Limita funkce

V předchozí části o spojitosti funkcí byl probírán případ, kdy $\lim f(x_n)$ existovala a byla stejná pro všechny posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k bodu a.

Šlo o spojitost, nemýlím se?

Pokud $a \in \mathcal{D}(f)$ a $\lim f(x_n)$ se rovnala $f(a)$, byla funkce f v a spojitá. Pokud $a \in \mathcal{D}(f)$ a $\lim f(x_n)$ se nerovnala $f(a)$, měla f v a odstranitelnou nespojitost.

Důležitý je však i případ, kdy $a \notin \mathcal{D}(f)$. Pak lze funkci f v a dodefinovat hodnotou $\lim f(x_n)$ a dostane se funkce spojitá v a.

Tento důležitý případ bude nyní probírán. V následující definici není navíc důvod nevzít v úvahu i nevlastní body.

DEFINICE. Nechť a je hromadný bod definičního oboru funkce f.

Limita funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ se rovná $A \in \mathbb{R}^*$
(značení $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, nebo $f(x) \to A$ pro $x \to a$),
jestliže $\lim f(x_n) = A$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ konvergující k a.

Jde o to samé jako u spojitosti, jenom ta hodnota nemusí být funkční hodnota v bodě a posloupnosti se cudně vyhýbají bodu a.

Pokud se v definici limity berou jen posloupnosti $\{x_n\}$ s $x_n < a$ (nebo $x_n > a$) dostane se tzv. limita zleva (resp. limita zprava); značení $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$). Zapisujeme to přehledně $f(x+)$ (resp. $f(x-)$).

V tomto případě je nutné předpokládat, že takové posloupnosti $\{x_n\}$ existují.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $a \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě a právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.
3. V definici limity lze brát jen prosté posloupnosti nebo jen rostoucí a klesající posloupnosti $\{x_n\}$.
4. $\lim_{x \to a_+} f(x) = A$, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$ z definičního oboru f klesající k a a pro všechny takovéto posloupnosti je $\lim f(x_n) = A$. Podobně pro limity zleva.
5. $\lim_{x \to a} f(x) = A$ právě když $\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_-} f(x) = A$

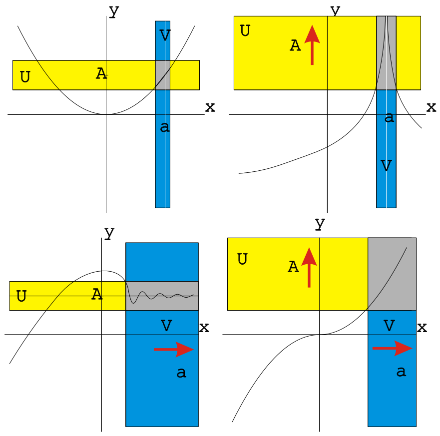
Následující charakterizace limit odpovídá podobnému tvrzení pro spojitost. Tvrzení znamená, že limita funkce f v bodě a je hodnota, ke které se přibližují **všechny** hodnoty $f(x)$, pokud je x blízko a.

VĚTA. Následující tvrzení jsou pro funkci f, hromadný bod a definičního oboru f a bod A ekvivalentní:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = A$;
2. Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu a takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f), x \neq a$.

Důkaz. Důkaz je podobný obdobné charakterizaci spojitosti funkce pomocí okolí, jen se místo bodu $f(a)$ musí nyní použít bod A a uvážit, že a může být nevlastní číslo (nelze tedy vždy brát za okolí intervaly $(a-1/n, a+1/n)$ ale obecně spočetnou soustavu klesajících okolí k bodu a). $\diamond$

Následující obrázky ilustrují jednotlivé případy možností čísel a, A:



Obdobou $\underline{\varepsilon\text{-}\delta}$ charakterizace spojitosti pro různé kombinace vlastních či nevlastních čísel a, A jsou následující přepisy předchozí charakterizace (viz ilustrace v poznámkách):

Body a i A jsou vlastní. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jakmile $0 < |x - a| < \delta$.

Bod a vlastní, bod A nevlastní. Pro každé číslo K existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) > K$ pro $A = +\infty$ (resp. $f(x) < K$ pro $A = -\infty$), jakmile $0 < |x - a| < \delta$.

Bod a nevlastní, bod A vlastní. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo k tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jakmile $x > k$ pro $a = +\infty$ (resp. $x < k$ pro $a = -\infty$).

Body a i A jsou nevlastní. Pro každé číslo K existuje číslo k tak, že $f(x) > K$ pro $A = +\infty$ (resp. $f(x) < K$ pro $A = -\infty$), jakmile $x > k$ pro $a = +\infty$ (resp. $x < k$ pro $a = -\infty$).

Tady prosím o POZORNOST!!! Raději si to zopakujte.

Poznámky 2

Limita a konstrukce funkcí

V této části budou uvedena tvrzení pro limity aritmetických operaci a složení funkcí, analogické příslušným tvrzením o spojitosti.

Teď to bude trochu opakování.

VĚTA. Nechť a je hromadný bod definičních oborů funkce $f + g$. Pak platí (zkráceně je místo $\lim\limits_{x \to a}$ použito lim):

1. $\lim(f(x)+g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$, pokud má pravá strana smysl;
2. $\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$, pokud má pravá strana smysl;
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, pokud má pravá strana smysl;

Důkaz. Důkaz provedeme pro podíl, ostatní případy jsou obdobné. Pro libovolnou prostou posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f/g)$ konvergující k a je $\lim f(x_n) = A, \lim g(x_n) = B$ a tedy (první rovnost z definice podílu funkcí, druhá rovnost z limity podílu posloupností):

$$\lim \frac{f}{g}(x_n) = \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)}\,,$$

pokud má poslední výraz, který se rovná A/B, smysl. $\diamond$

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Tvrzení pro limity složených funkcí je složitější než odpovídající tvrzení o spojitosti.

Je zákeřně nečekaně záludné. Je to jemná záležitost. Přečtěte si následující větu několikrát.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce, a je hromadný bod $\mathcal{D}(f\circ g)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ a $\lim\limits_{y\to A} f(y) = \alpha$, pak

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \alpha$$

za předpokladu, že $g(x) \neq A$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí bodu a.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost z $\mathcal{D}(f\circ g)\setminus\{a\}$ konvergující k a. Pak $\{g(x_n)\}$ je posloupnost z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k A a skoro všechny její členy jsou různé od A.

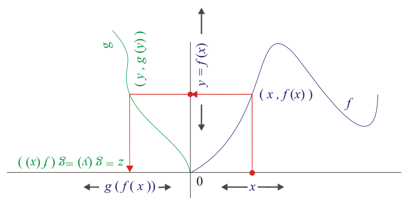
To znamená, že $f(g(x_n)) \to \alpha$, což bylo dokázat. $\diamond$

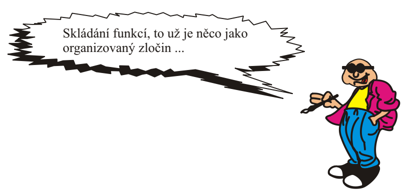
Většinou se limita složených funkcí používá ve speciálních případech popsaných v následujícím důsledku, kde není třeba ověřovat podmínku $g(x) \neq A$ (je přidán důležitý případ známý již z části o spojitosti).

DŮSLEDEK. Nechť a je hromadný bod definičního oboru funkce $f\circ g$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. Pak $\lim\limits_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim\limits_{y\to A} f(y)$ pokud je

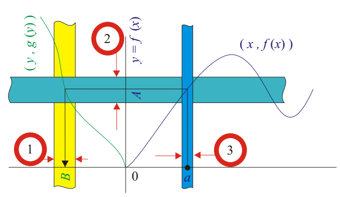
1. f spojitá v A nebo
2. A je nevlastní nebo
3. g je ryze monotónní v nějakém okolí bodu a.

To si je třeba důkladně promyslet.





Když se blížíme v „x", blížíme se v „y" a následně i v „z".



Nastavíme toleranci v „z", pak hledáme toleranci v „y", kvůli tomu dohledáme toleranci v „x".

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Limita a uspořádání

Limita funkcí v určitém smyslu zachovává uspořádání a platí obdobná tvrzení jako pro limity posloupností.

Je třeba zkontrolovat drobné odlišnosti !

Limity a vztah uspořádání

Větší funkce nemá menší limitu.

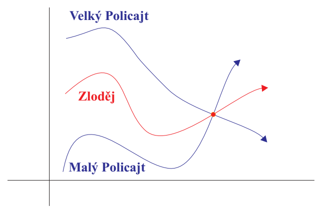
VĚTA. Mějme na množině J funkce f, g a a buď hromadný bod J.

1. Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, pak existuje okolí U bodu a takové, že $f(x) < g(x)$ pro všechna $x \in U \cap J, x \neq a$.
2. Jestliže existuje okolí U bodu a takové, že $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in U \cap J, x \neq a$, pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (pokud existují).

Důkaz. Nechť tvrzení 1 neplatí a $\{V_n\}$ je klesající posloupnost okolí bodu a s $\bigcap V_n = \{a\}$. Pro každé n existuje $x_n \in V_n \cap J, x_n \neq a$, tak, že $f(x_n) \geq g(x_n)$. Pak $x_n \to a$ a tedy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim f(x_n) \geq \lim g(x_n) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, což je spor s předpokladem.

Tvrzení 2 plyne ihned z 1. ◇

DŮSLEDEK. Mějme funkce f, g, h na množině J, a buď hromadný bod J, U okolí a a pro $x \in J \cap U, x \neq a$ nechť $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Jestliže existují $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} h(x)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim_{x \to a} g(x)$ a rovná se oběma zbývajícím.



Jak se na MFF říká: Mají-li dva policajti mezi sebou stále zloděje, pak při dopadení policajt i zloděj jedno jsou.

V případě $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ není nutné uvažovat funkci h, a podobně u limity $-\infty$ není nutné uvažovat funkci f.

To je jasné.

DŮSLEDEK. Nechť $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu a. Pak $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Nula krát omezená je nula. To je užitečné.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Limita monotónních funkcí

Pro monotónní funkce je situace jednodušší, podobně jako u monotónních posloupností, protože tam některé limity vždy existují.

Monotónní funkce mají v podstatě vždy limitu.

VĚTA. Monotónní funkce má jednostrannou limitu v každém bodě, kde to má smysl, a to

1. pro neklesající funkci f na intervalu J je

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf\{f(y) : y > a, y \in J\}\,, \lim_{x\to a_-} f(x) = \sup\{f(y) : y < a, y \in J\}\,,$$

2. pro nerostoucí funkci je

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup\{f(y) : y > a, y \in J\}\,, \lim_{x\to a_-} f(x) = \inf\{f(y) : y < a, y \in J\}$$

(ve všech případech pokud mají smysl levé strany).

Důkaz. Stačí dokázat např. první rovnost v 1. Nechť $\{x_n\}$ je klesající posloupnost v J konvergující k a. Pak $\{f(x_n)\}$ je nerostoucí a tedy $\lim f(x_n) = \inf\{f(x_n)\}$. Zřejmě je $\inf\{f(x_n)\} = \inf\{f(y) : y > a, y \in J\}$. $\diamond$

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6 6 6

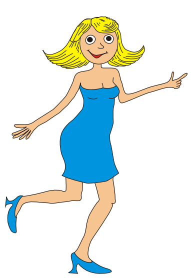
POZNÁMKY

Poznámky 1:

Na rozdíl od spojitosti v bodě a nemusí být funkce při počítání limity v bodě a vůbec definována. Musí však být definována v mnoha bodech okolo bodu a.

I pokud $f(a)$ existuje, na její hodnotě limita f v a vůbec nezávisí.

Protože často jsou definičními obory intervaly nebo jejich sjednocení, počítají se limity těchto funkcí v krajních bodech těchto intervalů nebo ve vnitřních bodech, pokud v nich funkce není spojitá.



Zjišťuje se, zda tam nelze funkce spojitě předefinovat.

V případě limit zleva (podobně tomu je zprava) znamená předpoklad o existenci rostoucí posloupnosti k a z $\mathcal{D}(f)$, že a je hromadným bodem množiny $M = \mathcal{D}(f) \cap (-\infty, a)$.

Označí-li se g zúžení funkce f na množinu M, je $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Není tedy nutné zvlášť dokazovat věty pro oboustranné limity a pro jednostranné limity.

V případě $a = \infty$ je $f = g$ a tedy limita a limita zleva splývají, limita zprava nemá smysl.

Zřejmě nezáleží na označení proměnné: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ značí totéž jako $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$.

Zdá se, že případy v nevlastních bodech nebo nevlastní hodnoty limit jsou zcela nové oproti případům vyplývajícím ze spojitosti funkce.

Není však důvod, proč funkce nedefinovat i v nevlastních bodech a s nevlastními hodnotami (tj. zobrazení $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$).

Vše, co bylo probíráno v předchozích částech o funkcích a spojitosti, platí i pro takto rozšířené funkce. Musí se ovšem dávat pozor na další neurčité případy ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, atd.).

Protože $\mathbb{N}$ má jediný hromadný bod, a to ∞, má pro posloupnost (tj. funkci na $\mathbb{N}$) smysl mluvit jen o limitě v ∞, což byl případ probíraný v kapitole o posloupnostech.

Je to najednou jasnější a není v tom problém.

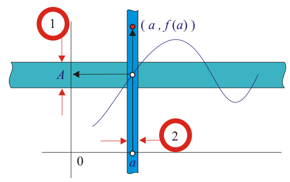
Jak bude vidět dále, mnoho tvrzení o limitách funkcí je zobecněním příslušných tvrzení o limitách posloupností (resp. tvrzení o limitách posloupností jsou speciálním případem příslušných tvrzení o limitách funkcí).

Nůďo.

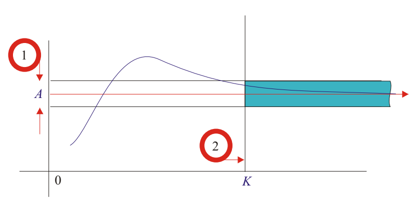
Je vhodné si uvědomit (stejně jako u spojitosti), že definici limity lze vyslovit i pro zobrazení např. mezi Euklidovskými prostory. Stačí, že na definičním oboru i oboru hodnot je definována konvergence posloupností.

Konec poznámek 1.

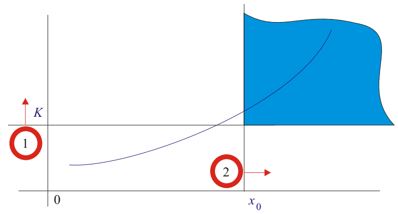
Poznámky 2:



Vlastní případ. Nejprve si nastavíme toleranci, pak najdeme okolí, kde se ta tolerance dosahuje.



Polonevlastní případ. Nejprve si nastavíme toleranci, pak najdeme okolí, kde se ta tolerance dosahuje.



Nevlastní případ. Nejprve si nastavíme toleranci, pak najdeme okolí, kde se ta tolerance dosahuje.

U nekonečna jako u konečna. Myšlenka je stejná.

Obecná exponenciální funkce

Poslední část *Otázek 5* kapitoly o posloupnostech vlastně říká:

Je-li $f(x) = a^x$ definovaná na $\mathbb{Q}$, pak pro každé reálné číslo z existuje $\lim\limits_{x\to z} f(x)$. Tato limita se rovná a^z.

Tímto způsobem lze exponenciální funkce také definovat.

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Výrazy *pokud má pravá strana smysl* znamenají dvě věci: jednak existenci všech limit na pravé straně a jednak to, že se na pravé straně nevyskytuje neurčitý výraz.

Takže např. první rovnost $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$ znamená, že pokud existují obě limity $\lim f(x), \lim g(x)$ a výraz $\lim f(x) + \lim g(x)$ není neurčitý, pak existuje i limita $\lim(f(x) + g(x))$ a rovná se součtu $\lim f(x) + \lim g(x)$.

Počítá-li se tedy příklad, např. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^3-2}$, napíše se, že se tento výraz rovná $\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^4-2)}$ i když v tu chvíli ještě není známo, že ta rovnost opravdu platí. Teprve po výpočtu posledních dvou limit lze ověřit zpětně platnost rovnítka.

Je možné nad taková „podmíněná rovnítka" napsat otazník a po ověření a dopočítání konstatovat: ?=ANO.

Předchozí věta má smysl a platí i pro reálné funkce definované na Euklidovských nebo jiných prostotech, protože v důkazu byla potřeba jen spojitost aritmetických operací na $\mathbb{R}$.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Případ spojité funkce f v posledním tvrzení plyne z definice spojitosti funkce, nicméně, je vhodné si toto použití spojitosti připomenout.

Jinými slovy:

Je-li f spojitá, pak $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = f(\lim_{x\to a} g(x))$, jakmile existuje levá strana (pravá strana existuje, i když $\lim_{x\to a} g(x)$ není hromadným bodem definičního oboru f – může být jejím izolovaným bodem).

Pokud je ale f definována např. na intervalu, pak rovnost platí, jakmile má jedna strana smysl. Takže např. $\lim_{x\to a}\sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} g(x)}$, jakmile jedna strana existuje.

Předchozí věty o limitě nově sestrojených funkcí dávají návod k počítání.

Je-li g sestrojena pomocí aritmetických operací a skládání ze spojitých funkcí $f_i, i = 1, ..., k$, je prvním krokem ve výpočtu limity g v bodě a dosazení bodu a do g.

Jestliže se dostane smysluplná hodnota (tj. nikde se nenarazí na „neurčitý výraz"), je tato hodnota hledanou limitou. Pokud se vyskytne neurčitý výraz, je nutné funkci g upravit (např. rozšířit zlomek vhodným výrazem, použít vzorec pro goniometrické funkce) a po úpravě opakovat první krok, tj. opět dosadit bod a.

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Předchozí tvrzení mají smysl (a platí) pro funkce s hodnotami v $\mathbb{R}$ (nebo v jiné uspořádané množině) a tedy i pro funkce více proměnných nebo definovaných na normovaných prostorech a pod.

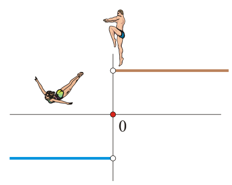
Konec poznámek 5.

Poznámky 6:

Je-li tedy funkce f monotónní na intervalu I, a bod a buď leží v I nebo je krajním bodem I, pak existuje $\lim_{x\to a_+} f(x)$ pokud a není pravým koncovým bodem I a existuje $\lim_{x\to a_-} f(x)$ pokud a není levým koncovým bodem I.

Je to najednou vysloveno pro praváky i leváky ;-)

I když je a vnitřním bodem intervalu I, nemusí oboustranná limita v a existovat (může tam být skok, jak ukazuje příklad funkce signum v bodě 0).



Samozřejmě stačí pro existenci $\lim_{x\to a_+} f(x)$ předpokládat, že daná funkce je monotónní jen na nějakém intervalu (a,b); podobně pro $\lim_{x\to a_-} f(x)$ stačí monotónnost na nějakém intervalu (b,a).

Jenom kousíček stačí k limitě.

Na rozdíl od předchozí části o vztahu limity a uspořádání je v této části potřeba i uspořádání na definičním oboru a tedy tato tvrzení nelze přenést na funkce více proměnných.

V následujících *Příkladech* je uveden přirozený logaritmus $\log$, což je logaritmus se základem e.

Tento logaritmus se značívá i jako ln nebo lg. Dříve toto značení mělo smysl, aby se přirozený logaritmus nepletl s dekadickým logaritmem se základem 10, který se často značil log.

Ten se používal velmi často pro výpočty, když ještě nebyly rozšířeny kalkulačky a počítače (existovaly podrobné tabulky dekadických logaritmů).

V současné době dekadický logaritmus ztratil svůj původní význam a používá se spíše vyjímečně. Přirozený logaritmus je však v matematice (zvláště teoretické) velmi rozšířený a může se nyní značit log aniž dojde k záměně s dekadickým logaritmem.

Stejně jako přirozený logaritmus, má i jeho inverzní funkce e^x v matematice vyjímečné postavení. Má proto svůj název: exponenciální funkce. Občas bývá místo e^x značena jako $\exp(x)$.

Exponenciální funkce je opravdu světová. Mám ji ráda :-)

Konec poznámek 6.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

V následujících situacích je vždy předpoklad, že a je hromadný bod definičního oboru dané funkce f.

Je-li f konstantní s hodnotou k, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$.

Je-li f identická funkce, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.

$\lim\limits_{x\to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x\to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1$.

A co $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$?

$\lim\limits_{x\to 0_-} 1/x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0_+} 1/x = \infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} 1/x = \lim\limits_{x\to \infty} 1/x = 0$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} x = \infty$.

$\lim\limits_{x\to \infty} \sin x$ neexistuje.

Je jasné, že každý příklad v sobě obsahuje drobný vtípek? Je to taková malá početní anekdota. Je třeba tyto triky „dát do batůžku" a stále používat.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1)$, protože obě funkce se rovnají na nějakém okolí bodu 1 kromě tohoto bodu (v tomto případě na $\mathbb{R} \setminus \{1\}$).

Když někdo poradí, které dvě funkce jsou skoro stejné, je to jasné. Jinak na to musíme přijít sami.

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

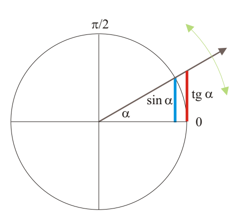
Základní techniky počítání limit jsou velmi důležité pro všechny další kapitoly.

Počítejte asi 10 hodin limity racionálních funkcí z odmocnin, z goniometrických funkcí. Usmívejte se.

Konec příkladů 4.

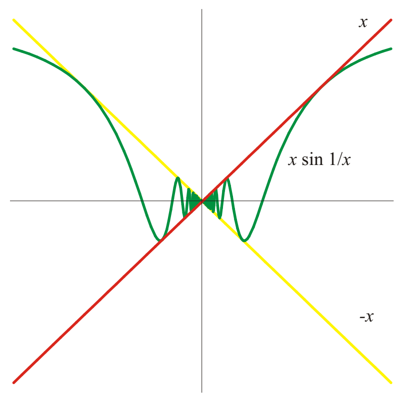
Příklady 5:

Z naivní představy o délkách lze odvodit vzorec $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pro $x \in (0, \pi/2)$. Tedy $\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}$, odkud vyplývá $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Protože kosinus je spojitá funkce a v 0 má hodnotu 1, je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Taky jsem byla kdysi naivní.

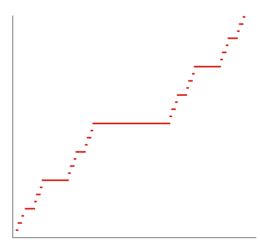
$\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ přestože $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x) = 0$ neexistuje.

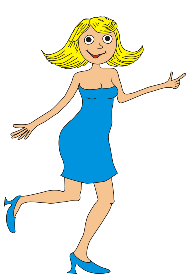


Konec příkladů 5.

Příklady 6:

Monotónní funkce má limitu.





Tato funkce je dokonce spojitá.

Limity exponenciální a logaritmické funkce.

1. Je-li $a > 1$, je $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

[Návod: $\lim_{x\to+\infty} a^x = \sup\{a^n; n\in\mathbb{N}\} = +\infty$ neboť pro dostatečně velká n je $\sqrt[n]{n} < a$ a tedy $n < a^n$.]

Je-li $0 < a < 1$, je $\lim_{x\to+-\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$.

2. Další limity budou uváděny pro $a > 1$. Dodělejte si přechodem k $1/a$ příslušné limity pro případ $0 < a < 1$. Nechť tedy $a > 1$. Pak platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty\,.$$

Stačí uvážit, že $a = 1 + h$ pro nějaké $h > 0$ a že pro každé $x > 1$ existuje $n_x \in \mathbb{N}$ tak, že $n_x \le x < n_x + 1$. Potom

$$\frac{a^x}{x} \ge \frac{(1+h)^{n_x}}{n_x+1} \ge \frac{1 + n_x h + n_x(n_x-1)h^2/2}{n_x+1}$$

a poslední výraz je libovolně velký pro dostatečně velká x.

3. Pro $a > 1, u > 0, v > 0$ platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{ux}}{x^v} &= +\infty\,, &&\text{spec.} && \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty\\
\lim_{x\to-\infty} |x|^v a^{ux} &= 0\,, &&\text{spec.} && \lim_{x\to-\infty} |x|^n a^x = 0\\
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^u}{\log_a{}^v x} &= +\infty\,, &&\text{spec.} && \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log_a x} = +\infty\\
\lim_{x\to 0_+} x^u \overset{v}{\log_a} x &= 0\,, &&\text{spec.} && \lim_{x\to 0_+} x \log_a x = 0\,.
\end{aligned}$$

Tyto limity vyplývají z limity v bodě 2. Např. funkce v první limitě lze upravit takto pro $y = (ux\log a)/v, k = (u\log a)/v$:

$$\frac{a^{ux}}{x^v} = \Big(\frac{e^{(ux\log a)/v}}{x}\Big)^v = k\Big(\frac{e^y}{y}\Big)^v\,.$$

Další limity vyplývají z této první různými úpravami – ukažte to.

Zhruba řečeno, exponenciální funkce a^x pro $a > 1$ roste k nekonečnu rychleji než jakákoli mocnina x^n.

Logaritmická funkce $\log_a$ pro $a > 1$ roste k nekonečnu pomaleji než jakákoli mocnina x^ε pro $\varepsilon > 0$.

To si pamatujte a mezi nematematiky to lehce prodáte za korálky.

4. Pro každé $a > 0$ existuje limita $\lim_{x\to 0} (a^x - 1)/x$.

Případ $a = 1$ je triviální. Nechť tedy $a > 0, a \neq 1$.

Dosaďte do limity $y = 1/(a^x - 1)$. Tím se původní limita změní na $1/\log_a \big(\lim_{y\to+\infty}(1 + 1/y)^y\big)$. Pro libovolnou posloupnost $\{y_k\}$ jdoucí k $+\infty$ existuje posloupnost $\{n_k\}$ taková, že $n_k \le y_k < n_k + 1$ pro skoro každé k. Tím se dostanou následující nerovnosti:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \ge \left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} \ge \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k}.$$

Protože $\{n_k\}$ konverguje k $+\infty$, je limita obou krajních výrazů rovna Eulerovu číslu e.

Takže

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a e} = \log a\,,$$

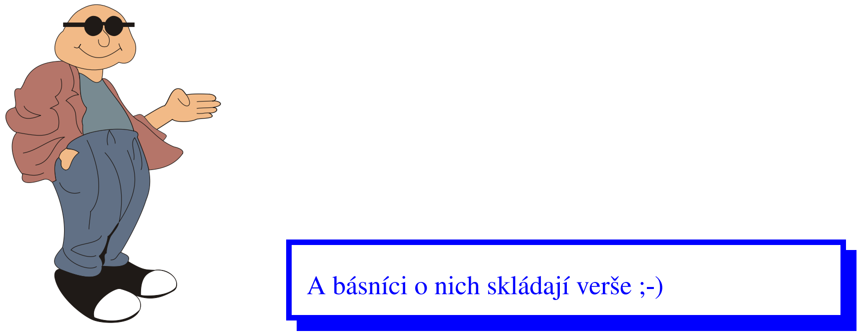
přijmeme-li úmluvu, že u logaritmu se základem e se tento základ značit nebude. Jedná se totiž o velmi důležitý logaritmus, tzv. přirozený logaritmus.

Plat podle přirozeného logaritmu bych přirozeně bral všema deseti ;-)

Předchozí limita pro číslo e místo a tedy dává následující důležité limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(x + 1)}{x} = 1\,.$$

To jsou dvě nejhezčí limity vůbec.



Konec příkladů 6.

OTÁZKY

Otázky 1:

Dokažte: Je-li $a \in \mathcal{D}(f)$ hromadný bod $\mathcal{D}(f)$, pak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ právě když je f v bodě a spojitá nebo tam má odstranitelnou nespojitost.

Ukažte, že pro hromadný bod a definičního oboru funkce f existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ právě když lze f v a dodefinovat nebo předefinovat tak, aby v tomto bodě byla nová funkce spojitá.

V jakých případech existuje limita periodické funkce v nevlastních bodech?

Ukažte, že $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje právě když existuje $\lim f(x_n)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ z $\mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ konvergující k a (předpokládáme, že a je hromadný bod $\mathcal{D}(f)$).

Co by nastalo, kdyby bylo v definici limity připuštěno i $x_n = a$?

Co by nastalo, kdyby byl vynechán předpoklad, že a je hromadný bod definičního oboru?

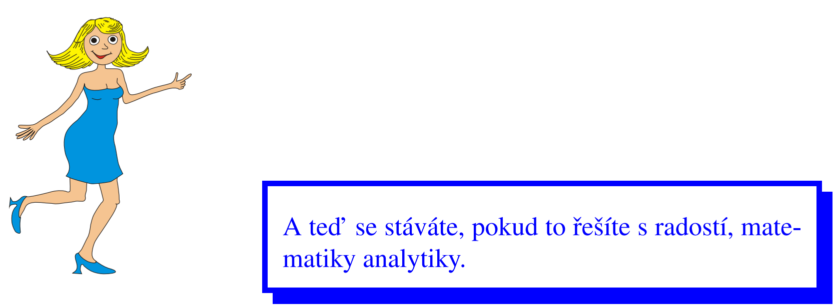
Konec otázek 1.

Otázky 2:

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Najděte příklady funkcí f, g, pro které existují levé strany rovností poslední věty a výrazy na pravé straně nemají smysl, a to pro oba možné případy, tj. buď limity neexistují (může se stát, že jedna z limit na pravé straně existuje a druhá nikoli?) nebo existují ale příslušná aritmetická operace dá neurčitý výraz.



Konec otázek 3.

Otázky 4:

Ukažte: Protože absolutní hodnota je spojitá funkce, je $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$, pokud limita vpravo existuje. Z toho vyplývá, že

$$\lim_{x\to a} \max\{f,g\}(x) = \max\{\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)\}$$

a podobně pro minimum.

Najděte příklad, že $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ existuje, ale $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Najděte příklady funkcí f, g, např. na intervalu $(0,1)$, tak, že $\lim\limits_{x\to 0)} (f \circ g)(x)$ existuje, ale $\lim\limits_{x\to 0)} g(x)$ neexistuje (popř. $\lim\limits_{y\to A)} (f)(y)$ neexistuje, kde $\lim\limits_{x\to 0)} g(x) = A$).

Ukažte, že případ 3 v posledním tvrzení lze zobecnit: stačí, když g je ryze monotónní *napravo od* a a *nalevo od* a, např. když $g(x) = x^2$ a $a = 0$.

Konec otázek 4.

Otázky 5:

Najděte příklad dvou funkcí f, g definovaných na $(0,1)$ takových, že $f(x) < g(x)$ pro všechna $x \in (0,1)$ a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Konec otázek 5.

Otázky 6:

Ukažte, že $a^x = e^{x \log a}$.

Podle této rovnosti si zkontrolujte neurčité výrazy pro mocniny: $0^0, 1^{\pm\infty}, +\infty^0$.

Jsou-li f, g dvě funkce definované na intervalech I, J, je funkce $f(x)^{g(x)}$ definována na $J \cap \{x \in I; f(x) > 0\}$.

Je to nová konstrukce nové funkce (mocnina funkcí).

Podle předchozího převodu obecné mocniny na mocninu se základem e lze psát $f(x)^{g(x)} = e^{f(x)\log g(x)}$. Tato rovnost se většinou používá při práci s mocninami funkcí.

Dokažte, že $f(x)^{g(x)}$ je spojitá, jakmile f, g jsou spojité.

Ukažte, že $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, pokud má pravá strana smysl.

Dejte si pozor na funkce typu x^x a podobné. Vypadají krotce, ale jsou to pěkní zabijáci !!!

Naivka ...

Konec otázek 6.

CVIČENÍ

Cvičení 1:
Konec cvičení 1.

Cvičení 2:
Konec cvičení 2.

Cvičení 3:
Konec cvičení 3.

Cvičení 4:
Konec cvičení 4.

Cvičení 5:
Konec cvičení 5.

Cvičení 6:

LIMITA FUNKCE - ZÁKLADY

Příklad. Zjistěte, zda jdou funkce

$$x \sin\frac{1}{x}\ ,\ x^2 \sin\frac{1}{x^2}\ ,\ x \operatorname{sign}\frac{1}{x}\ ,\ |\operatorname{sign} x|$$

spojitě dodefinovat v počátku.

Jak jinak.

Příklad. Pro které hodnoty parametru A existují funkce f a g tak, aby $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = A$.

Řešení. Základní volba je $f(x) = x^p$ a $g(x) = x^q$ a jejich násobky. Pro vhodné dvojice dostaneme to, co chceme.

Je možné udělat jakoukoliv hodnotu. Limita mimo jiné nemusí existovat.

2 z 10.

Mezi základní limity, které je třeba bezpodmínečně umět patří

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

O těchto limitách nejde diskutovat.

LIMITA SLOĐENÉ FUNKCE

Pokud je někde problém, je to u limity složené funkce.

Je to něco úplně nového a nečekaného!!!

Tak o co jde?

Stručný zápis věty o limitě složené funkce (VLSF) říká:

$$f(x) \neq b \;\&\; f(a\pm) = b \;\&\; g(b\pm) = c \implies (g \circ f)(a\pm) = c$$

Jiný zápis říká:

$$f(x) \neq f(a\pm) \implies (g \circ f)(a\pm) = g(f(a\pm)\pm)$$

Předpoklad je tam JEDEN. Existuje okolí, na němž f nenabývá své limity $f(a\pm)$.

Tento předpoklad je nezbytně nutné ověřit PŘED použitím VLSF.

Jediný předpoklad VSLF je dobré nějak označit. Například (P) .

Když počítám podle VLSF, napíšu „ověříme (P) " a zkontroluji ho. Pak počítám.

Po pravdě řečeno, nemluvím vždycky pravdu. Nicméně bez (P) jste na cestě do Pekel.

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \,.$$

Řešení.

1. Pro funkci $f(x) = 3x$ platí

$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0} 3x \;=\; 0\,.$$

2. Existuje prstencové okolí P bodu 0 takové, že f nenabývá hodnotu 0 na P. Předpoklad (P) je tedy ověřen.
3. Pro vnější funkci $g(y) = \sin y/y$ platí
$$\lim_{y\to0} g(y) = \lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$
4. Podle VLSF je
$$\lim_{x\to0} g(f(x)) = \lim_{x\to0} g(3x) = \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1.$$

Píšeme to někdy zápisem

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{x\to0}\overbrace{\boxed{\frac{\sin 3x}{3x}}}^{\underbrace{\boxed{1}}_{\vdots}} = 1\,.$$

Musíme někam poznamenat, že „$\vdots$" znamená použití VLSF:

1. $\lim f$: vidíme, že pro $f(x) = 3x$ platí
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} 3x = 0$$
2. (P) : vidíme, že $f(x) = 3x$ je nenulová na prstencovém okolí počátku
3. $\lim g$: vidíme, že pro $g(y) = \sin y/y$ platí
$$\lim_{y\to0} g(y) = \lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$
4. VLSF :
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1.$$

Takhle se mi to líbí nejvíc.

Pokud je vnější funkce spojitá, není předpoklad (P) potřeba.

Příklad.

$$\lim_{x\to 0} \exp(\sin x)) \overset{?}{=} \exp(\lim_{x\to 0} \sin x) = 1 .$$

Řešení. ?=ANO, protože vnější funkce je spojitá.

Příklad. Dokažte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Řešení. Zvolme $f(x) = \log(1+x)$. Platí $f(0\pm) = 0$ a je splněn předpoklad (P) .
Pro funkci $g(y) = (\exp y - 1)/y$ známe limitu v počátku

$$\lim_{y\to 0} \frac{\exp y - 1}{y} = 1$$

Podle VLSF je

$$1 \overset{V}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\log(1+x)) - 1}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x) - 1}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+x)} ,$$

což nám stačí.

3 z 10.

Platí

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \overset{V}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1 .$$

Zde V=VLSF pro $f(x) = x - 1$, $g(y) = \log(1+y)/y$. Takové lineární „substituce" budeme někdy dělat mlčky.

Jednoduchou substituci ve smyslu VLSF jde dělat za pochodu a označit to písmenkem S nad rovnítkem.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \overset{S}{=} [y = x-1] \overset{S}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Příklad. Ověřte

$$\lim_{y\to 0+} f(y) = A \iff \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = A\,.$$

Řešení. Podle VLSF a $y = 1/x$ jde o samozřejmost.

IMHO VLSF O5 OK.

OBECNÁ MOCNINA

Připoměňme si definici obecné mocniny

$$f(x)^{g(x)} = \exp\left(g(x)\ \log f(x)\right)\,.$$

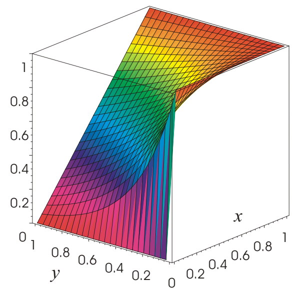
Samozřejmostí mezi slušnými lidmi je používat pouze kladnou funkci f.

Aby taková mocnina $f(x)^{g(x)}$ měla limitu 1 je potřeba, aby

$$\lim\left(g(x)\ \log f(x)\right) = 0.$$

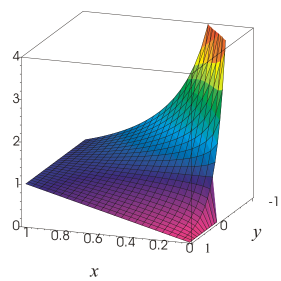
To platí pro x^x a tuším MÁLOKDY JINDY.

Funkce x^y je pro $0 < x < 1$ a $0 < y < 1$ znázorněna na obrázku.



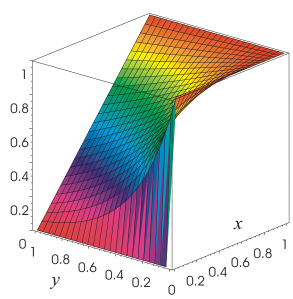
Je vidět, že u počátku $(0,0)$ jsou hodnoty někde mezi 0 a 1.

Funkce x^y je pro $0 < x < 1$ a $-1 < y < 1$ znázorněna na obrázku.



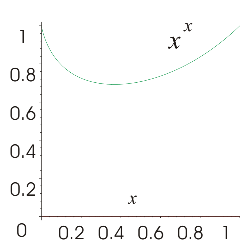
Je vidět, že u počátku $(0,0)$ jsou hodnoty někde mezi 0 a ∞.

Tedy 0^0 je sice 1, ale je to výjimečně pěkné. Pohybujeme se na diagonále na grafu



a v limitě dostaneme 1.

Řez tohoto grafu je funkce x^x s tímto průběhem:



Byli jste tímto varováni. Kdo bude obecné mocniny limitit od boku, je Greenhorn.

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \to 0+} x^{\frac{1}{\log x}} \,.$$

Řešení. Příklad je ukázkově názorný (jde o konstantní funkci)

$$\lim_{x \to 0+} x^{\frac{1}{\log x}} \;=\; \lim_{x \to 0+} \exp\left(\frac{\log x}{\log x}\right) \;=\; \lim_{x \to 0+} \exp(1) \;=\; e \,.$$

LIMITA FUNKCE - KRABIČKY

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} \right) .$$

Řešení. Ze závorky vytkneme a dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} \right) &= \lim_{n \to \infty} x^{\frac{1}{n+1}} \frac{x^{\frac{1}{n^2+n}} - 1}{\frac{1}{n^2+n}} \frac{n^2}{n^2+n} = \\
&= \lim_{n \to \infty} \overbrace{\boxed{x^{\frac{1}{n+1}}}}^{\boxed{1}} \overbrace{\boxed{\frac{\exp\left(\frac{1}{n^2+n}\log x\right) - 1}{\frac{1}{n^2+n}\log x}}}^{\boxed{1}} \overbrace{\boxed{\frac{n^2}{n^2+n}}}^{\boxed{1}} \log x = \\
&= \log x \,.
\end{aligned}$$

Něco jsem zaPoměl ;-)

BTW. Pracovali jsme s posloupnostmi jako s funkcemi. No problem.

LIMITA FUNKCE - TRIKY

$$\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)\;+\;(1-\sqrt[3]{1+x})}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)}{x}+\frac{(1-\sqrt[3]{1+x})}{x}$$

$$\log(x^{10}+x+1)\;=\;\log[x^{10}(1+x^{-9}+x^{-10})]\;=\;10\log x\;+\;\log(1+x^{-9}+x^{-10})\;=\;\ldots$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\frac{x^x-a^a}{x-a}=\frac{(x^x-a^x)+(a^x-a^a)}{x-a}$$

$$\frac{x^m-1}{x^n-1}\overset{S}{=}[x=1+t]\overset{S}{=}\frac{(1+t)^m-1}{(1+t)^n-1}$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}=\lim_{x\to 7}\left(\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}+\frac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}\,\sqrt[n]{x+1}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x+1}\,\sqrt[n]{x+1}-\sqrt[n]{x+1}+\sqrt[n]{x+1}-1}{x}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}(\sqrt[m]{x+1}-1)+(\sqrt[n]{x+1}-1)}{x}\end{aligned}$$

Vždy s úsměvem :-)

Konec cvičení 6.

UČENÍ

Učení 1:
Konec učení 1.

Učení 2:
Konec učení 2.

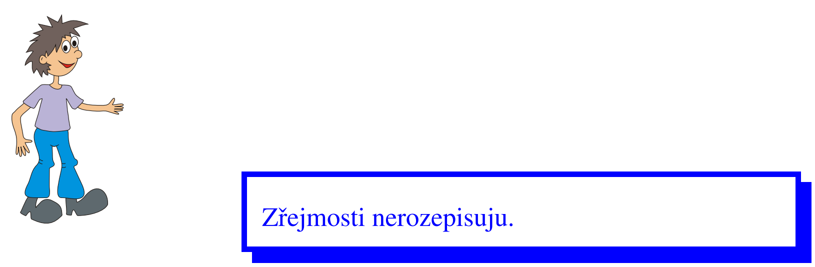
Učení 3:
Konec učení 3.

Učení 4:
Konec učení 4.

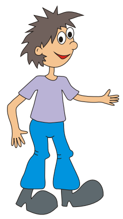
Učení 5:
Konec učení 5.

Učení 6:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x^2} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^0-1}{x^2} = 0$$



$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\sin x} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}(1+0)^0 = 1$$



Vím.

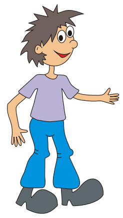
Neví a neví že neví.

$$(1-\cos x)\ \text{je omezená a}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\to 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Samozřejmě.

Samozřejmě, že ne, teda vlastně ano. Z nepravdy plyne všechno.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x^2} = 0$$



Známá limita.

ANO!!! Známá limita!!!!!!!!!

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+2^x}{3^x-2^x}\overset{?}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x3^{x-1}+x2^{x-1}}{x3^{x-1}-x2^{x-1}}\overset{?}{=}\dots\overset{?}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x!3+x!2}{x!3-x!2}=\frac{3+2}{3-2}$$

Výsledek je 5. S l'Hospitalem nejdál dojdeš.

Výsledek je za 5. Na l'Hospitala dojdeš.

$$\lim_{x\to\infty} \overbrace{\boxed{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}}^{\overset{\boxed{1}}{?}} \overbrace{\boxed{\frac{\sin x}{\sin 2x}}}^{\overset{\boxed{\frac{1}{2}}}{?}} \overbrace{\boxed{\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}}}^{\overset{\boxed{1}}{?}} \overbrace{\boxed{\frac{\log(1+x)}{x}}}^{\overset{\boxed{1}}{?}} \overset{?}{=} \frac{1}{2}$$

Počítá to samo.

A kde to vlastně jsme?

$$\lim_{x\to 0} \overbrace{\boxed{\frac{e^{x\sin\frac{1}{x}}-1}{x\sin\frac{1}{x}}}}^{\overset{\boxed{1}}{?}} \overset{?}{=} 1$$

Počítá to samo.

Předpoklady jsou pro koho?

Konec učení 6.

Konec kapitoly o limitách.