Limita funkce

V předchozí části o spojitosti funkcí byl probírán případ, kdy $\lim f(x_n)$ existovala a byla stejná pro všechny posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k bodu a.

Pokud $a \in \mathcal{D}(f)$ a $\lim f(x_n)$ se rovnala $f(a)$, byla funkce f v a spojitá. Pokud $a \in \mathcal{D}(f)$ a $\lim f(x_n)$ se nerovnala $f(a)$, měla f v a odstranitelnou nespojitost.

Důležitý je však i případ, kdy $a \notin \mathcal{D}(f)$. Pak lze funkci f v a dodefinovat hodnotou $\lim f(x_n)$ a dostane se funkce spojitá v a.

511

DEFINICE. Nechť a je hromadný bod definičního oboru funkce f.

Limita funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ se rovná $A \in \mathbb{R}^*$

(značení $\lim_{x \to a} f(x) = A$, nebo $f(x) \to A$ pro $x \to a$),

jestliže $\lim f(x_n) = A$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ konvergující k a.

Pokud se v definici limity berou jen posloupnosti $\{x_n\}$ s $x_n < a$ (nebo $x_n > a$) dostane se tzv. limita zleva (resp. limita zprava); značení $\lim_{x \to a_-} f(x)$ (resp. $\lim_{x \to a_+} f(x)$). Zapisujeme to přehledně $f(x+)$ (resp. $f(x-)$).

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $a \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě a právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.
3. V definici limity lze brát jen prosté posloupnosti nebo jen rostoucí a klesající posloupnosti $\{x_n\}$.
4. $\lim_{x \to a_+} f(x) = A$, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$ z definičního oboru f klesající k a a pro všechny takovéto posloupnosti je $\lim f(x_n) = A$. Podobně pro limity zleva.
5. $\lim_{x \to a} f(x) = A$ právě když $\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_-} f(x) = A$

VĚTA. Následující tvrzení jsou pro funkci f, hromadný bod a definičního oboru f a bod A ekvivalentní:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = A$;
2. Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu a takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f), x \neq a$.

Následující obrázky ilustrují jednotlivé případy možností čísel a, A:

Obdobou ε-δ charakterizace spojitosti pro různé kombinace vlastních či nevlastních čísel a, A jsou následující přepisy předchozí charakterizace (viz ilustrace v poznámkách):

Body a i A jsou vlastní. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jakmile $0 < |x - a| < \delta$.

Bod a vlastní, bod A nevlastní. Pro každé číslo K existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) > K$ pro $A = +\infty$ (resp. $f(x) < K$ pro $A = -\infty$), jakmile $0 < |x - a| < \delta$.

Bod a nevlastní, bod A vlastní. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo k tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jakmile $x > k$ pro $a = +\infty$ (resp. $x < k$ pro $a = -\infty$).

Body a i A jsou nevlastní. Pro každé číslo K existuje číslo k tak, že $f(x) > K$ pro $A = +\infty$ (resp. $f(x) < K$ pro $A = -\infty$), jakmile $x > k$ pro $a = +\infty$ (resp. $x < k$ pro $a = -\infty$).

Poznámky 2

Limita a konstrukce funkcí

V této části budou uvedena tvrzení pro limity aritmetických operaci a složení funkcí, analogické příslušným tvrzením o spojitosti.

VĚTA. Nechť a je hromadný bod definičních oborů funkce $f + g$. Pak platí (zkráceně je místo $\lim\limits_{x\to a}$ použito lim):

1. $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$, pokud má pravá strana smysl;
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$, pokud má pravá strana smysl;
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, pokud má pravá strana smysl;

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Tvrzení pro limity složených funkcí je složitější než odpovídající tvrzení o spojitosti.

VĚTA. Nechť f, g jsou funkce, a je hromadný bod $\mathcal{D}(f \circ g)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ a $\lim\limits_{y\to A} f(y) = \alpha$, pak

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \alpha$$

za předpokladu, že $g(x) \neq A$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí bodu a.

Většinou se limita složených funkcí používá ve speciálních případech popsaných v následujícím důsledku, kde není třeba ověřovat podmínku $g(x) \neq A$ (je přidán důležitý případ známý již z části o spojitosti).

DŮSLEDEK. Nechť a je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. Pak $\lim\limits_{x\to a} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{y\to A} f(y)$ pokud je

1. f spojitá v A nebo
2. A je nevlastní nebo
3. g je ryze monotónní v nějakém okolí bodu a.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Limita a uspořádání

Limita funkcí v určitém smyslu zachovává uspořádání a platí obdobná tvrzení jako pro limity posloupností.

Limity a vztah uspořádání

VĚTA. Mějme na množině J funkce f, g a a buď hromadný bod J.

1. Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, pak existuje okolí U bodu a takové, že $f(x) < g(x)$ pro všechna $x \in U \cap J, x \neq a$.

2. Jestliže existuje okolí U bodu a takové, že $f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in U \cap J, x \neq a$, pak $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$ (pokud existují).

DŮSLEDEK. Mějme funkce f, g, h na množině J, a buď hromadný bod J, U okolí a a pro $x \in J \cap U, x \neq a$ nechť $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Jestliže existují $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} h(x)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim_{x \to a} g(x)$ a rovná se oběma zbývajícím.

V případě $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ není nutné uvažovat funkci h, a podobně u limity $-\infty$ není nutné uvažovat funkci f.

DŮSLEDEK. Nechť $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu a. Pak $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Limita monotónních funkcí

Pro monotónní funkce je situace jednodušší, podobně jako u monotónních posloupností, protože tam některé limity vždy existují.

VĚTA. Monotónní funkce má jednostrannou limitu v každém bodě, kde to má smysl, a to

1. pro neklesající funkci f na intervalu J je

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \inf\{f(y) : y > a, y \in J\}\,, \lim_{x \to a_-} f(x) = \sup\{f(y) : y < a, y \in J\}\,,$$

2. pro nerostoucí funkci je

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \sup\{f(y) : y > a, y \in J\}\,, \lim_{x \to a_-} f(x) = \inf\{f(y) : y < a, y \in J\}$$

(ve všech případech pokud mají smysl levé strany).

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6 6 6

Konec kapitoly o limitách.