Spojitost funkce

Spojitost je nejdůležitější obecná vlastnost funkcí. Umožňuje aproximace různých řešení. Je důležité vědět, kdy se malá změna nějakého měření projeví málo na konečném výsledku. Zpřesňuje-li se měření, měl by se příslušný počítaný výsledek blížit k přesnému výsledku. To vyjadřuje následující definice, která je zformulována pro funkce s obecným definičním oborem. Pro představu a základní použití je třeba mít na mysli funkce definované na intervalu.

SPOJITOST POMOCÍ POSLOUPNOSTÍ

DEFINICE. Nechť f je funkce, $a \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k a nechť $\lim f(x_n) = f(a)$. Pak říkáme, že f je spojitá v bodě a a tento bod se nazývá bodem spojitosti funkce f.

Je-li f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, říkáme, že f je spojitá.

Jestliže se v definici berou jen posloupnosti s prvky $x_n \geq a$ (nebo $x_n \leq a$), hovoří se o spojitosti zprava (resp. spojitosti zleva), dohromady o tzv. jednostranných spojitostech (spojitosti se pak říká oboustranná spojitost).

Je-li f spojitá v každém bodě množiny A, říkáme, že f je spojitá na množině A.

Chceme, aby se k dané přesnosti výsledku dalo dopracovat přiblížením ke zkoumanému bodu.

To, čemu má spojitost zabránit, je situace, kdy hodnota v daném bodě „uteče" svému okolí.

Vidíme, že běžná funkce může mít body spojitosti i jiné body.

Spojitost lze zkoumat v jediném bodě.

Funkce nemusí mít žádný bod spojitosti. 511

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

POZOROVÁNÍ.

1. V definici spojitosti lze brát jen ryze monotónní posloupnosti, tj. f je spojitá v $a \in \mathcal{D}(f)$ jestliže pro každou rostoucí nebo klesající posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k a je $\lim f(x_n) = f(a)$. (Viz poznámku o výběru monotónních podposloupností.)

2. Funkce f je spojitá zprava (nebo zleva) v a, právě když pro každou klesající (resp. rostoucí) posloupnost $\{x_n\}$ s $\lim x_n = a$ je $\lim f(x_n) = f(a)$.

3. Funkce je v nějakém bodě spojitá právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

SPOJITOST POMOCÍ OKOLÍ

Následující tvrzení je velmi důležité. Ukazuje ekvivalenci definice spojitosti pomocí spočetných množin (posloupností) s definicí pomocí okolí, tj. pomocí nespočetných množin, t.j. množin zdánlivě jiného charakteru.

VĚTA. Funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ právě když pro každé okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$.

Jestliže se použijí jen symetrické intervaly okolo příslušného bodu (každé okolí obsahuje takový interval), dostane se následující, tzv. ε-δ charakterizace spojitosti.

DŮSLEDEK. Funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ jakmile $|x - a| < \delta, x \in \mathcal{D}(f)$.

Přímo z definice spojitosti plyne následující jednoduché ale důležité tvrzení (dokažte).

VĚTA. Je-li f spojitá v a a $f(a) > 0$, pak existuje okolí U bodu a tak, že pro všechna $x \in U \cap \mathcal{D}(f)$ je $f(x) > 0$.

SPOJITOST A KONSTRUKCE FUNKCÍ

Nyní bude vidět, jak je výhodné dokazovat obecná tvrzení pro obecné funkce.

Následující tvrzení ukazují, že konstrukce nových funkcí zavedené v předchozí části, zachovávají spojitost.

Z těchto tvrzení ihned vyplyne spojitost mnoha funkcí bez dalšího dokazování.

VĚTA. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě a, jsou i funkce $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f + g, f \cdot g$ a v případě $g(a) \neq 0$ i funkce f/g spojité v bodě a.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

POZOROVÁNÍ.

1. Je-li f spojitá v a, je i $k \cdot f$ spojitá v a pro každé reálné číslo k a tedy i funkce $-f$.
2. Jsou-li f, g spojité v a, jsou i funkce $f - g$ spojité v a.
3. Je-li f spojitá v a, jsou i funkce f_+, f_- spojité v a a tedy je i $|f|$ spojitá v a.

VĚTA. Je-li funkce g spojitá v bodě a a funkce f spojitá v bodě $g(a)$, je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě a.

Při skládání se spojitost neporuší.

VĚTA. Je-li funkce g spojitá a prostá na intervalu J, je její inverzní funkce spojitá.

Důkaz tohoto tvrzení je odložen do části o spojitých monotónních funkcích, protože tam se dokáže ještě o něco více.

DŮSLEDEK. 1. Funkce n-tá odmocnina $\sqrt[n]{x}$ je spojitá funkce.
2. Logaritmus $\log_a x$ je spojitá funkce.
3. Cyklometrické funkce jsou spojité.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

POZOROVÁNÍ.

1. Je-li f spojitá v a, je i $|f|$ spojitá v a.
2. Posunutím grafu spojité funkce dostaneme graf spojité funkce.

KLASIFIKACE NESPOJITOSTI

Před dalším zkoumáním spojitých funkcí je vhodné si uvědomit, co znamená, že funkce není spojitá v nějakém bodě.

DEFINICE. Nechť a je bod definičního oboru funkce f. Potom

1. f má v a odstranitelnou nespojitost, jestliže existují a rovnají se $\lim f(x_n) = b$ pro všechny posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k a, přičemž $b \neq f(a)$.

2. f má v a skok, jestliže existují a rovnají se $\lim f(x_n) = b$ (nebo $\lim f(x_n) = c$) pro všechny rostoucí (resp. klesající) posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k a, přičemž $b \neq c$.

3. f má v a oscilaci, jestliže neexistuje $\lim f(x_n)$ pro nějakou rostoucí nebo klesající posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k a.

Bod a se potom nazývá po řadě bodem odstranitelné nespojitosti, bodem skoku, bodem oscilace.

Příklad odstranitelné nespojitosti najdeme u člověka s absolutním sluchem, pro kterého všechny nečisté tóny jsou FALEŠNÉ.

Skok najdeme u funkce signum.

Oscilaci najdeme u váhající včelky. Letí k jedné kytce, protože se jí líbí. Když přiletí blíže, nesedne jí její vůně a tak změní směr ke druhé kytce. Ta jí zblízka také nevoní, tak se obrátí . . .

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

SPOJITÉ FUNKCE NA INTERVALU

V této části je ukázáno, že spojité funkce do jisté míry zachovávají některé vlastnosti intervalů, např. souvislost nebo současně uzavřenost a omezenost.

Následující dvě tvrzení pocházejí od Bolzana a bude na ně odkazováno jako na Bolzanovu větu.

LEMMA. Je-li f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a $f(a), f(b)$ mají opačná znaménka, pak existuje $c \in (a, b)$ s hodnotou $f(c) = 0$.

DŮSLEDEK. Každý polynom lichého stupně má reálný kořen.

511

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.

Dalším z důsledků je existence odmocnin (uvědomte si, že odmocnina je inverzní funkce k mocnině a její definiční obor je tedy obor hodnot příslušné mocniny).

DŮSLEDEK. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, existuje n-tá odmocnina z každého reálného čísla, je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, existuje n-tá odmocnina z každého nezáporného reálného čísla.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Následující věta má také název: Weierstrassova věta.

VĚTA. Spojitá funkce nabývá na uzavřeném omezeném intervalu J své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body $c, d \in J$ takové, že

$$f(c) = \sup_{x \in J} f(x), \quad f(d) = \inf_{x \in J} f(x) .$$

DŮSLEDEK. Spojitá funkce zobrazuje uzavřený omezený interval na bod nebo na uzavřený omezený interval.

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

Spojitost a monotónie

Spojité monotónní funkce jsou velmi důležité. Z následujících výsledků je vidět, že tyto funkce mají další výhodné vlastnosti.

511

VĚTA. Spojitá a prostá funkce na intervalu je ryze monotónní a její inverzní funkce je spojitá.

511

VĚTA. Monotónní funkce f na intervalu J, která zobrazuje intervaly v J na bod nebo intervaly, je spojitá.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7

Spojitost, konvexita a periodické funkce

VĚTA. Konvexní nebo konkávní funkce na otevřeném intervalu je spojitá.

Důkaz jde udělat i obrázkem:

Bylo zmíněno, že Dirichletova funkce má za periody všechna kladná racionální čísla. Taková situace nemůže nastat u spojitých periodických funkcí (kromě konstantní funkce).

VĚTA. Spojitá nekonstantní periodická funkce má nejmenší periodu.

Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8 8 8