocnina z každého nezáporného reálného čísla.

Všimli jste si, jak je to všechno průzračné?

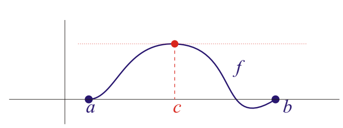
Když se ví, odkud se na co koukat . . .

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Následující věta má také název: Weierstrassova věta.

VĚTA. Spojitá funkce nabývá na uzavřeném omezeném intervalu J své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body $c, d \in J$ takové, že

$$f(c) = \sup_{x \in J} f(x), \quad f(d) = \inf_{x \in J} f(x).$$



Konečně něco opravdu užitečného! Budeme mít zase co hledat.

Důkaz. Buď $A = \sup_{x \in J} f(x)$. Podle <u>věty o supremech</u> reálných čísel existuje posloupnost $\{f(x_n)\}$ pro $x_n \in J$ konvergující k A.

Podle <u>Bolzano–Weierstrassovy věty</u> (protože J je omezená množina) existuje konvergentní podposloupnost $\{x_{k_n}\}$, konvergující k nějakému bodu c.

Protože J je uzavřený interval, je $c \in J$. Protože f je spojitá, je $\lim f(x_{k_n}) = f(c)$ a tedy $f(c) = A$.

Podobně pro bod d. $\diamond$

Techniku tohoto důkazu je nezbytně nutné pochopit.

DŮSLEDEK. Spojitá funkce zobrazuje uzavřený omezený interval na bod nebo na uzavřený omezený interval.

Toto tvrzení je velmi důležité a užitečné. Mimojiné pak funkce nabývá maxima.

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

Spojitost a monotónie

Spojité monotónní funkce jsou velmi důležité. Z následujících výsledků je vidět, že tyto funkce mají další výhodné vlastnosti.

Budeme hlavně potřebovat inverzní funkce. Hledáme podmínky, kdy to půjde. Ukáže se, že prostá spojitá funkce má spojitou inverzní funkci.

Ryze monotónní funkce jsou prosté. Pro spojité funkce platí i opak:

VĚTA. Spojitá a prostá funkce na intervalu je ryze monotónní a její inverzní funkce je spojitá.

Důkaz. Nechť f je spojitá a prostá na intervalu I a z je vnitřní bod I, který rozděluje I na intervaly $I_- = I \cap (-\infty, z], I_+ = I \cap [z, \infty)$. Protože f je prostá a spojitá, jsou obrazy obou menších intervalů zase intervaly (díky spojitosti) dotýkající se v bodě $f(z)$ (díky prostotě). Nechť obraz I_- má pravý krajní bod $f(z)$ (a tedy obraz I_+ má levý krajní bod $f(z)$).

Pro body $u < v$ z I buď oba náleží jednomu z intervalů I_-, I_+ nebo každý jinému (pak $u \in I_-, v \in I_+$ a zřejmě $f(u) < f(v)$). Pokud $u, v \in I_-$, je obraz intervalu $[u, v)$ disjunktní s obrazem intervalu $[v, z]$ a oba obrazy leží v I_-. Obraz intervalu má pravý krajní bod $f(z)$ a tedy body obrazu $[u, v)$ musí být menší než $f(v)$. Tedy opět $f(u) < f(v)$ a totéž se stejně dokáže pro zbývající případ I_+.

Tím jsme dokázali monotonii. Inverzní funkci máme díky prostotě f. Její spojitost plyne z následující úvahy. Zvolme rostoucí posloupnost bodů z_n konvergující k z. Pak $f(z_n)$ konverguje monotonně k $f(z)$ díky spojitosti f. Nyní použijeme ε - δ definici jednostranné spojitosti inverzní funkce k f. Podobně z druhé strany. $\diamond$

Promyslete si důkaz, jeho idea je jednoduchá.

Existují funkce nespojité, které zobrazují intervaly na intervaly. Pro monotónní funkce tato situace nemůže nastat:

VĚTA. Monotónní funkce f na intervalu J, která zobrazuje intervaly v J na bod nebo intervaly, je spojitá.

Důkaz. Nechť f je např. neklesající funkce na J, zobrazující intervaly v J na intervaly nebo bod a $\{x_n\}$ je rostoucí posloupnost v J konvergující k $a \in J$. Kdyby $\lim f(x_n) < f(a)$, tak obraz intervalu $[x_1, a]$ není interval (neobsahuje body mezi $\lim f(x_n), f(a)$). Podobně pro spojitost zprava. $\diamond$

Je to zcela jasné z obrázku.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

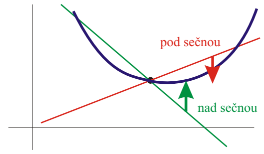
Spojitost, konvexita a periodické funkce

Ukážeme, jak jsou konvexita a konkávita silné vlastnosti. V podstatě implikují spojitost.

VĚTA. Konvexní nebo konkávní funkce na otevřeném intervalu je spojitá.

Důkaz. Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu I, $x \in I$ a $\{x_n\}$ je rostoucí posloupnost v I konvergující k x. Posloupnost směrnic $s_n = (f(x) - f(x_n))/(x - x_n)$ je neklesající a shora omezená směrnicí přímky mezi body $(x, f(x)), (u, f(u))$ pro libovolný bod $u \in I$ větší než x (otevřenost I). Pak $\lim(f(x) - f(x_n)) = \lim s_n(x - x_n) = 0$, protože s_n je omezená a $x - x_n \to 0$. Podobně se ukáže spojitost zprava. $\diamond$

Důkaz jde udělat i obrázkem:



Vpravo od bodu je graf funkce omezen sečnami, tedy podle věty o policajtech má funkce v bodě limitu.

Bylo zmíněno, že Dirichletova funkce má za periody všechna kladná racionální čísla. Taková situace nemůže nastat u spojitých periodických funkcí (kromě konstantní funkce).

VĚTA. Spojitá nekonstantní periodická funkce má nejmenší periodu.

Důkaz. Nechť f je periodická funkce, která nemá nejmenší periodu. Buď p infimum všech period funkce f. Pak existuje klesající posloupnost period p_n konvergující k p. Zřejmě je $f(x+p) = \lim f(x+p_n) = \lim f(x) = f(x)$ (první rovnost ze spojitosti, druhá z periodicity). Podle předpokladu ale p není perioda, takže musí být $p = 0$.

Jestliže $p = 0$, pak pro libovolná $x \neq y$ existuje posloupnost $\{k_n\}$ celých čísel tak, že $\lim(x + k_n p_n) = y$ (neboť každý interval $(y - p_n, y + p_n)$ obsahuje nějaký součet $x + k_n p_n$). Potom $f(x) = f(x + k_n p_n) \to f(y)$ ze spojitosti, a tedy $f(x) = f(y)$. Tedy f je konstantní. $\diamond$

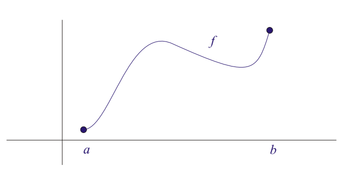
Jde v podstatě o samozřejmost.

Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8 8 8

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Lze si představit, že graf spojité funkce na intervalu je spojitá (v normálním smyslu, tj. nepřerušená) čára.



Spojitost funkce je definována jen pro body z definičního oboru.

V bodě a, který nepatří do definičního oboru funkce f, nemá spojitost f smysl.

Spojitost vlastně znamená záměnu funkce a limity:

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$$

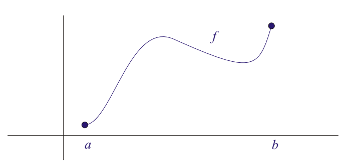
pro posloupnosti ležící i s limitou v definičním oboru funkce f.

Změnit pořadí při oblékání nelze!

Spojitost zprava funkce f v bodě a je spojitost zúžení funkce na množinu $\mathcal{D}(f) \cap [a, \infty)$ v bodě a. Podobně spojitost zleva.

Z tohoto důvodu není třeba dokazovat a formulovat zvlášť tvrzení a definice pro spojitosti jednostranné.

Je-li definičním oborem funkce f interval a a je vnitřním bodem tohoto intervalu, může se rozlišovat oboustranná spojitost f v a od jednostranné, v krajních bodech intervalu má smysl jen jednostranná spojitost.



V levém krajním bodě je spojitost totéž, co spojitost zprava, v pravém krajním bodě co spojitost zleva.

Je-li a izolovaný bod v $\mathcal{D}(f)$, je f v tomto bodě spojitá (proč?) a tedy každá posloupnost je spojitá funkce.

V těchto bodech nemá pojem spojitosti praktický význam a v mnoha učebnicích se spojitost definuje jen pro hromadné body definičních oborů.

V případě zkoumání funkcí definovaných na intervalech nebo jejich sjednocení se tyto izolované body nevyskytují.

Je vhodné si uvědomit, že definice spojitosti je vázána na reálná čísla jen prostřednictvím konvergence posloupností.

Je-li funkce definována mezi množinami, kde je definována konvergence posloupností (např. mezi Euklidovskými nebo normovanými prostory) lze hovořit o její spojitosti.

To už neplatí pro jednostranné spojitosti, kde se používá uspořádání na $\mathbb{R}$. Proto u funkcí více proměnných nemá jednostranná spojitost smysl.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Z důkazu je vidět, že jestliže pro nějakou (např. binární) operaci $*$ na oboru hodnot (např. na $\mathbb{R}$) funkcí f, g platí

$$(\lim x_n) * (\lim y_n) = \lim(x_n * y_n)$$

pro libovolné posloupnosti, pak funkce $f * g$ s hodnotami $f(x) * g(x)$ v bodech x, je spojitá.

To je hezké.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Důkaz ukazuje mnohem obecnější tvrzení.

Funkce $f \circ g$ je spojitá, jakmile f, g jsou spojité (a $f \circ g$ má smysl), nehledě na definiční obory a obory hodnot (nemusí být v $\mathbb{R}$).

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Často se definuje spojitost funkce pomocí jiných nástrojů než pomocí konvergence posloupnosti, např. pomocí okolí. Přesto se nespojitost funkce f v nějakém bodě a většinou ukazuje tak, že se najde posloupnost konvergující k a s f-hodnotami nekonvergujícími k $f(a)$.

Pokud má funkce f v bodě a skok nebo oscilaci, ať se předefinuje hodnota $f(a)$ jakkoli, nebude f v a spojitá.

Nicméně u skoku lze vždy předefinovat $f(a)$ tak, že f je v a zleva spojitá a tak, že je zprava spojitá.

U oscilace toto může jít nejvýše u jedné jednostranné spojitosti, často to nejde ani zleva ani zprava.

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Uvedený důkaz Bolzanovy věty používá uspořádání na definičním oboru a nelze ho tedy přímo použít na důkaz obdobné věty pro zobrazení mezi Euklidovskými prostory.

Existují jiné postupy v důkaze, které platí i v mnoha obecnějších prostorech (spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina). Jednou z možností je následující postup pomocí středů úseček.

Jestliže se najdou dva body x_1, x_2 s hodnotami funkce f opačných znamének, zvolí se za x_3 střed úsečky s koncovými body x_1, x_2.

Buď je x_3 řešením nebo má jedna dvojice hodnot v x_1, x_3 nebo v x_3, x_2 různá znaménka a postup se opakuje.

Získaná posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k řešení dané rovnice.

Místo středů úseček lze brát průsečíky úsečky $f(x_i), f(x_j)$ s osou x (obecně s přímkou určenou body x_1, x_2).

Je nutné si uvědomit, že tvrzení neříká nic o tom, jestli spojitá zobrazení zachovávají i tvar intervalu (otevřený, ...). O tom vypovídají až následující tvrzení.

Předchozí lemma a věta pochází od B.Bolzana a používá se nejen při hledání kořenů polynomů ale i při řešení jiných rovnic tvaru $f(x) = a$ pro spojité funkce f.

Konec poznámek 5.

Poznámky 6:

Význam tvrzení spočívá ve znalosti existence řešení různých úloh na maxima nebo minima.

Existenční věta. Řešení se musí najít jinak.

Mnoho geometrických nebo fyzikálních úloh je tohoto typu (např. hledání plochou největšího obdélníku vepsaného do kruhu apod., nebo hledání nejrychlejší cesty různými prostředími apod.).

Kde je nejvíce sluníčka k opalování je tedy stále nejasné.

Bývá vhodné si uvědomit situaci v mezních (krajních) případech, aby funkce, u níž extrém hledáme, byla úlohou definována na uzavřeném omezeném intervalu. Je-li f spojitá, je jistota existence řešení.

Tvrzení (nazývané též Weierstrassova věta) neplatí na ostatních typech intervalů.

Omezené uzavřené intervaly na reálné přímce jsou tedy velmi důležité pro aplikace. Mnohdy se pro ně používá termín kompaktní intervaly.

K důkazu tvrzení byla potřeba Bolzano–Weierstrassova věta o existenci konvergentní podposloupnosti. Jakmile tedy máme množinu A (např. v Euklidovském prostoru) kde z každé posloupnosti lze vybrat podposloupnost konvergentní v A, nabývá každá reálná funkce na A svého maxima a minima. Takové množiny v $\mathbb{R}$ (ale i v dalších Euklidovských prostorech) jsou právě kompaktní množiny, tj. omezené a uzavřené množiny.

Tady se vždycky trochu bojím ;-)

Konec poznámek 6.

Poznámky 7:

Důkaz hlavního tvrzení této části (spojitá prostá funkce na intervalu má spojitou inverzi) je proveden pomocí uspořádání na $\mathbb{R}$ a zdá se, že ho není možné provést např. v rovině.

Existují však jiné postupy, které dovolí dokázat tvrzení nejen pro funkce více proměnných, ale i pro funkci jedné proměnné definované na obecnější množině, než je interval.

Pak ovšem není možné dokázat onu silnou vlastnost prosté spojité funkce na intervalu, totiž že je ryze monotónní.

Dá se to očekávat, protože pro funkce více proměnných pojem monotónnosti ztrácí smysl.

V *Otázkách* je naznačen možný postup jiného důkazu. Pomocí *Příkladů* lze pak vyjasnit, co je pro ono hlavní tvrzení podstatné.

Víte, že spojitý obraz kompaktního intervalu je kompaktní interval nebo bod a že obecně spojitý obraz otevřeného (nebo uzavřeného) intervalu nemusí být otevřený (nebo uzavřený). Aby spojitá funkce zachovávala i otevřené intervaly, musí být ryze monotónní – viz *Otázky*.

To jsem všímavá, není-liž tomu tak? Já jsem prostě šikulka :-)

Konec poznámek 7.

Poznámky 8:

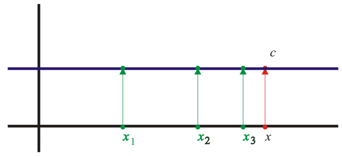
Jeden milý úsměv za snahu :-)

Konec poznámek 8.

PŘÍKLADY

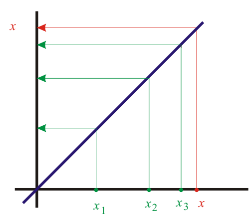
Příklady 1:

Konstantní funkce je vždy spojitá.



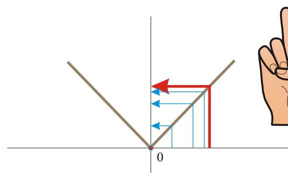
Když se posloupnost blíží k bodu x, tak funkční hodnoty tvoří konstantní posloupnost.

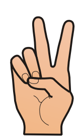
Identická funkce je spojitá.



Když se posloupnost blíží k bodu x, tak se funkční hodnoty blíží k bodu x.

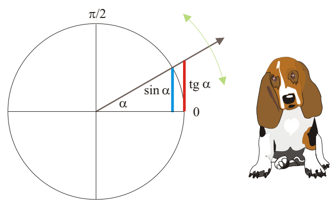
Funkce absolutní hodnota je spojitá.





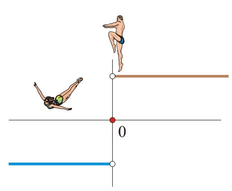
Odvodíme to podobně jako u identity.

Funkce sinus je spojitá.



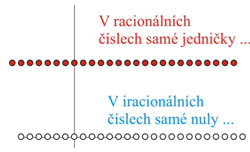
Toto tvrzení nelze dokázat z definice funkce sinus pomocí délek úseček. Později bude tato funkce zavedena jiným způsobem a spojitost bude dokázána.

Funkce signum je spojitá v každém bodě kromě 0.



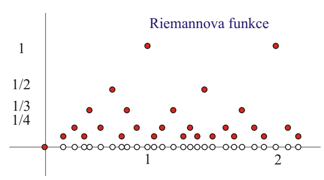
K nule konvergují posloupnosti (například $1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, \ldots$), jejichž funční hodnoty nekonvergují.

Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě.



V posloupnosti můžeme střídat racionální a iracionální body.

Riemannova funkce je spojitá právě v iracionálních bodech a v bodě 0.



V libovolném intervalu okolo daného body najdeme pouze konečně mnoho bodů, v nichž je hodnota vyšší než 1/1000. Když posloupnost překoná těchto konečně mnoho protivů, budou již hodnoty blíže nule než 1/1000,

Poznámka: Rozšíříme definici mocniny a^x na reálná $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$ pomocí suprema hodnot b^y pro racionální b a y menší než x. Podobně pomocí infima pro $a \in (0, 1)$.

Obecná exponenciální funkce je spojitá.

Nechť existuje $z_k \to x$ v $\mathbb{R}$ tak, že $|a^{z_k} - a^x| > \varepsilon$ pro všechna k a nějaké ε. Pro každé k se vezme racionální číslo u_k, které je k z_k blíže než $1/k$, přičemž $|a^{z_k} - a^{u_k}| < \varepsilon/2$ (podle definice obecné mocniny). Pak $\{u_k\}$ je posloupnost racionálních čísel konvergující k x, takže $a^{u_k} \to a^x$, což snadno vede ke sporu.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

Polynomy jsou spojité funkce.

Jde o součet a součin identity a konstant. Použijeme indukci?

Racionální funkce jsou spojité funkce.

Jde o podíl polynomů.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

Funkce $\sin(x^3 - 2) - 1/\cos x^{-2}$ je spojitá.

Dosazováním funkcí $\sin x$ a $\cos x$ za x do již spojitých funkcí dostaneme podle vět spojitou funkci.

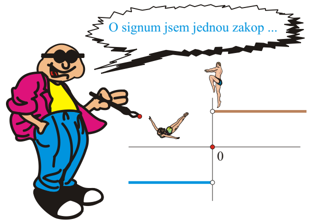
Je jasné, které věty používáme?

Lepší vysvětlení vzniku této funkce je dosazení $\sin x$ za x a $\cos x$ za y do racionální funkce dvou proměnných $R(x, y)$.)

Konec příkladů 3.

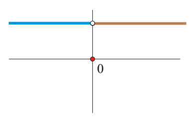
Příklady 4:

Funkce signum má v 0 skok.



Jednostranné limity existují, ale nerovnají se.

Funkce $|\operatorname{sign} x|$ má v 0 odstranitelnou singularitu.

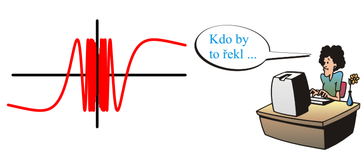


Jednostranné limity existují, ale nerovnají se funkční hodnotě.

Funkce

$$\begin{cases} f(x) = & \sin(1/x), x \neq 0; \\ & 0, x = 0. \end{cases}$$

má v 0 oscilaci, i když se hodnota v 0 definuje jiným číslem než nulou.

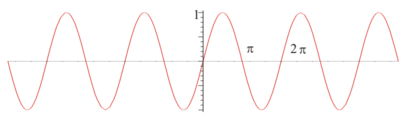


Oscilace se v praxi opravdu vyskytuje. Než si koupíte auto, váháte ...

Konec příkladů 4.

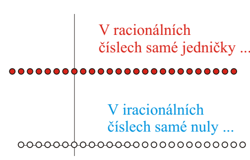
Příklady 5:

Oborem hodnot funkce sinus je uzavřený interval $[-1, 1]$. Její obraz otevřeného intervalu $(0, 3)$ je uzavřený interval $[-1, 1]$.



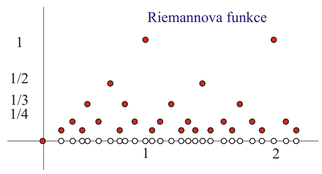
Jde o ty krajní body a nabývání ± 1.

Dirichletova funkce není spojitá a její obraz libovolného intervalu jsou dva body 0,1.



V intervalu vždy najdeme racionální a iracionální body.

Obraz libovolného intervalu Riemannovou funkcí je skoro celá posloupnost $\{1/n\}$ s její limitou 0.



Od určitého jmenovatele se v každém intervalu najdou příslušná racionální čísla.

Teď něco pro domácí kutily a kutilky:

*Existuje funkce definovaná na $\mathbb{R}$, jejíž obraz libovolného intervalu je celé $\mathbb{R}$. Sestrojte nějakou takovou.

Neporadím, neporadím, neporadím. Musíte přemýšlet sami.

Ani to není obtížné. Já vždycky najdu nespojitou v každém bodě, jak vy?

Konec příkladů 5.

Příklady 6:

Funkce x^2 dosahuje na otevřeném intervalu $(-1, 1)$ svého minima (kde?), ale na intervalu $(0, 1)$ nemá ani maximum ani minimum svých hodnot.

Dirichletova a Riemannova funkce dosahují na každém intervalu svého maxima i minima. Totéž pro funkci signum.

Konec příkladů 6.

Příklady 7:

Jestliže se ve větě o existenci inverzní spojité funkci vynechá předpoklad, že původní funkce je definována na intervalu, není možné chtít v tvrzení, aby funkce byla monotónní (proč?).

Je ale možné uvažovat o platnosti tvrzení: *Inverzní funkce k prosté spojité funkci je spojitá.*

1. Následující funkce f je spojitá a prostá na svém definičním oboru a je rostoucí na každém intervalu z definičního oboru. Její inverzní funkce je spojitá.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 0); \\ x - 2, & x \in (0, 1); \\ x, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

2. Následující příklad ukazuje, že spojitá prostá funkce definovaná na sjednocení intervalů (dokonce mající interval za obor hodnot) nemusí mít inverzní funkci spojitou.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & x \leq -1; \\ -2x, & x \in [-1/2, 1/2]; \\ \frac{1}{x} + 1, & \geq 1. \end{cases}$$

Tato funkce je prostá a spojitá (je klesající na každém intervalu z definičního oboru) a zobrazuje svůj definiční obor na $[-2, 2]$. Inverzní funkce není spojitá (proč? – použijte Bolzanovu větu, nebo přímo najděte bod nespojitosti inverzní funkce).

Teď jenom trošičku nespěte, dík :-)

***3.** Upravte předchozí funkci tak, aby byla definována na omezené množině a měla jinak stejné vlastnosti.

***4.** Další prostá spojitá funkce, která nemá spojitou inverzní funkci, má za definiční obor $\mathbb{N}$ a je to tedy posloupnost.

Její konstrukce je snadná, zkuste to hned teď, než se podíváte na návod.

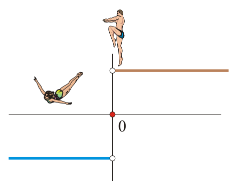
Nechť f je prosté zobrazení $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Pak inverzní zobrazení není spojité v žádném bodě svého definičního oboru, tj. $\mathbb{Q}$.

Tak to mám ráda, za málo peněz hodně muziky :-)

Konec příkladů 7.

Příklady 8:

Funkce signum je konvexní na $(-\infty, 0]$. Je konvexní nebo konkávní na $[0, \infty)$? A co na $[-1, 1]$?



Konec příkladů 8.

OTÁZKY

Otázky 1:

Nechť $A \subsetneqq \mathcal{D}(f()$. Je rozdíl mezi spojitostí funkce f na množině A a spojitostí zúžení funkce f na množinu A? Co když A je interval (uzavřený, otevřený)?

Samé jednoduchosti.

Nechť interval $J = \bigcup_n I_n$, kde $\{I_n\}$ je posloupnost zvětšujících se intervalů (takže J je také interval). Dokažte, že funkce f je spojitá na J právě když je spojitá na každém I_n.

Když se dvě sovy při letu vidí neustále vedle sebe, tak opravdu letí vedle sebe. To jde dokázat:

*Ukažte: *Jsou-li dvě funkce g, h spojité na intervalu J a mají stejné hodnoty na racionálních číslech z J, pak se na J rovnají.*

[Návod: Iracionální číslo x je limitou posloupnosti racionálních čísel x_n. Protože $g(x_n) = h(x_n)$, musí být i $g(x) = h(x)$.]

Z důkazu je vidět, že místo racionálních čísel v tvrzení lze brát např. iracionální čísla, nebo jiná, jejichž limitami jsou všechna reálná čísla.

Použitím tohoto tvrzení lze snadněji dokázat některá tvrzení pro obecnou mocninu:

Protože funkce $g(x) = a^{-x}, h(x) = \frac{1}{a^x}$ se rovnají v racionálních číslech a jsou spojité, rovnají se i ve všech reálných číslech.

Podobně pro další vlastnosti mocnin, např. $g_1(x) = (a^y)^x, h_1(x) = a^{xy}$, kde y je racionální, a potom pro $g_2(y) = (a^y)^x, h_2(y) = a^{xy}$, kde x je reálné – dohromady se pak dostane vztah $(a^y)^x = a^{xy}$ pro libovolná reálná x, y.

Oni totiž sovy mrkaji velice často, ale velice krátce ;-)

Teď nás čeká ještě jedna dobrota :-)

*Ukažte, že funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ je spojitá právě když f-vzor uzavřeného intervalu je uzavřená množina, tj., $f^{-1}(A)$ je uzavřená, jakmile A je uzavřený interval (nebo obecněji: uzavřená množina).

[Návod: Pokud f není spojitá, existuje $\{x_n\}$ s limitou a tak, že nějaká podposloupnost $\{f(x_{k_n})\}$ konverguje k $b \neq f(a)$. Množina A skládající se z členů této podposloupnosti a z b, pokud je b vlastní, je uzavřená, ale její vzor nebude uzavřený. Vyžaduje-li se za A interval, je nutné vzít v obrazech podposloupnost monotónní, A pak bude obsahovat tuto podposloupnost (a případně její limitu). Druhá implikace je jednoduchá.]

Tohle je prostě dobrá bašta pro všechny :-)

Konec otázek 1.

Otázky 2:

Uveďte příklad nespojité funkce f takové, že f_+ je spojitá funkce (může být i f_- spojitá?).

Uveďte příklad nespojité funkce f takové, že $f \cdot f$ je spojitá.

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Najděte nespojité funkce f, g na $\mathbb{R}$, jejichž složení $f \circ g$ je spojité.

Ukažte pomocí skládání funkcí, že $|f|$ je spojitá, jakmile f je spojitá. Zjistěte, v kterých bodech je spojitá funkce $1/\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}$.

Konec otázek 3.

Otázky 4:

Dodefinujte funkci tangens v bodě $\pi/2$ a určete, jakou nespojitost tato funkce v tomto bodě má.

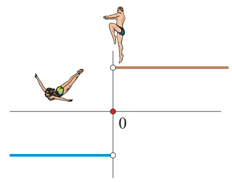
Ukažte, že f má v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ skok nebo oscilaci právě když existuje $x_n \to a$ taková, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ nemá limitu.

POZOROVÁNÍ.

1. Bod nespojitosti monotónní funkce je bodem skoku.
2. Monotónní funkce na intervalu má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

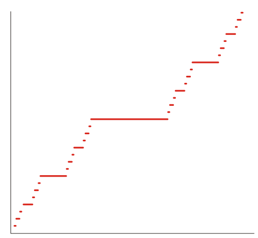
U monotónní funkce může být hodně bodů skoku. Nejvýše je jich spočetně.

Monotónní funkce může mít v bodech nespojitosti jen skoky, typická je funkce signum, která je neklesající.



Jeden skok.

Existuje funkce s nekonečně mnoha skoky.



Konstantní v prostřední třetině, jako naši hokejisti ...

Má oblíbená funkce ...

Konec otázek 4.

Otázky 5:

Ukažte na příkladech, že spojitý obraz otevřeného intervalu (např. $\mathbb{R}$) může být interval jakéhokoli druhu (tj. otevřený, uzavřený nebo polootevřený).

Ukažte, že obor hodnot obecné exponenciální funkce a^x je pro $a \neq 1$ interval $(0, +\infty)$. Uvědomte si, že tato funkce nabývá libovolně velkých hodnot i libovolně malých kladných hodnot.

Odtud vyplývá, že logaritmická funkce má za definiční obor interval $(0, +\infty)$.

Zjistěte, zda má polynom $8x^3 - 16x^2 + 4x + 1$ kořen v intervalu $(0, 1)$.

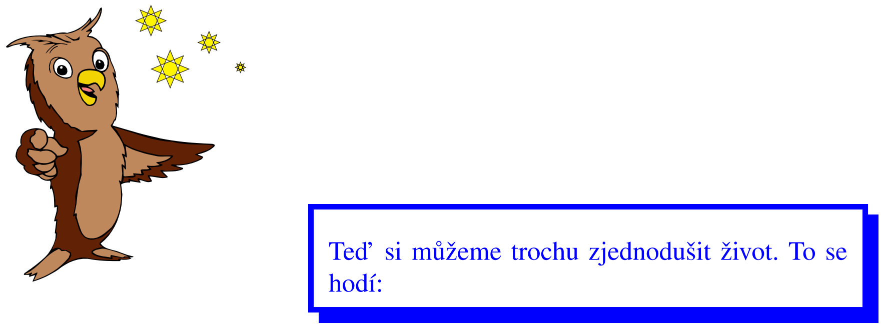
Konec otázek 5.

Otázky 6:

Sestrojte funkci na intervalu $[0, 1]$, která nemá na tomto intervalu největší ani nejmenší hodnotu.

Konec otázek 6.

Otázky 7:



***Spojitost inverzní funkce.**

V *Příkladech* uvedené spojité prosté funkce, které nemají spojitou inverzní funkci, byly definovány na neomezených uzavřených množinách, nebo na omezených neuzavřených množinách.
Přesto toto tvrzení platí pro funkce definované na intervalech a na obecnějších množinách než na intervalech.

Nejdříve je vhodné najít důkaz tvrzení, který nezávisí na intervalech:

Inverzní funkce k prosté spojité funkci f definované na intervalu J, je spojitá.

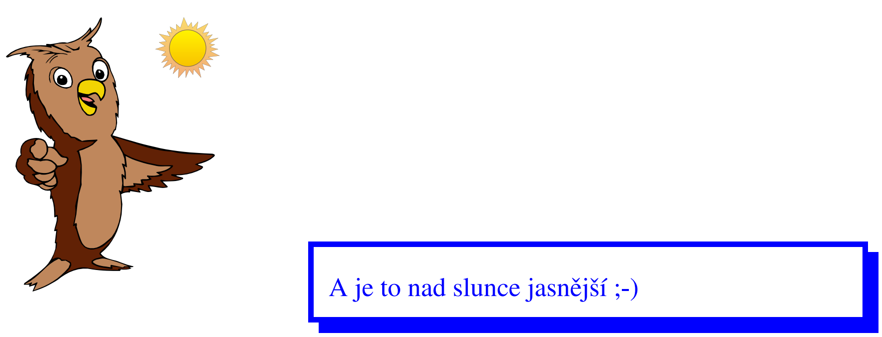
[Návod: Má se dokázat, že pokud $f(a_n) \to f(a)$ (pro $a, a_n \in J$), pak $a_n \to a$. Pokud existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}$ konvergující k nějakému $b \in J$, musí být $b = a$. Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená.]

Dokažte pomocí předešlého návodu tvrzení

Inverzní funkce k prosté spojité funkci definované na omezené uzavřené (tj. kompaktní) množině, je spojitá.

***Monotónie versus modifikovaná Bolzanova věta.**

Ukažte, že spojitá funkce na intervalu J je ryze monotónní právě když zobrazuje otevřené intervaly v J na otevřené intervaly.



Konec otázek 7.

Otázky 8:

Ukažte, že každé konkávní funkci na uzavřeném omezeném intervalu lze změnit hodnoty v krajních bodech intervalu tak, že zůstane konkávní, ale nebude tam spojitá.

Limonádka.

Konec otázek 8.

CVIČENÍ

Cvičení 1:
Konec cvičení 1.

Cvičení 2:
Konec cvičení 2.

Cvičení 3:
Konec cvičení 3.

Cvičení 4:
Konec cvičení 4.

Cvičení 5:
Konec cvičení 5.

Cvičení 6:
Konec cvičení 6.

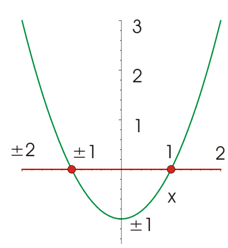
Cvičení 7:
Konec cvičení 7.

Cvičení 8:

SPOJITOST FUNKCÍ - MIX

Příklad. Sestrojte funkci, která má právě dva body spojitosti.

Řešení. Vynásobíme Dirichletovu funkci $D(x)$ funkcí $x^2 - 1$ a jsme hotovi.



1 z 10. HOROR.

Příklad. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

1. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon' > 0\, \exists \delta' > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < 7\varepsilon'$
3. $\forall \varepsilon'' > 0\, \exists \delta'' > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a| < \delta'' \implies |f(x) - A| \leq \varepsilon''$

Řešení. Platí-li (1), dokážeme (2). Nechť je ε' dáno, položíme $\varepsilon = 7\varepsilon'$, použijeme (1) a najdeme δ. Položíme $\delta' = \delta$. Pak (2) platí. Podobně (2) dá (3) pomocí vztahů $\varepsilon = \varepsilon''/2$ a $\delta'' = \delta$. Zbytek se udělá podobně.

Tomu říkám „trik se sedmi epsilonama".

Chytrý člověk používá v každém výroku jinak indexovaná písmenka, zde ε, ε', ε'' a pod.

Udělalo 5 z 10.

Příklad. Zkoumejte, co znamenají následující vztahy

1. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists K > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \, : \, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall K > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \, : \, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < K\varepsilon$
3. $\exists \delta > 0 \, \forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \, : \, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$

Řešení. První podmínka znamená omezenost na jistém okolí.
Druhá podmínka znamená konstantnost na jistém okolí.
Třetí podmínka znamená konstantnost na jistém okolí.

1 z 10.

Příklad. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

1. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \, : \, |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists \delta' > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \, : \, |x - a| < \delta' \implies |f(x) - A| < \frac{1}{n}$

Řešení. Platí-li (1), tak k danému n položíme $\varepsilon = 1/n$ a $\delta = \delta'$. Pak platí (2). Platí-li (2), tak k danému ε najdeme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $1/n < \varepsilon$. Podle (2) pak najdeme δ' a položíme $\delta = \delta'$.

Jednoduchosti mi dělají radost.

5 z 10 :-)

Příklad. Zkoumejte funkci

$$x \mapsto \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi\, m!\, x)$$

Řešení. V racionálních bodech x se dolimitíme k 1.

V iracionálních bodech x se dolimitíme k 0.

Jde o jiný zápis Dirichletovy funkce.

2 z 10.

Příklad. Porovnejte počet kvantifikátorů v definici spojitosti pomocí $\varepsilon - \delta$ definice a v definici přes posloupnosti.

Řešení.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

dává 3 kvantifikátory a jednu implikace.

Definice $x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$ dává po rozepsání

$$\begin{aligned}
&\forall \{x_n\}\ :\\
&\big[\forall \varepsilon' > 0\ \exists n_1\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_1 \implies |x_n - a| < \varepsilon'\big]\\
&\implies\\
&\big[\forall \varepsilon'' > 0\ \exists n_2\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_2 \implies |f(x_n) - A| < \varepsilon''\big]
\end{aligned}$$

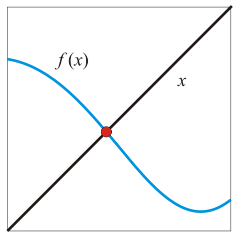
přesně 7 kvantifikátorů a 3 implikace.

Šlo by to dvěma kvantifikátory?

NABÝVÁNÍ MEZIHODNOTY

Příklad. Nechť $f : [0,1] \to [0,1]$ je spojitá. Pak existuje $x \in [0,1]$ tak, že $f(x) = x$

Řešení. Zkoumáme funkci $g(x) = f(x) - x$. Ta je spojitá a někde nabývá nuly jako své „mezihodnoty".



Pevný bod našli 2 z 10.

Konec cvičení 8.

Cvičení 9:
Konec cvičení 9.

UČENÍ

Učení 1:
Konec učení 1.

Učení 2:
Konec učení 2.

Učení 3:
Konec učení 3.

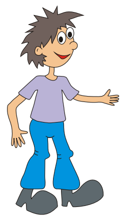
Učení 4:
Konec učení 4.

Učení 5:
Konec učení 5.

Učení 6:
Konec učení 6.

Učení 7:
Konec učení 7.

Učení 8:



Každá funkce má bod spojitosti.

I Dirichletova?

Riemannova funkce nemá bod spojitosti, protože to ty racionální body všude zkazí.

Jejich síla je však jako tvoje výkony po 1 pivu. Nebojí se jich ani odmocnina ze dvou.

Konec učení 8.

Učení 9:
Konec učení 9.