

# Derivace funkce

Derivace je jedním z hlavních nástrojů matematické analýzy. V příští části ukážeme, jak mnoho různorodých aplikací derivace má.



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Derivace funkce

Derivace je jedním z hlavních nástrojů matematické analýzy. V příští části ukážeme, jak mnoho různorodých aplikací derivace má.



Tato část je věnována základním vlastnostem derivace a jejím výpočtům.



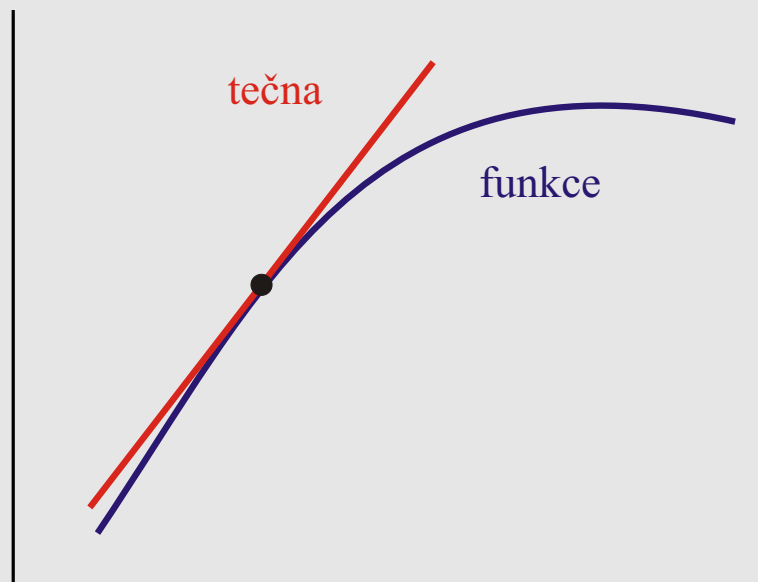
**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky lze derivaci funkce v nějakém bodě chápat jako směrnici tečny grafu této funkce v daném bodě.



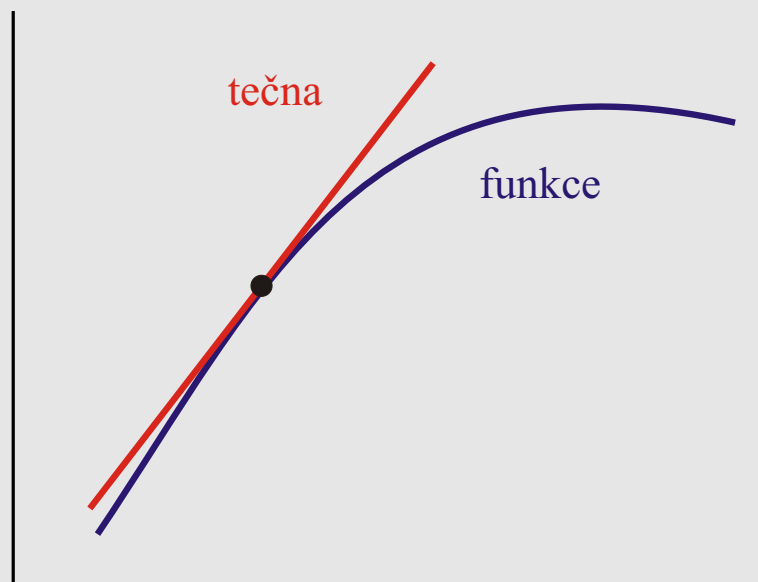
- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky lze derivaci funkce v nějakém bodě chápat jako směrnici tečny grafu této funkce v daném bodě.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky lze derivaci funkce v nějakém bodě chápat jako směrnici tečny grafu této funkce v daném bodě.



Tečna jako přímka je grafem nejjednodušší funkce, tzv. lineární funkce a do jisté míry aproximuje funkci v nejbližším okolí bodu dotyku.



#### LEKCE07-DER

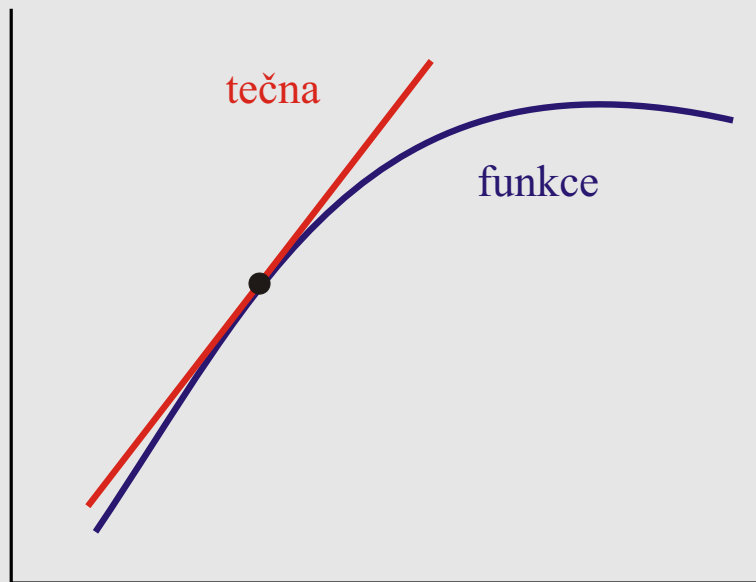
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z této představy asi už lze poznat proč se derivace tolik používají.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

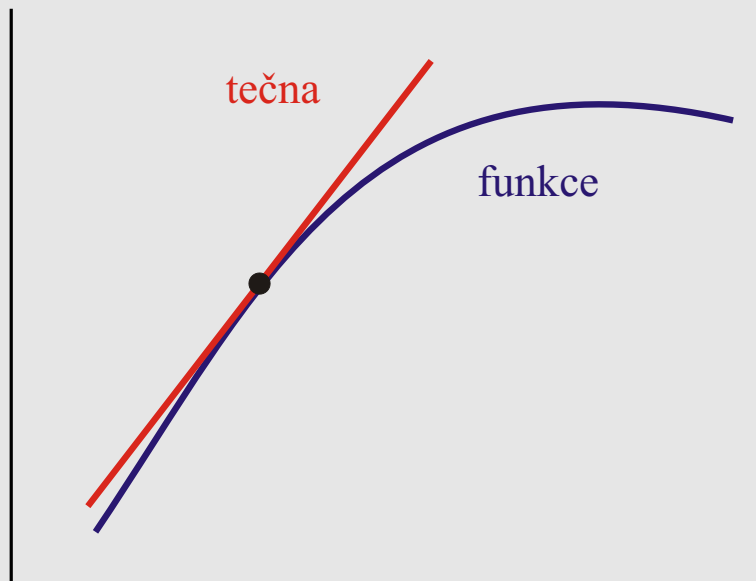
Z této představy asi už lze poznat proč se derivace tolik používají.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z této představy asi už lze poznat proč se derivace tolik používají.



Jde tedy v podstatě o lineární aproximaci funkce.

## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9





## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ještě že se nechtějí kvadratické aproximace.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ještě že se nechtějí kvadratické aproximace.



Na aproximace vyšších řádů si počkáme do další kapitoly.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definice bude uvedena v obecném tvaru a derivace funkce  $f$  bude definována v hromadných bodech  $\mathcal{D}(f)$ , které do  $\mathcal{D}(f)$  náleží.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Definice bude uvedena v obecném tvaru a derivace funkce  $f$  bude definována v hromadných bodech  $\mathcal{D}(f)$ , které do  $\mathcal{D}(f)$  náleží.



Největší použití v dalších částech bude ovšem případ, kdy definiční obor  $f$  je interval a definice derivace má tedy smysl v každém jeho bodu (každý bod intervalu je jeho hromadným bodem).



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DEFINICE.** Necht'  $c$  je hromadný bod definičního oboru funkce  $f$ . Jestliže existuje

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

označíme ji  $f'(c)$  a nazveme **derivací** funkce  $f$  v bodě  $c$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DEFINICE.** Necht'  $c$  je hromadný bod definičního oboru funkce  $f$ . Jestliže existuje

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

označíme ji  $f'(c)$  a nazveme **derivací** funkce  $f$  v bodě  $c$ .



Definiční obor derivace  $f'$  je  $\{c \in \mathcal{D}(f); f'(c) \in \mathbb{R}\}$  a je tedy vždy částí definičního oboru funkce  $f$  (i když se funkce  $f'$  dá rozšířit na větší množinu).



#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

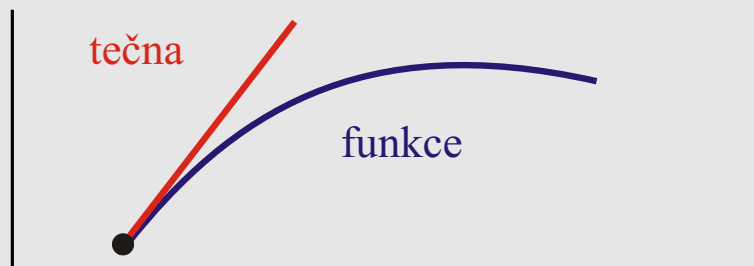
Vezmeme-li v definici  $f'(c)$  limitu zprava (resp. zleva), dostaneme **derivaci zprava**  $f'_+(c)$  (resp. **derivaci zleva**  $f'_-(c)$ ).



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

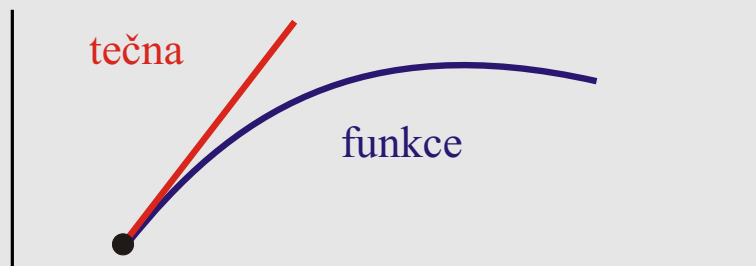


Vezmeme-li v definici  $f'(c)$  limitu zprava (resp. zleva), dostaneme **derivaci zprava**  $f'_+(c)$  (resp. **derivaci zleva**  $f'_-(c)$ ).



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vezmeme-li v definici  $f'(c)$  limitu zprava (resp. zleva), dostaneme **derivaci zprava**  $f'_+(c)$  (resp. **derivaci zleva**  $f'_-(c)$ ).



Jednostranná derivace je jako jednostranná tečna.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o tečnu, bere se i „tečna" ve svislém směru.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

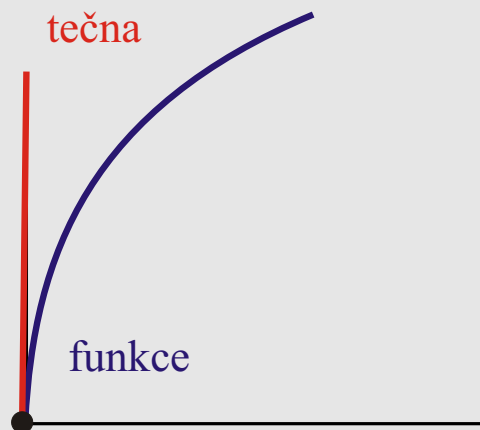
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

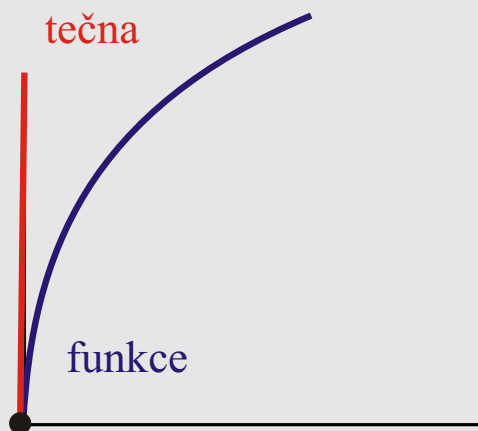
Jde o tečnu, bere se i „tečna" ve svislém směru.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o tečnu, bere se i „tečna“ ve svislém směru.



Derivace nemusí být konečná.

## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Značení derivací je více a každá volba má některé výhody a některé nevýhody: pro funkci  $y = f(x)$  se derivace  $y'$  v bodě  $c$  často značí jako symbol  $\frac{dy}{dx}(c)$  nebo  $\frac{df}{dx}(c)$ .



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Značení derivací je více a každá volba má některé výhody a některé nevýhody: pro funkci  $y = f(x)$  se derivace  $y'$  v bodě  $c$  často značí jako symbol  $\frac{dy}{dx}(c)$  nebo  $\frac{df}{dx}(c)$ .



U tohoto značení se pozná, která proměnná se derivuje, stejně tak u značení (používaného hlavně pro funkce více proměnných)  $f_x(c)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



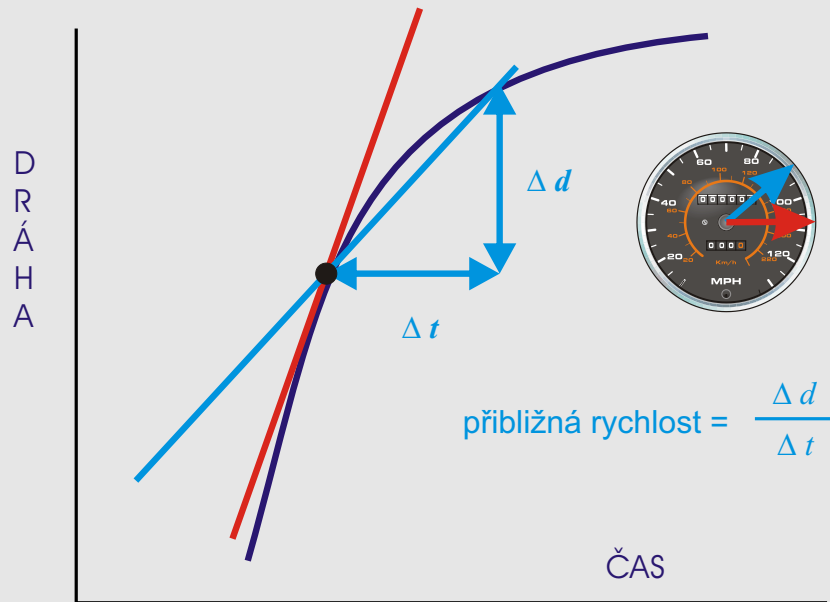
Koukejte se na to jednoduše. Derivace je prostě limita. Sice jiné funkce, ale to je jedno.



## LEKCE07-DER

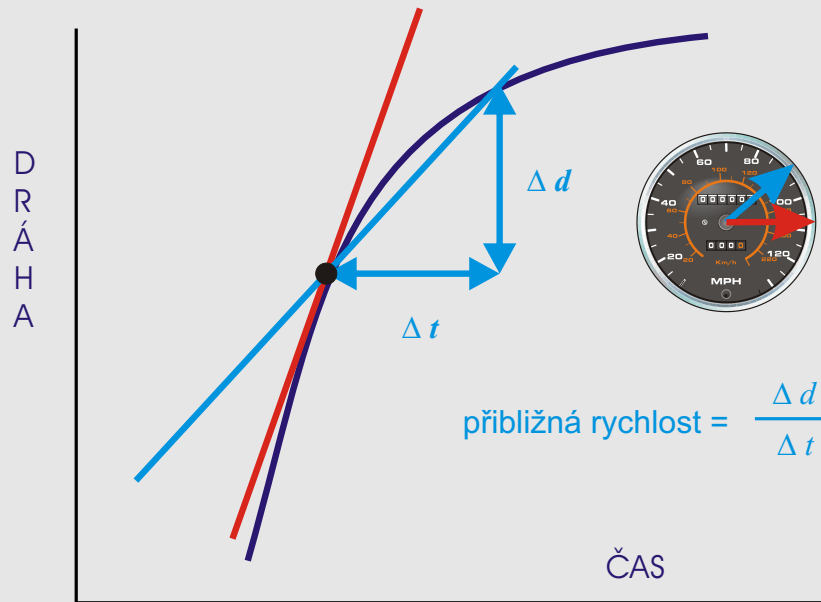
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

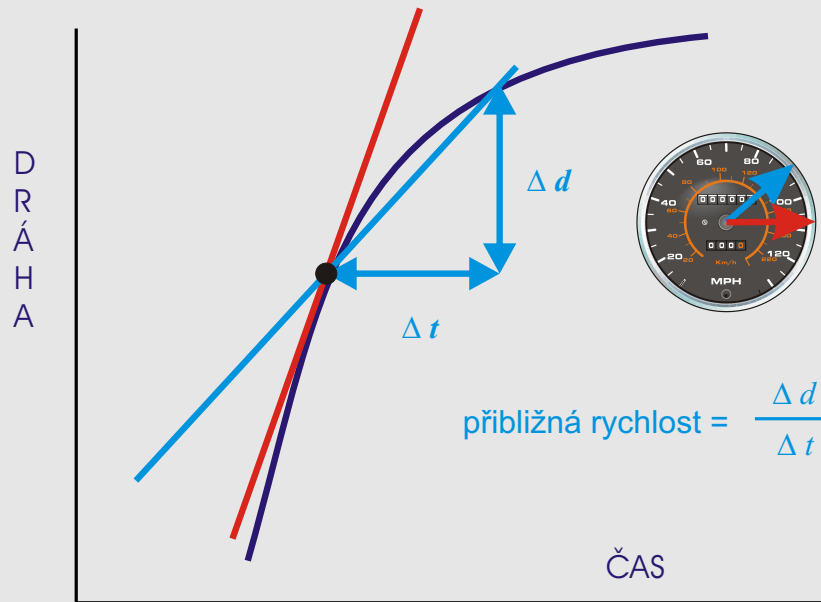


Ten zlomek v limitě pro derivaci odpovídá průměrné rychlosti, jak se funkce mění. Limitou získáme ,okamžitou rychlost".



### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
- polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ten zlomek v limitě pro derivaci odpovídá průměrné rychlosti, jak se funkce mění. Limitou získáme ,okamžitou rychlost".



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
- polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zase je tu jeden malý problémek. Při osové symetrii v rovině se bod  $P$  zobrazí na bod  $P'$ . Při derivování se funkce  $f$  zobrazí na funkci  $f'$ . Nejsem potíživista, ale nahlásit by se to mělo.

[Poznámky 1](#) [Příklady 1](#) [Otázky 1](#) [Učení 1](#)

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE A SPOJITOST



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE A SPOJITOST



Vlastní derivace je silná vlastnost. Plyne z ní spojitost.

## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

# DERIVACE A SPOJITOST



Vlastní derivace je silná vlastnost. Plyne z ní spojitost.



Smůla že ne naopak.

## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |



**VĚTA.** Má-li funkce v nějakém bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA.** Má-li funkce v nějakém bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.



**Důkaz.** Má-li funkce  $f$  v  $a$  derivaci, je  $a$  hromadným bodem  $\mathcal{D}(f)$ . Pokud  $f$  není v  $a$  spojitá, existuje ryze monotónní posloupnost  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  taková, že existuje  $\lim f(x_n) \neq f(a)$ , tj.,  $\lim(f(x_n) - f(a)) \neq 0$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Má-li funkce v nějakém bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.



**Důkaz.** Má-li funkce  $f$  v  $a$  derivaci, je  $a$  hromadným bodem  $\mathcal{D}(f)$ . Pokud  $f$  není v  $a$  spojitá, existuje ryze monotónní posloupnost  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  taková, že existuje  $\lim f(x_n) \neq f(a)$ , tj.,  $\lim(f(x_n) - f(a)) \neq 0$ .



Potom

$$\lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \text{ je nevlastní,}$$

a tedy derivace  $f$  v  $a$  nemůže být vlastní.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Má-li funkce v nějakém bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.



**Důkaz.** Má-li funkce  $f$  v  $a$  derivaci, je  $a$  hromadným bodem  $\mathcal{D}(f)$ . Pokud  $f$  není v  $a$  spojitá, existuje ryze monotónní posloupnost  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$  konvergující k  $a$  taková, že existuje  $\lim f(x_n) \neq f(a)$ , tj.,  $\lim(f(x_n) - f(a)) \neq 0$ .



Potom

$$\lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \text{ je nevlastní,}$$

a tedy derivace  $f$  v  $a$  nemůže být vlastní.



Cítíte taky ty vibrace. Ten důkaz je geniální !!!

**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

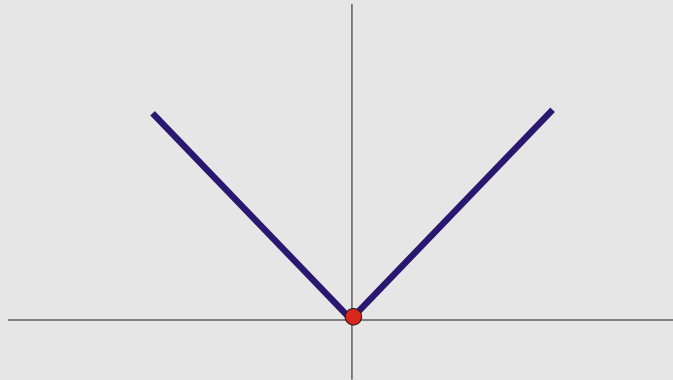


Podobně pro jednostrannou derivaci a jednostrannou spojitost. Jestliže má tedy funkce v nějakém bodě obě jednostranné derivace vlastní (mohou být různé), je v tomto bodě spojitá.



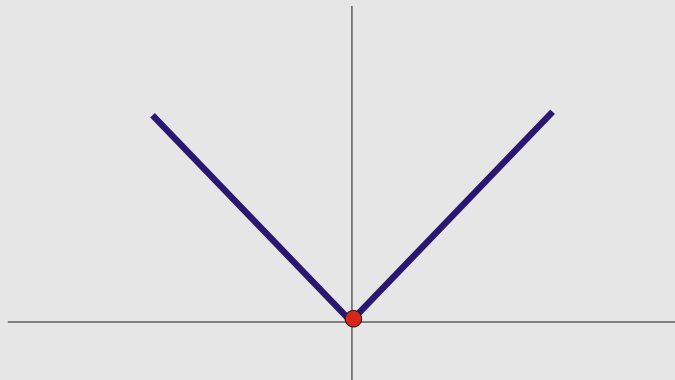
**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně pro jednostrannou derivaci a jednostrannou spojitost. Jestliže má tedy funkce v nějakém bodě obě jednostranné derivace vlastní (mohou být různé), je v tomto bodě spojitá.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně pro jednostrannou derivaci a jednostrannou spojitost. Jestliže má tedy funkce v nějakém bodě obě jednostranné derivace vlastní (mohou být různé), je v tomto bodě spojitá.

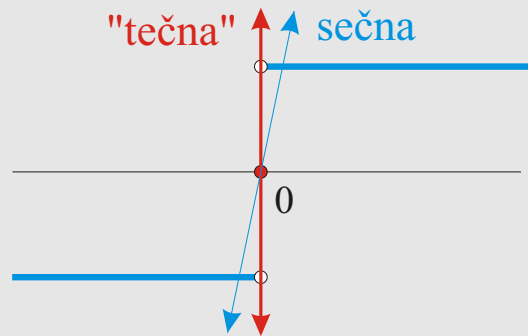


Spojité funkce nemusí mít derivaci.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

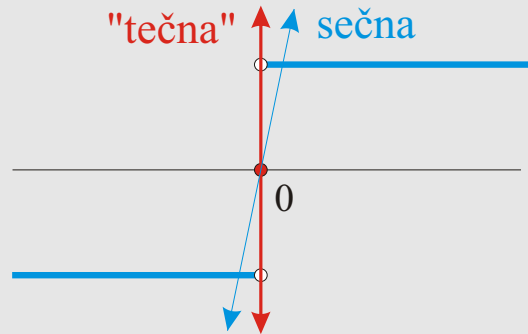
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nevlastní derivace nezaručuje spojitost. U funkce sign nejde o tečnu.

Poznámky 2 Příklady 2

## LEKCE07-DER

Derivace  
 definice  
 derivace  $\rightarrow$  spoj  
 konstrukce  
 derivace součtu...  
 složená funkce  
 inverze  
 derivace na intervalu

max  $\rightarrow$  der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



# DERIVACE A KONSTRUKCE FUNKCÍ



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE A KONSTRUKCE FUNKCÍ



Dozvíme se, jak se počítají derivace součtu a součinu, složené funkce a podobně.



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE A KONSTRUKCE FUNKCÍ



Dozvíme se, jak se počítají derivace součtu a součinu, složené funkce a podobně.



Jsou to jakési derivace v prášku. Místo počítání derivací jako limit si zvykneme na vzorečky. Moc se to bude hodit při výpočtech.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

# DERIVACE A KONSTRUKCE FUNKCÍ



Dozvíme se, jak se počítají derivace součtu a součinu, složené funkce a podobně.



Jsou to jakési derivace v prášku. Místo počítání derivací jako limit si zvykneme na vzorečky. Moc se to bude hodit při výpočtech.



Nevyskytují se tu konstrukce funkcí pomocí uspořádání (např. max) protože v takových případech nemusí derivace ani u jednoduchých funkcí existovat.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Aritmetické operace



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Aritmetické operace



**VĚTA.** Necht'  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  a necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivaci. Pak platí:



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Aritmetické operace



**VĚTA.** Necht'  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  a necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivaci. Pak platí:



$$1. (f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Aritmetické operace



**VĚTA.** Necht'  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  a necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivaci. Pak platí:



$$1. (f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$



$$2. (fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Aritmetické operace



**VĚTA.** Necht'  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  a necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivaci. Pak platí:



$$1. (f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$



$$2. (fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$



3. pro  $g(c) \neq 0$  je

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** 1. První rovnost se dostane přímým použitím **věty o limitě součtu funkcí**:

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** 1. První rovnost se dostane přímým použitím **věty o limitě součtu funkcí**:

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$



**Kouzelná jednoduchosti.**

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



2. Derivace součinu je o něco složitější a použije se [věta o limitě součtu i součinu](#):

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a)(f(x) - f(a)) + f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= g(a)f'(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Derivace součinu je o něco složitější a použije se [věta o limitě součtu i součinu](#):

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a)(f(x) - f(a)) + f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= g(a)f'(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$



V poslední rovnosti se využilo spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  (má tam vlastní derivaci).



#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Derivace součinu je o něco složitější a použije se **věta o limitě součtu i součinu**:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a)(f(x) - f(a)) + f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= g(a)f'(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$



V poslední rovnosti se využilo spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  (má tam vlastní derivaci).



Byl tam TRIK !!! Byl tam  
TRIK !!! Byl tam TRIK !!!  
Něco se přičetlo a odečetlo.

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



3. Postup při získání derivace podílu je stejný jako u jako derivace součinu:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a)f(x) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a)(f(x) - f(a)) - f(a)(g(x) - g(a))}{g(x)g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left( \lim_{x \rightarrow a} g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\
 &= \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.
 \end{aligned}$$



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Postup při získání derivace podílu je stejný jako u jako derivace součinu:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a)f(x) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a)(f(x) - f(a)) - f(a)(g(x) - g(a))}{g(x)g(a)}}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left( \lim_{x \rightarrow a} g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\
 &= \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.
 \end{aligned}$$



Opět bylo pro poslední rovnost použito skutečnosti, že  $g$  je spojitá v  $a$ .



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
- polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9





Použili jsme někde nějakou větu? ANO.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o součtu má jednoduchou geometrickou interpretaci.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

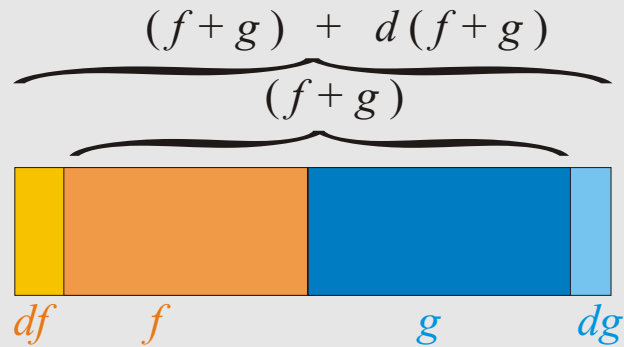
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

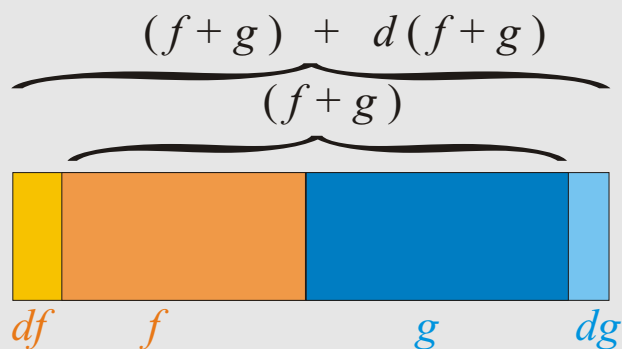
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o součtu má jednoduchou geometrickou interpretaci.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o součtu má jednoduchou geometrickou interpretaci.



Přírůstek plochy odpovídající součtu  $f$  a  $g$  je součtem přírůstků jednotlivých funkcí.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o součinu má jednoduchou geometrickou interpretaci.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

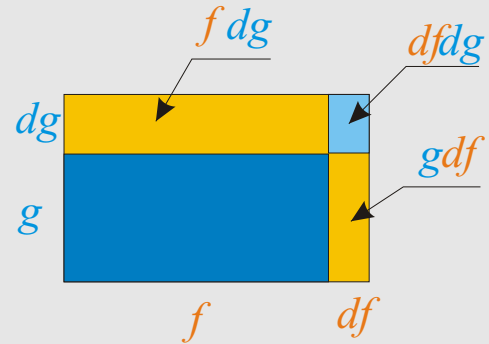
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

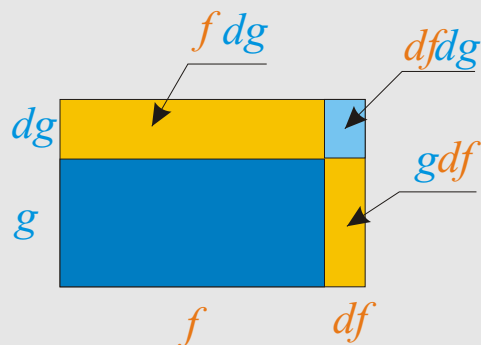
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o součinu má jednoduchou geometrickou interpretaci.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o součinu má jednoduchou geometrickou interpretaci.



Zvětšování plochy odpovídající  $f \cdot g$  dá vzniknout třem obdélníkům. Dva větší odpovídají vzorečku pro derivaci součinu, třetí je řádově menší a v limitě (jde o první řád) se ztratí.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivaci a  $p, q \in \mathbb{R}$ . Pak platí:

$$(pf)'(c) = pf'(c), \quad (f - g)'(c) = f'(c) - g'(c), \quad (pf + qg)'(c) = pf'(c) + qg'(c).$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**DŮSLEDEK.** Necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivaci a  $p, q \in \mathbb{R}$ . Pak platí:

$$(pf)'(c) = pf'(c), \quad (f - g)'(c) = f'(c) - g'(c), \quad (pf + qg)'(c) = pf'(c) + qg'(c).$$



Recepty do kuchařky.



#### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

**DŮSLEDEK.** Necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivaci a  $p, q \in \mathbb{R}$ . Pak platí:

$$(pf)'(c) = pf'(c), \quad (f - g)'(c) = f'(c) - g'(c), \quad (pf + qg)'(c) = pf'(c) + qg'(c).$$



Recepty do kuchařky.



Za jakoukoliv dobrou vůli  
předem děkuji.

Poznámky 3   Příklady 3   Otázky 3

#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Skládání



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Skládání



Vzorec pro derivaci složené funkce patří mezi nejužívanější vzorce při počítání derivací.



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Skládání



Vzorec pro derivaci složené funkce patří mezi nejužívanější vzorce při počítání derivací.



Vzorec je jednoduchý, ale při jeho používání u složitějších funkcí se musí dávat velký pozor !!!



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' funkce  $g$  má vlastní derivaci v bodě  $c$  a funkce  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $g(c)$ , kde  $c$  je hromadným bodem  $\mathcal{D}(f \circ g)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' funkce  $g$  má vlastní derivaci v bodě  $c$  a funkce  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $g(c)$ , kde  $c$  je hromadným bodem  $\mathcal{D}(f \circ g)$ .



Pak  $f \circ g$  má vlastní derivaci v bodě  $c$  a platí

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c).$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** Dokazuje se rovnost  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = f'(g(c)) g'(c)$ .



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Důkaz.** Dokazuje se rovnost  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = f'(g(c)) g'(c)$ .



Vezme se libovolná prostá posloupnost  $\{x_n\}$  z definičního oboru funkce  $f \circ g$  konvergující k  $c$ . Zvolí se taková její podposloupnost  $\{x_{k_n}\}$ , že buď  $g(x_{k_n}) \neq g(c)$  pro všechna  $n$  nebo  $g(x_{k_n}) = g(c)$  pro všechna  $n$  (potom  $g'(c) = 0$ ).



## LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**Důkaz.** Dokazuje se rovnost  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = f'(g(c)) g'(c)$ .



Vezme se libovolná prostá posloupnost  $\{x_n\}$  z definičního oboru funkce  $f \circ g$  konvergující k  $c$ . Zvolí se taková její podposloupnost  $\{x_{k_n}\}$ , že buď  $g(x_{k_n}) \neq g(c)$  pro všechna  $n$  nebo  $g(x_{k_n}) = g(c)$  pro všechna  $n$  (potom  $g'(c) = 0$ ).



V prvním případě je (pro jednoduchost se předpokládá  $k_n = n$ ):

$$\begin{aligned} \lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{x_n - c} &= \lim \left( \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{g(x_n) - g(c)} \frac{g(x_n) - g(c)}{x - c} \right) = \\ \lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{g(x_n) - g(c)} \lim \frac{g(x_n) - g(c)}{x_n - c} &= f'(g(c)) g'(c). \end{aligned}$$



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** Dokazuje se rovnost  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = f'(g(c)) g'(c)$ .



Vezme se libovolná prostá posloupnost  $\{x_n\}$  z definičního oboru funkce  $f \circ g$  konvergující k  $c$ . Zvolí se taková její podposloupnost  $\{x_{k_n}\}$ , že buď  $g(x_{k_n}) \neq g(c)$  pro všechna  $n$  nebo  $g(x_{k_n}) = g(c)$  pro všechna  $n$  (potom  $g'(c) = 0$ ).



V prvním případě je (pro jednoduchost se předpokládá  $k_n = n$ ):

$$\begin{aligned} \lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{x_n - c} &= \lim \left( \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{g(x_n) - g(c)} \frac{g(x_n) - g(c)}{x - c} \right) = \\ \lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{g(x_n) - g(c)} \lim \frac{g(x_n) - g(c)}{x_n - c} &= f'(g(c)) g'(c). \end{aligned}$$



Ve druhém případě je

$$\lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{x_n - c} = 0,$$

což je opět  $f'(g(c)) g'(c)$ . Podle 4. základní vlastnosti limity posloupnosti je důkaz dokončen.  $\diamond$



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Derivace liché (sudé) funkce je sudá (resp. lichá) funkce.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Derivace liché (sudé) funkce je sudá (resp. lichá) funkce.



Japato asi bude ...

Poznámky 4   Příklady 4   Otázky 4   Cvičení 4

#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Inverzní funkce



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## *Inverzní funkce*



Inverzní funkce k  $f$ , pokud existuje, je určena jednoznačně funkcí  $f$  a její vlastnosti lze popsat pomocí vlastností  $f$ .



### **LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Inverzní funkce



Inverzní funkce k  $f$ , pokud existuje, je určena jednoznačně funkcí  $f$  a její vlastnosti lze popsat pomocí vlastností  $f$ .



Zde to nebude jednoduché.



### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Inverzní funkce



Inverzní funkce k  $f$ , pokud existuje, je určena jednoznačně funkcí  $f$  a její vlastnosti lze popsat pomocí vlastností  $f$ .



Zde to nebude jednoduché.



Zde se dělá hodně chyb, a s tím nic nenaděláme.



### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

## Inverzní funkce



Inverzní funkce k  $f$ , pokud existuje, je určena jednoznačně funkcí  $f$  a její vlastnosti lze popsat pomocí vlastností  $f$ .



Zde to nebude jednoduché.



Zde se dělá hodně chyb, a s tím nic nenaděláme.



### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

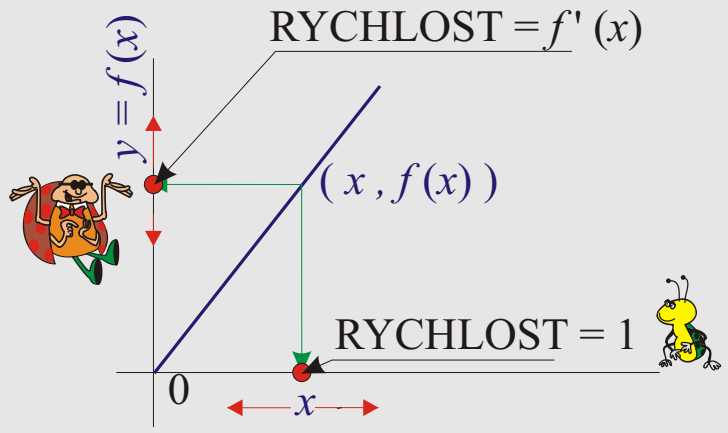


Moje oblíbená věta. Tady  
udělám chybu rád.



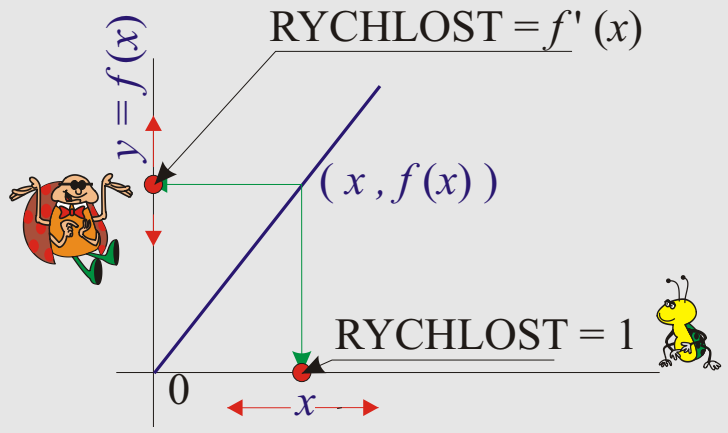
## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsi dvakrát rychlejší odpovídá derivaci 2. Jsi dvakrát pomalejší odpovídá derivaci  $1/2$ .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsi dvakrát rychlejší odpovídá derivaci 2. Jsi dvakrát pomalejší odpovídá derivaci  $1/2$ .



Následující tvrzení popisuje, jak lze i derivaci inverzní funkce k  $f$  vypočítat pomocí derivace funkce  $f$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' je funkce  $f$  spojitá a prostá na intervalu  $J$  a má na něm derivaci. Pak její inverzní funkce  $g$  má na  $f(J)$  derivaci

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

přičemž v případě  $f'(g(x)) = 0$  se chápe převrácená hodnota jako  $+\infty$  nebo  $-\infty$  podle toho, je-li  $f$  rostoucí nebo klesající.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA.** Necht' je funkce  $f$  spojitá a prostá na intervalu  $J$  a má na něm derivaci. Pak její inverzní funkce  $g$  má na  $f(J)$  derivaci

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

přičemž v případě  $f'(g(x)) = 0$  se chápe převrácená hodnota jako  $+\infty$  nebo  $-\infty$  podle toho, je-li  $f$  rostoucí nebo klesající.



**Důkaz.** Necht'  $a \in f(J)$  a  $\{y_n\}$  je ryze monotónní posloupnost v  $f(J)$  konvergující k  $a$ . Pro  $x_n = g(y_n)$ ,  $c = g(a)$  platí  $x_n \rightarrow c$  (proč?) tedy  $\lim \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c)$ . Potom je pro  $f'(c) \neq 0$

$$\lim \frac{g(y_n) - g(a)}{y_n - a} = \lim \frac{x_n - c}{f(x_n) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(a))}.$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' je funkce  $f$  spojitá a prostá na intervalu  $J$  a má na něm derivaci. Pak její inverzní funkce  $g$  má na  $f(J)$  derivaci

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

přičemž v případě  $f'(g(x)) = 0$  se chápe převrácená hodnota jako  $+\infty$  nebo  $-\infty$  podle toho, je-li  $f$  rostoucí nebo klesající.



**Důkaz.** Necht'  $a \in f(J)$  a  $\{y_n\}$  je ryze monotónní posloupnost v  $f(J)$  konvergující k  $a$ . Pro  $x_n = g(y_n)$ ,  $c = g(a)$  platí  $x_n \rightarrow c$  (proč?) tedy  $\lim \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c)$ . Potom je pro  $f'(c) \neq 0$

$$\lim \frac{g(y_n) - g(a)}{y_n - a} = \lim \frac{x_n - c}{f(x_n) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(a))}.$$



Protože  $f$  je ryze monotónní, jsou i posloupnosti uvedených zlomků ryze monotónní. Proto v případě  $f'(c) = 0$  konvergují uvedené zlomky k  $+\infty$ , je-li  $f$  rostoucí a k  $-\infty$ , je-li  $f$  klesající.  $\diamond$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' je funkce  $f$  spojitá a prostá na intervalu  $J$  a má na něm derivaci. Pak její inverzní funkce  $g$  má na  $f(J)$  derivaci

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

přičemž v případě  $f'(g(x)) = 0$  se chápe převrácená hodnota jako  $+\infty$  nebo  $-\infty$  podle toho, je-li  $f$  rostoucí nebo klesající.



**Důkaz.** Necht'  $a \in f(J)$  a  $\{y_n\}$  je ryze monotónní posloupnost v  $f(J)$  konvergující k  $a$ . Pro  $x_n = g(y_n)$ ,  $c = g(a)$  platí  $x_n \rightarrow c$  (proč?) tedy  $\lim \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c)$ . Potom je pro  $f'(c) \neq 0$

$$\lim \frac{g(y_n) - g(a)}{y_n - a} = \lim \frac{x_n - c}{f(x_n) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(a))}.$$



Protože  $f$  je ryze monotónní, jsou i posloupnosti uvedených zlomků ryze monotónní. Proto v případě  $f'(c) = 0$  konvergují uvedené zlomky k  $+\infty$ , je-li  $f$  rostoucí a k  $-\infty$ , je-li  $f$  klesající.  $\diamond$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To, že má inverzní funkce derivaci  $1/f'$  je samozřejmé. Problém je, když se má napsat v kterém bodě a nemůže se přitom ukazovat prstem na obrázek.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To, že má inverzní funkce derivaci  $1/f'$  je samozřejmé. Problém je, když se má napsat v kterém bodě a nemůže se přitom ukazovat prstem na obrázek.



Ukazovat prstem se nemá.

Poznámky 5   Příklady 5   Otázky 5   Cvičení 5

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU



Má-li funkce vlastní derivaci v každém bodě nějakého intervalu, vyplývají z toho pro funkci a pro její derivaci některé důležité vlastnosti.



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU



Má-li funkce vlastní derivaci v každém bodě nějakého intervalu, vyplývají z toho pro funkci a pro její derivaci některé důležité vlastnosti.



První vlastnost (tzv. Darbouxova vlastnost) derivace o zobrazování intervalu je obdobná vlastnosti spojitých funkcí (**Bolzanova věta**); zde však nebude třeba předpokládat, že derivace je spojitá.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



# DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU



Má-li funkce vlastní derivaci v každém bodě nějakého intervalu, vyplývají z toho pro funkci a pro její derivaci některé důležité vlastnosti.



První vlastnost (tzv. Darbouxova vlastnost) derivace o zobrazování intervalu je obdobná vlastnosti spojitých funkcí (**Bolzanova věta**); zde však nebude třeba předpokládat, že derivace je spojitá.



Další vlastnost je i tzv. Rolleova věta o existenci bodu s nulovou derivací. Poslední dvě věty jsou tzv. *věty o střední hodnotě*, které se budou často používat.



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU



Má-li funkce vlastní derivaci v každém bodě nějakého intervalu, vyplývají z toho pro funkci a pro její derivaci některé důležité vlastnosti.



První vlastnost (tzv. Darbouxova vlastnost) derivace o zobrazování intervalu je obdobná vlastnosti spojitých funkcí (**Bolzanova věta**); zde však nebude třeba předpokládat, že derivace je spojitá.



Další vlastnost je i tzv. Rolleova věta o existenci bodu s nulovou derivací. Poslední dvě věty jsou tzv. *věty o střední hodnotě*, které se budou často používat.



Jsou to opravdu známé věty  
!!! První jsem se dozvěděl  
nedávno a tu druhou znám  
od kolíčky.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nejprve pomocnou větičku.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nejprve pomocnou větičku.



**LEMMA.** Necht' má funkce  $f$  v bodě  $c \in (a, b)$  maximální nebo minimální hodnotu na  $(a, b)$ . Jestliže  $f'(c)$  existuje, musí být rovna 0.



#### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



Nejprve pomocnou větičku.



**LEMMA.** Necht' má funkce  $f$  v bodě  $c \in (a, b)$  maximální nebo minimální hodnotu na  $(a, b)$ . Jestliže  $f'(c)$  existuje, musí být rovna 0.



**Důkaz.** Necht' např.  $f'(c) > 0$ . Pak podle věty o vztahu limity a uspořádání platí pro  $x \in U \setminus \{c\}$ , kde  $U$  je nějaké okolí bodu  $c$ , nerovnost  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$  a tedy je  $f(x) > f(c)$  pro  $x \in U, x > c$  a  $f(x) < f(c)$  pro  $x \in U, x < c$ . V bodě  $c$  tedy  $f$  nemá ani minimální ani maximální hodnotu na  $(a, b)$ .  $\diamond$



#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nejprve pomocnou větičku.



**LEMMA.** Necht' má funkce  $f$  v bodě  $c \in (a, b)$  maximální nebo minimální hodnotu na  $(a, b)$ . Jestliže  $f'(c)$  existuje, musí být rovna 0.



**Důkaz.** Necht' např.  $f'(c) > 0$ . Pak podle věty o vztahu limity a uspořádání platí pro  $x \in U \setminus \{c\}$ , kde  $U$  je nějaké okolí bodu  $c$ , nerovnost  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$  a tedy je  $f(x) > f(c)$  pro  $x \in U, x > c$  a  $f(x) < f(c)$  pro  $x \in U, x < c$ . V bodě  $c$  tedy  $f$  nemá ani minimální ani maximální hodnotu na  $(a, b)$ .  $\diamond$



#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To je můj dárek k Mezinárodnímu dni dětí.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' interval  $J$  je částí definičního oboru vlastní derivace funkce  $f$ . Pak  $f'(J)$  je buď bod nebo interval.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA.** Necht' interval  $J$  je částí definičního oboru vlastní derivace funkce  $f$ . Pak  $f'(J)$  je buď bod nebo interval.



**Důkaz.** Postup důkazu je podobný důkazu [Bolzanovy věty](#). ↓

#### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

**VĚTA.** Necht' interval  $J$  je částí definičního oboru vlastní derivace funkce  $f$ . Pak  $f'(J)$  je buď bod nebo interval.



**Důkaz.** Postup důkazu je podobný důkazu [Bolzanovy věty](#). ↓

Necht'  $p \in (f'(a), f'(b)) \subset \mathbb{R}$  pro nějaká  $a, b \in J$ . Nejdříve necht'  $p = 0$  a tedy  $f'(a) < 0, f'(b) > 0$ , např. pro  $a < b$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' interval  $J$  je částí definičního oboru vlastní derivace funkce  $f$ . Pak  $f'(J)$  je buď bod nebo interval.



**Důkaz.** Postup důkazu je podobný důkazu [Bolzanovy věty](#). ↓

Necht'  $p \in (f'(a), f'(b)) \subset \mathbb{R}$  pro nějaká  $a, b \in J$ . Nejdříve necht'  $p = 0$  a tedy  $f'(a) < 0, f'(b) > 0$ , např. pro  $a < b$ .



Protože  $f$  je spojitá (existuje vlastní derivace), podle [Weierstrassovy věty](#) o maximum a minimum spojitě funkce dosahuje na  $[a, b]$  nejmenší hodnoty, např. v bodě  $c$ . Je vidět, že  $c \in (a, b)$ , neboť kdyby např.  $c = a$ , pak (viz předchozí důkaz)  $f(x) < f(a) = f(c)$  pro blízká  $x > a$ . Podle předchozího lemmatu je  $f'(c) = 0 = p$ .



#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
- polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA.** Necht' interval  $J$  je částí definičního oboru vlastní derivace funkce  $f$ . Pak  $f'(J)$  je buď bod nebo interval.



**Důkaz.** Postup důkazu je podobný důkazu [Bolzanovy věty](#). ↓

Necht'  $p \in (f'(a), f'(b)) \subset \mathbb{R}$  pro nějaká  $a, b \in J$ . Nejdříve necht'  $p = 0$  a tedy  $f'(a) < 0, f'(b) > 0$ , např. pro  $a < b$ .



Protože  $f$  je spojitá (existuje vlastní derivace), podle [Weierstrassovy věty](#) o maximum a minimum spojitě funkce dosahuje na  $[a, b]$  nejmenší hodnoty, např. v bodě  $c$ . Je vidět, že  $c \in (a, b)$ , neboť kdyby např.  $c = a$ , pak (viz předchozí důkaz)  $f(x) < f(a) = f(c)$  pro blízká  $x > a$ . Podle předchozího lemmatu je  $f'(c) = 0 = p$ .



V obecném případě se položí  $g(x) = f(x) - px$ . Potom  $0 \in (g'(a), g'(b))$  a tedy podle předchozích úvah existuje  $c$  mezi  $a, b$  tak, že  $g'(c) = 0$  a tedy  $f'(c) = p$ . ◇



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
- polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Jestliže funkce  $f$  má vlastní derivaci na intervalu  $J$ , tak



#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Jestliže funkce  $f$  má vlastní derivaci na intervalu  $J$ , tak



1.  $f'$  nemá na  $J$  žádné skoky (tj., body nespojitosti derivace jsou body oscilace),



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Jestliže funkce  $f$  má vlastní derivaci na intervalu  $J$ , tak



1.  $f'$  nemá na  $J$  žádné skoky (tj., body nespojitosti derivace jsou body oscilace),



2. je-li  $f'$  monotónní, je spojitá.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.** Jestliže funkce  $f$  má vlastní derivaci na intervalu  $J$ , tak



1.  $f'$  nemá na  $J$  žádné skoky (tj., body nespojitosti derivace jsou body oscilace),



2. je-li  $f'$  monotónní, je spojitá.



**Důkaz.** První část tvrzení je zřejmá, druhá vyplývá z tvrzení, že **monotónní funkce bez skoků je spojitá.** ◇

Poznámky 6   Příklady 6   Otázky 6

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Věty o střední hodnotě

Následující větu lze chápat buď jako pomocné tvrzení pro další dvě věty (Lagrangeovu a Cauchyovu větu) anebo jako základní větu, z které obě další věty snadno vyplývají.



### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Věty o střední hodnotě

Následující větu lze chápat buď jako pomocné tvrzení pro další dvě věty (Lagrangeovu a Cauchyovu větu) anebo jako základní větu, z které obě další věty snadno vyplývají.



Geometricky obě následující věty říkají, že za daných podmínek vždy existuje tečna ke grafu funkce rovnoběžná se spojnicí krajních bodů.



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Věty o střední hodnotě

Následující větu lze chápat buď jako pomocné tvrzení pro další dvě věty (Lagrangeovu a Cauchyovu větu) anebo jako základní větu, z které obě další věty snadno vyplývají.



Geometricky obě následující věty říkají, že za daných podmínek vždy existuje tečna ke grafu funkce rovnoběžná se spojnicí krajních bodů.



Cauchyova věta pak nalézá vhodný bod pro dvě funkce současně. Jiný přístup k této větě umožní výpočet přírůstku funkce pomocí derivace.



Až to nastane, budete si přát,  
aby to nenastalo.



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**VĚTA. (Rolleova věta)** Necht' funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a má derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Jestliže  $f(a) = f(b)$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $f'(c) = 0$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

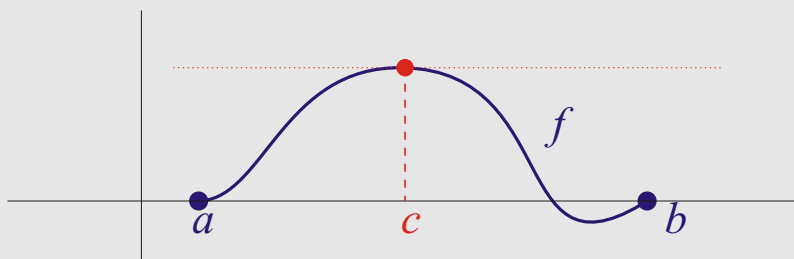
**VĚTA. (Rolleova věta)** Necht' funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a má derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Jestliže  $f(a) = f(b)$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $f'(c) = 0$ .



**Důkaz.** Podle **Weierstrassovy věty** dosahuje  $f$  na  $[a, b]$  své největší i nejmenší hodnoty. Není-li  $f$  konstantní (pak  $f'$  je nulová funkce a není co dokazovat), je jedna z těchto hodnot různá od  $f(a) = f(b)$ ; tedy je to hodnota v nějakém bodě  $c \in (a, b)$ . Podle **předchozího lemmatu** je  $f'(c) = 0$ .  $\diamond$

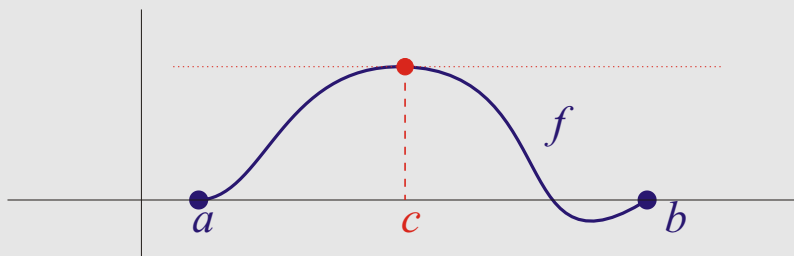


**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ten bod dotyku lehce najdeme.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA. (Lagrangeova věta)** Necht' funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a má derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**VĚTA. (Lagrangeova věta)** Necht' funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a má derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



**Důkaz.** Funkce

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

splňuje předpoklady **Rolleovy věty** a tedy existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $g'(c) = 0$ , tudíž  $f'(c)$  má hledanou hodnotu.  $\diamond$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA. (Lagrangeova věta)** Necht' funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a má derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



**Důkaz.** Funkce

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

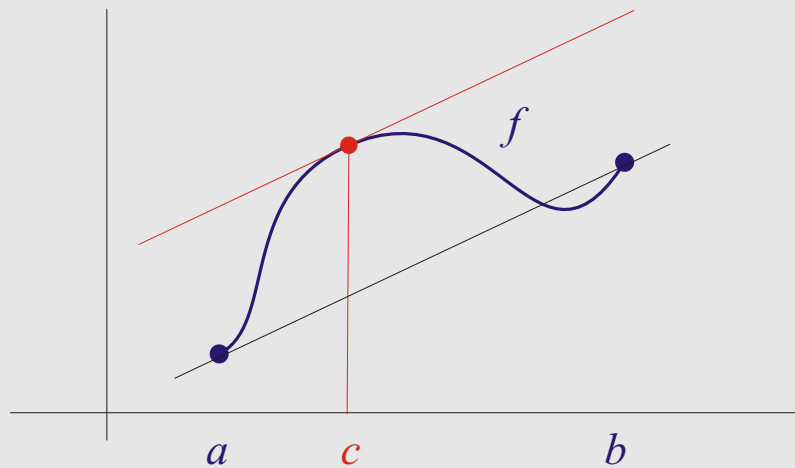
splňuje předpoklady **Rolleovy věty** a tedy existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $g'(c) = 0$ , tudíž  $f'(c)$  má hledanou hodnotu.  $\diamond$



V podstatě odečteme lineární funkci a převedeme na předchozí větu.

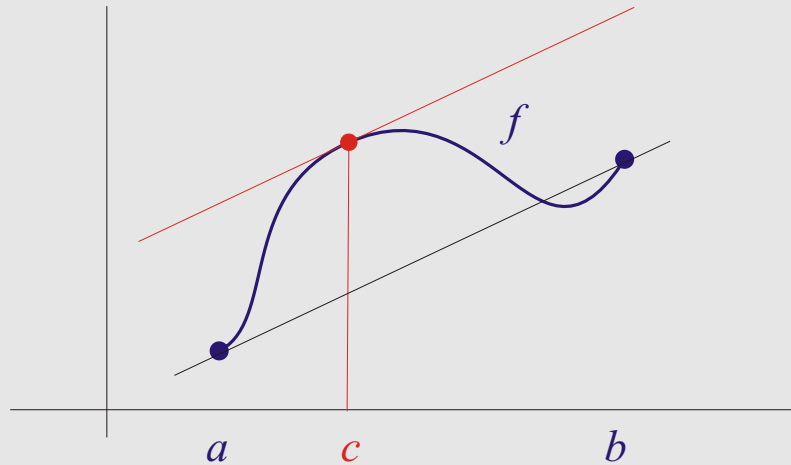
**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



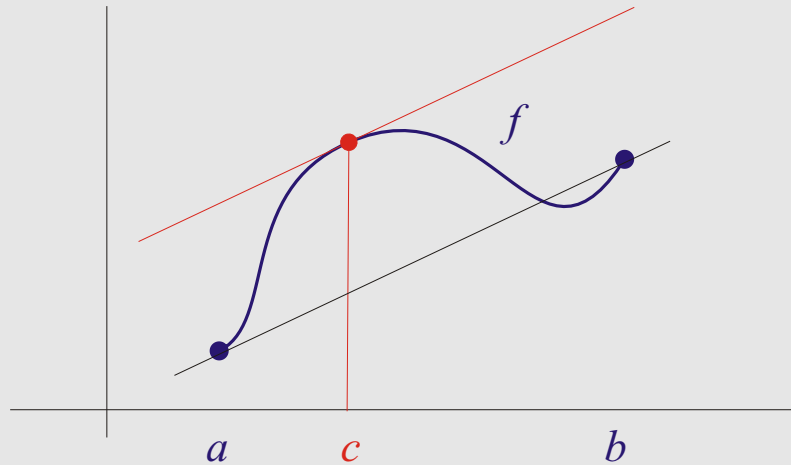
Není co řešit.

**DŮSLEDEK.** Jestliže má funkce na intervalu derivaci rovnu 0, je na tomto intervalu konstantní.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
- polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Není co řešit.

**DŮSLEDEK.** Jestliže má funkce na intervalu derivaci rovnu 0, je na tomto intervalu konstantní.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
- polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tak si tu klidně děláme ma-  
tiku a ono to opravdu vy-  
padá k světu. To tvrzení je  
opravdu silné.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK. (O jednostranné derivaci )** Necht' funkce  $f$  má derivaci na otevřeném intervalu  $(a, b)$  a je spojitá zprava v bodě  $a$ . Jestliže existuje  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x)$ , pak se rovná  $f'_+(a)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK. (O jednostranné derivaci )** Necht' funkce  $f$  má derivaci na otevřeném intervalu  $(a, b)$  a je spojitá zprava v bodě  $a$ . Jestliže existuje  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x)$ , pak se rovná  $f'_+(a)$ .



**Důkaz.** Necht'  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x) = A$ . Podle **Lagrangeovy věty** existuje pro každé  $x \in (a, b)$  bod  $c_x \in (a, x)$  tak, že  $f'(c_x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**DŮSLEDEK. (O jednostranné derivaci)** Necht' funkce  $f$  má derivaci na otevřeném intervalu  $(a, b)$  a je spojitá zprava v bodě  $a$ . Jestliže existuje  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x)$ , pak se rovná  $f'_+(a)$ .



**Důkaz.** Necht'  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x) = A$ . Podle **Lagrangeovy věty** existuje pro každé  $x \in (a, b)$  bod  $c_x \in (a, x)$  tak, že  $f'(c_x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$ .



Pro libovolnou posloupnost  $\{x_n\}$  v  $(a, b)$  konvergující k  $a$  konverguje i posloupnost  $\{c_{x_n}\}$  k  $a$ . Proto je

$$A = \lim f'(c_{x_n}) = \lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Protože  $\{x_n\}$  byla libovolná, je  $f'_+(a) = A$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takové použití Lagrangeovy věty potěší. Je doopravdu pěkné.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takové použití Lagrangeovy věty potěší. Je doopravdu pěkné.



Tak to je už opravdu matematika. Už vám v hospodě neporozumí a pivo s jednostrannou derivací nenalejou.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takové použití Lagrangeovy věty potěší. Je doopravdu pěkné.



Tak to je už opravdu matematika. Už vám v hospodě neporozumí a pivo s jednostrannou derivací nenalejou.



Teď se nadechněte a nedýchejte.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA. (Cauchyova věta)** Necht' funkce  $f, g$  jsou spojité na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a mají derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA. (Cauchyova věta)** Necht' funkce  $f, g$  jsou spojité na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a mají derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$



**Důkaz.** Funkce

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

splňuje předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $h'(c) = 0$ , což dává hledanou rovnost.  $\diamond$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA. (Cauchyova věta)** Necht' funkce  $f, g$  jsou spojité na uzavřeném omezeném intervalu  $[a, b]$  a mají derivaci všude v otevřeném intervalu  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$



**Důkaz.** Funkce

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

splňuje předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $h'(c) = 0$ , což dává hledanou rovnost.  $\diamond$



Zase jsme si nachystali jakousi pomocnou funkci, pro kterou jsme použili Rolleovu větu. Kde se ta pomocná funkce vzala, to je nedůležitá otázka. Asi to není triviální.

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9





Speciálně, když  $g'$  nenabývá hodnoty 0 v  $(a, b)$ , existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Speciálně, když  $g'$  nenabývá hodnoty 0 v  $(a, b)$ , existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



Pro  $g(x) = x$  jde zde o Lagrangeovu větu. Tedy je Cauchyova věta pouze jakousi deformací Lagrangeovy věty. Tu deformaci dělá derivovatelná funkce  $g$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

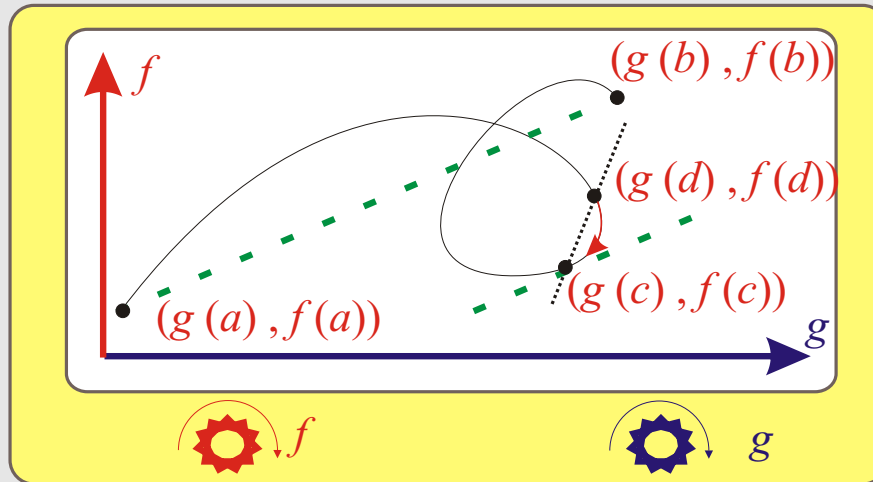
Při troše snahy uvidíme Cauchyovu větu v následujícím obrázku.



## LEKCE07-DER

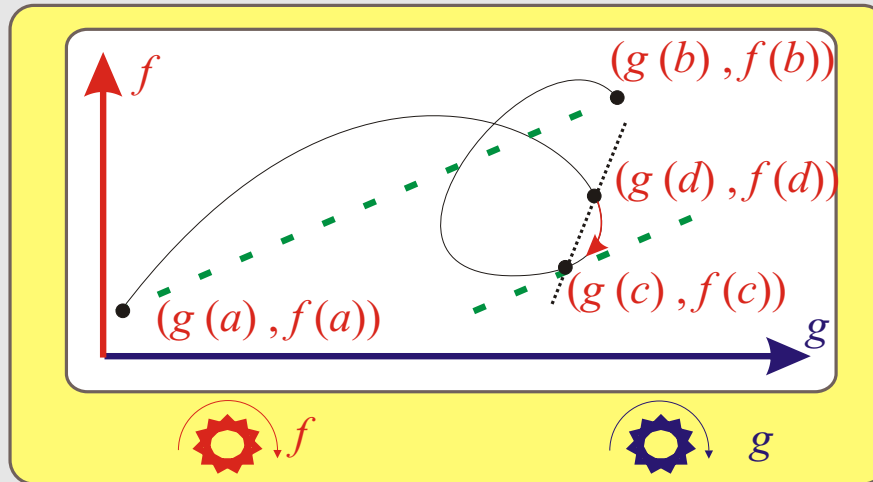
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při troše snahy uvidíme Cauchyovu větu v následujícím obrázku.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při troše snahy uvidíme Cauchyovu větu v následujícím obrázku.

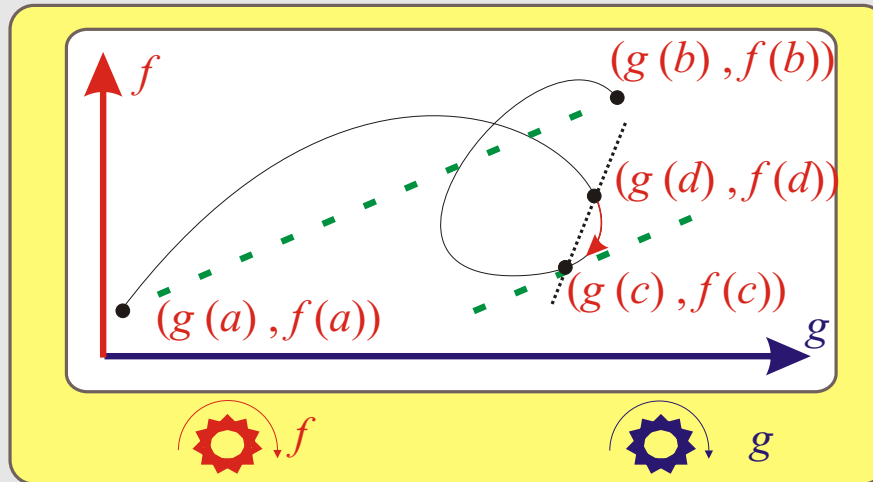


V hledaném bodě bude tečna ke křivce odpovídat spojnici krajních bodů. Mimochodem, ta klička tam nemá co dělat, pokud  $g$  bude monotónní.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace  $\rightarrow$  spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max  $\rightarrow$  der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Při troše snahy uvidíme Cauchyovu větu v následujícím obrázku.



V hledaném bodě bude tečna ke křivce odpovídat spojnici krajních bodů. Mimochodem, ta klička tam nemá co dělat, pokud  $g$  bude monotónní.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta věta vypadá tak nepoužitelná, že jsem si ji zařadil do sbírky kuriozit. Pak jsem se dozvěděl její důsledky, ale stejně nechápu, kdo, proč a jak jí vymyslel.



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta věta vypadá tak nepoužitelná, že jsem si ji zařadil do sbírky kuriozit. Pak jsem se dozvěděl její důsledky, ale stejně nechápu, kdo, proč a jak jí vymyslel.



Je to prostě Lagrangeova (Rolleova) věta s jakousi modifikační váhovou funkcí  $g$ . A náhodou to funguje.

Poznámky 7   Příklady 7   Otázky 7   Cvičení 7

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



# Derivace vyšších řádů



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Derivace vyšších řádů



Protože derivace  $f'$  funkce  $f$  je opět funkce, je možné vzít derivaci  $(f')'$  funkce  $f'$ .



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Derivace vyšších řádů



Protože derivace  $f'$  funkce  $f$  je opět funkce, je možné vzít derivaci  $(f')'$  funkce  $f'$ .



Dostane se tzv. druhá derivace funkce  $f$ , která se značí stručněji  $f''$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Derivace vyšších řádů



Protože derivace  $f'$  funkce  $f$  je opět funkce, je možné vzít derivaci  $(f')'$  funkce  $f'$ .



Dostane se tzv. druhá derivace funkce  $f$ , která se značí stručněji  $f''$ .



Můžeme definovat obecně:

**DEFINICE.** Pro  $n \in \mathbb{N}$  se definuje indukcí  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ , kde  $f^{(0)} = f$ . Funkce  $f^{(n)}$  se nazývá  $n$ -tá derivace funkce  $f$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak už bylo výše naznačeno, druhá derivace se místo  $f^{(2)}$  značí  $f''$  a podobně třetí derivace  $f'''$ . Pro čtvrtou derivaci jsou už 4 čárky méně vhodné.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Jak už bylo výše naznačeno, druhá derivace se místo  $f^{(2)}$  značí  $f''$  a podobně třetí derivace  $f'''$ . Pro čtvrtou derivaci jsou už 4 čárky méně vhodné.



Pokud se použije značení  $\frac{dy}{dx}$  pro derivaci, lze druhá derivace vyjádřit formálně pravidly pro úpravu zlomků

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Jak už bylo výše naznačeno, druhá derivace se místo  $f^{(2)}$  značí  $f''$  a podobně třetí derivace  $f'''$ . Pro čtvrtou derivaci jsou už 4 čárky méně vhodné.



Pokud se použije značení  $\frac{dy}{dx}$  pro derivaci, lze druhá derivace vyjádřit formálně pravidly pro úpravu zlomků

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$



Obecně se  $n$ -tá derivace značí  $\frac{d^n y}{dx^n}$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Pro derivace vyšších řádů lze samozřejmě použít odpovídající tvrzení pro derivace.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro derivace vyšších řádů lze samozřejmě použít odpovídající tvrzení pro derivace.



Např.

1. *existuje-li v bodě  $c$  vlastní derivace třetího řádu, je druhá derivace v  $c$  spojitá*

2.  $(f + g)^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + g^{(n)}(c)$ , *má-li pravá strana smysl.*



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Obdoba posledního tvrzení pro součiny už není zcela triviální a je nutné je dokázat (viz *Otázky*):



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obdoba posledního tvrzení pro součiny už není zcela triviální a je nutné je dokázat (viz *Otázky*):



**VĚTA.** Necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivace až do řádu  $n$  včetně. Pak platí

$$(f \cdot g)^{(n)}(c) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)}(c) g^{(n-i)}(c).$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obdoba posledního tvrzení pro součiny už není zcela triviální a je nutné je dokázat (viz *Otázky*):



**VĚTA.** Necht' funkce  $f, g$  mají v bodě  $c$  vlastní derivace až do řádu  $n$  včetně. Pak platí

$$(f \cdot g)^{(n)}(c) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)}(c) g^{(n-i)}(c).$$



Pro podíl jednoduchý vzorec neexistuje.

[Poznámky 8](#) [Příklady 8](#) [Otázky 8](#) [Cvičení 8](#)

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Implicitně a parametricky zadané funkce

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Implicitně zadané funkce



### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Implicitně zadané funkce



Implicitně zadaná funkce  $f$  se zpravidla zadává rovnicí ve tvaru  $F(x, y) = 0$ , kde  $F$  je funkce dvou proměnných a proměnná  $y = f(x)$  se chápe jako funkce proměnné  $x$ , pro které platí uvedená rovnost (tj., grafem funkce  $f$  je množina  $\{(x, y); F(x, y) = 0\}$ ).



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Implicitně zadané funkce



Implicitně zadaná funkce  $f$  se zpravidla zadává rovnicí ve tvaru  $F(x, y) = 0$ , kde  $F$  je funkce dvou proměnných a proměnná  $y = f(x)$  se chápe jako funkce proměnné  $x$ , pro které platí uvedená rovnost (tj., grafem funkce  $f$  je množina  $\{(x, y); F(x, y) = 0\}$ ).



Jak bylo uvedeno v části o [implicitně zadaných funkcích](#), takto zadaná implicitní funkce není obecně funkcí ve smyslu definice funkce. Nicméně bývá funkcí „po částech“ a velmi často se používá.



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



Definice implicitně zadané funkce už naznačuje, jak se bude derivovat. Pro začátek je vhodné psát proměnnou  $y$  ve tvaru, ze kterého je vidět, že je funkcí  $x$ , tj. např. jako  $y(x)$ .



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definice implicitně zadané funkce už naznačuje, jak se bude derivovat. Pro začátek je vhodné psát proměnnou  $y$  ve tvaru, ze kterého je vidět, že je funkcí  $x$ , tj. např. jako  $y(x)$ .



Rovnost  $F(x, y(x)) = 0$  se derivuje podle proměnné  $x$  pomocí věty o derivaci složené funkce. Např. pro rovnost  $x^2y^3 - \sin(xy) = 0$  je první derivace funkce  $y$  podle  $x$  vyjádřena vztahem:

$$(2x \cdot y^3(x) + x^2 \cdot 3y^2(x)y'(x)) - (\cos(x \cdot y(x)) \cdot (1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x))) = 0.$$



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definice implicitně zadané funkce už naznačuje, jak se bude derivovat. Pro začátek je vhodné psát proměnnou  $y$  ve tvaru, ze kterého je vidět, že je funkcí  $x$ , tj. např. jako  $y(x)$ .



Rovnost  $F(x, y(x)) = 0$  se derivuje podle proměnné  $x$  pomocí věty o derivaci složené funkce. Např. pro rovnost  $x^2y^3 - \sin(xy) = 0$  je první derivace funkce  $y$  podle  $x$  vyjádřena vztahem:

$$(2x \cdot y^3(x) + x^2 \cdot 3y^2(x)y'(x)) - (\cos(x \cdot y(x)) \cdot (1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x))) = 0.$$



Tedy mocnina  $y^3(x)$  má derivaci podle  $x$  rovnou derivaci vnější funkce (třetí mocnina) vynásobenou derivací vnitřní funkce (tj. derivací funkce  $y(x)$ , což je  $y'(x)$ ).



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definice implicitně zadané funkce už naznačuje, jak se bude derivovat. Pro začátek je vhodné psát proměnnou  $y$  ve tvaru, ze kterého je vidět, že je funkcí  $x$ , tj. např. jako  $y(x)$ .



Rovnost  $F(x, y(x)) = 0$  se derivuje podle proměnné  $x$  pomocí věty o derivaci složené funkce. Např. pro rovnost  $x^2y^3 - \sin(xy) = 0$  je první derivace funkce  $y$  podle  $x$  vyjádřena vztahem:

$$(2x \cdot y^3(x) + x^2 \cdot 3y^2(x)y'(x)) - (\cos(x \cdot y(x)) \cdot (1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x))) = 0.$$



Tedy mocnina  $y^3(x)$  má derivaci podle  $x$  rovnou derivaci vnější funkce (třetí mocnina) vynásobenou derivací vnitřní funkce (tj. derivací funkce  $y(x)$ , což je  $y'(x)$ ).



Z dosažené rovnosti (pokud vše v rovnosti má smysl, což v uvedeném příkladu má) lze vypočítat  $y'$  za předpokladu, že koeficient u  $y'$  není roven 0:

$$y' = \frac{y \cos(xy) - 2xy^3}{3x^2y^2 - x \cos(xy)},$$

pro  $3x^2y^2 - x \cos(xy) \neq 0$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obdobně se postupuje u derivací vyšších řádů. Např. u předchozího příkladu se druhá derivace dostane (už bez dodatečného označení proměnné  $x$  u  $y$ ) ze vztahu

$$2y^3 + 2 \cdot 2x \cdot 3y^2 y' + x^2 \cdot 6y(y')^2 + x^2 \cdot 3y^2 y'' + \sin(xy) \cdot ((y + xy')^2 - \cos(xy) \cdot (2y' + xy'')) = 0$$



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Obdobně se postupuje u derivací vyšších řádů. Např. u předchozího příkladu se druhá derivace dostane (už bez dodatečného označení proměnné  $x$  u  $y$ ) ze vztahu

$$2y^3 + 2 \cdot 2x \cdot 3y^2 y' + x^2 \cdot 6y(y')^2 + x^2 \cdot 3y^2 y'' + \sin(xy) \cdot ((y + xy')^2 - \cos(xy) \cdot (2y' + xy'')) = 0$$



Odtud lze opět vypočítat  $y''$ , protože má stejný koeficient jako byl v dřívější rovnosti u  $y'$ . Na pravé straně se bude vyskytovat  $y'$ ; pokud to vadí, lze za ní dosadit předchozí vypočtenou rovnost.



## LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Obdobně se postupuje u derivací vyšších řádů. Např. u předchozího příkladu se druhá derivace dostane (už bez dodatečného označení proměnné  $x$  u  $y$ ) ze vztahu

$$2y^3 + 2 \cdot 2x \cdot 3y^2 y' + x^2 \cdot 6y(y')^2 + x^2 \cdot 3y^2 y'' + \sin(xy) \cdot ((y + xy')^2 - \cos(xy) \cdot (2y' + xy'')) = 0$$



Odtud lze opět vypočítat  $y''$ , protože má stejný koeficient jako byl v dřívější rovnosti u  $y'$ . Na pravé straně se bude vyskytovat  $y'$ ; pokud to vadí, lze za ní dosadit předchozí vypočtenou rovnost.



Na nějakém intervalu platí identita  $F(x, y(x)) = 0$ , tedy jde o jakousi nulovou funkci, která má samozřejmě nulovou derivaci. Nic jiného v tom není.

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Parametricky zadané funkce



### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Parametricky zadané funkce



Parametricky zadaná funkce má tvar  $y = \varphi(t)$ ,  $x = \psi(t)$ , kde  $t$  probíhá nějakou zadanou množinu na reálné přímce (většinou interval).



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Parametricky zadané funkce



Parametricky zadaná funkce má tvar  $y = \varphi(t)$ ,  $x = \psi(t)$ , kde  $t$  probíhá nějakou zadanou množinu na reálné přímce (většinou interval).



Opět se chápe proměnná  $y$  jako funkce proměnné  $x$  prostřednictvím parametru  $t$ .



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Parametricky zadané funkce



**Parametricky zadaná funkce** má tvar  $y = \varphi(t)$ ,  $x = \psi(t)$ , kde  $t$  probíhá nějakou zadanou množinu na reálné přímce (většinou interval).



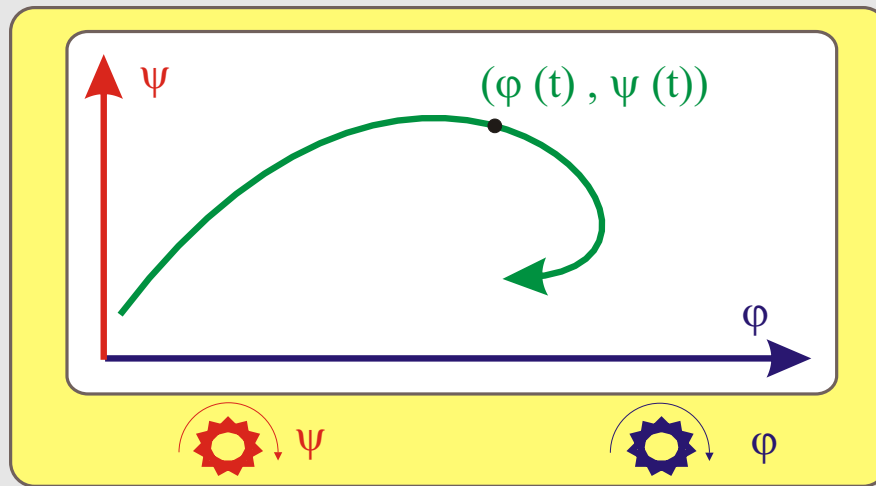
Opět se chápe proměnná  $y$  jako funkce proměnné  $x$  prostřednictvím parametru  $t$ .



Grafem je množina  $\{(x, y); \text{existuje } t \text{ tak, že } y = \varphi(t), x = \psi(t)\}$ . Obdobně jako u implicitně zadané funkce není takto zadaná funkce obecně funkcí ve smyslu definice funkce. Opět však bývá funkcí „po částech“ a opět se velmi často používá.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



## LEKCE07-DER

Derivace  
 definice  
 derivace->spoj  
 konstrukce  
 derivace součtu...  
 složená funkce  
 inverze  
 derivace na intervalu  
   max->der=0  
   Darboux  
   Rolle  
   Lagrange  
   Cauchy  
 vyšší derivace  
 implicitní funkce  
 param.funkce  
   polární souř.  
 Poznámky  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Příklady  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Otázky  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Cvičení  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 Učení  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže lze pro nějaký bod  $(x, y)$  grafu parametricky zadané funkce počítat derivaci, musí být  $x$  v nějakém svém okolí jednoznačně určeno parametrem  $t$ , tj., v tomto okolí existuje  $\psi^{-1}(x)$  a potom  $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$ .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže lze pro nějaký bod  $(x, y)$  grafu parametricky zadané funkce počítat derivaci, musí být  $x$  v nějakém svém okolí jednoznačně určeno parametrem  $t$ , tj., v tomto okolí existuje  $\psi^{-1}(x)$  a potom  $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$ .



Z tohoto vyjádření se snadno získá derivace podle vět o derivaci složené a inverzní funkce:

$$y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže lze pro nějaký bod  $(x, y)$  grafu parametricky zadané funkce počítat derivaci, musí být  $x$  v nějakém svém okolí jednoznačně určeno parametrem  $t$ , tj., v tomto okolí existuje  $\psi^{-1}(x)$  a potom  $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$ .



Z tohoto vyjádření se snadno získá derivace podle vět o derivaci složené a inverzní funkce:

$$y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$



Tento vzorec lze snadno zapamatovat při značení derivace zlomky (použitím úpravy složeného zlomku):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže lze pro nějaký bod  $(x, y)$  grafu parametricky zadané funkce počítat derivaci, musí být  $x$  v nějakém svém okolí jednoznačně určeno parametrem  $t$ , tj., v tomto okolí existuje  $\psi^{-1}(x)$  a potom  $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$ .



Z tohoto vyjádření se snadno získá derivace podle vět o derivaci složené a inverzní funkce:

$$y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$



Tento vzorec lze snadno zapamatovat při značení derivace zlomky (použitím úpravy složeného zlomku):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$



Dík.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejným způsobem se dostanou derivace vyšších řádů.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejným způsobem se dostanou derivace vyšších řádů.



Např. druhá derivace je derivace parametricky zadané funkce  $y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ ,  $x = \psi(t)$ ,  
takže

$$y'' = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^3(t)}.$$



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejným způsobem se dostanou derivace vyšších řádů.



Např. druhá derivace je derivace parametricky zadané funkce  $y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ ,  $x = \psi(t)$ , takže

$$y'' = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^3(t)}.$$



Je to kalkulus. Jsou to návody, jak zvládnout technicky náročné situace. Je za tím opravdová matematika, ale pro použití technik nás nesmí příliš zatěžovat.



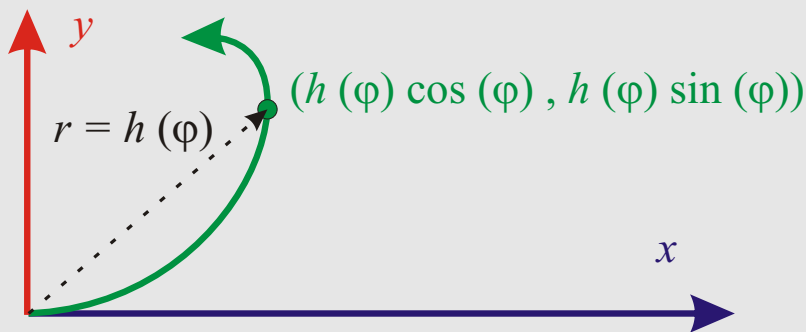
**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Polárně zadané funkce**  $r = h(\varphi)$ , kde  $h$  je nějaká funkce a proměnná  $\varphi$  probíhá nějakou podmnožinu reálných čísel (často interval  $[0, 2\pi)$ ) jsou speciálním případem parametricky zadaných funkcí neboť  $y = h(\varphi) \sin(\varphi)$ ,  $x = h(\varphi) \cos(\varphi)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Polárně zadané funkce**  $r = h(\varphi)$ , kde  $h$  je nějaká funkce a proměnná  $\varphi$  probíhá nějakou podmnožinu reálných čísel (často interval  $[0, 2\pi)$ ) jsou speciálním případem parametricky zadaných funkcí neboť  $y = h(\varphi) \sin(\varphi)$ ,  $x = h(\varphi) \cos(\varphi)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z předchozího vzorce pro derivaci parametricky zadané funkce vyplývá následující vzorec pro derivaci polárně zadané funkce:

$$y' = \frac{h'(\varphi) \sin \varphi + h(\varphi) \cos \varphi}{h'(\varphi) \cos \varphi - h(\varphi) \sin \varphi}.$$



## LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



Kde takové věci použít necháme na čtenáři.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Kde takové věci použít necháme na čtenáři.



To zařídím s radostí.

Poznámky 9 Příklady 9 Otázky 9 Cvičení 9

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.

Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



# POZNÁMKY

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 1 :

Derivace funkce  $f$  v bodě  $c$  existuje, jestliže  $c$  je hromadný bod  $\mathcal{D}(f)$  (aby měla smysl příslušná limita) a náleží do  $\mathcal{D}(f)$  (protože v limitním výrazu se vyskytuje hodnota  $f(c)$ ) a příslušná limita existuje (může být i nevlastní).



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Formálně jiné vyjádření derivace se získá položením  $x = c + h$  v definici derivace:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Formálně jiné vyjádření derivace se získá položením  $x = c + h$  v definici derivace:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$



Tento popis je vhodný při některých výpočtech (viz např. derivace funkce sinus v *Příkladech*).



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Derivace zprava (popř. zleva) v bodě  $c$  existuje právě když existuje derivace funkce  $f$  zúžené na množinu  $[c, +\infty) \cap \mathcal{D}(f)$  (popř.  $(-\infty, c] \cap \mathcal{D}(f)$ ).



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Derivace zprava (popř. zleva) v bodě  $c$  existuje právě když existuje derivace funkce  $f$  zúžené na množinu  $[c, +\infty) \cap \mathcal{D}(f)$  (popř.  $(-\infty, c] \cap \mathcal{D}(f)$ ).



Má-li  $f$  za definiční obor interval  $[c, b)$ , pak derivace  $f$  v  $c$  a derivace zprava  $f$  v  $c$  jsou totožné pojmy.



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Jestliže má v bodě  $c$  smysl mluvit o derivaci  $f$  zprava a zleva, pak  $f$  má v  $c$  derivaci právě když tam má derivaci zprava a derivaci zleva a obě tyto jednostranné derivace se rovnají.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



Jestliže má v bodě  $c$  smysl mluvit o derivaci  $f$  zprava a zleva, pak  $f$  má v  $c$  derivaci právě když tam má derivaci zprava a derivaci zleva a obě tyto jednostranné derivace se rovnají.



Jestliže má  $f$  v  $c$  derivaci, má v  $c$  aspoň jednu jednostrannou derivaci.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Jestliže má v bodě  $c$  smysl mluvit o derivaci  $f$  zprava a zleva, pak  $f$  má v  $c$  derivaci právě když tam má derivaci zprava a derivaci zleva a obě tyto jednostranné derivace se rovnají.



Jestliže má  $f$  v  $c$  derivaci, má v  $c$  aspoň jednu jednostrannou derivaci.



Jestliže je  $f$  v  $c$  spojitá a má v  $c$  obě jednostranné derivace, ale různé, říká se, že  $f$  má v  $c$  hrot (nebot' graf  $f$  má v  $c$  jakýsi zlom).



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Jestliže má v bodě  $c$  smysl mluvit o derivaci  $f$  zprava a zleva, pak  $f$  má v  $c$  derivaci právě když tam má derivaci zprava a derivaci zleva a obě tyto jednostranné derivace se rovnají.



Jestliže má  $f$  v  $c$  derivaci, má v  $c$  aspoň jednu jednostrannou derivaci.

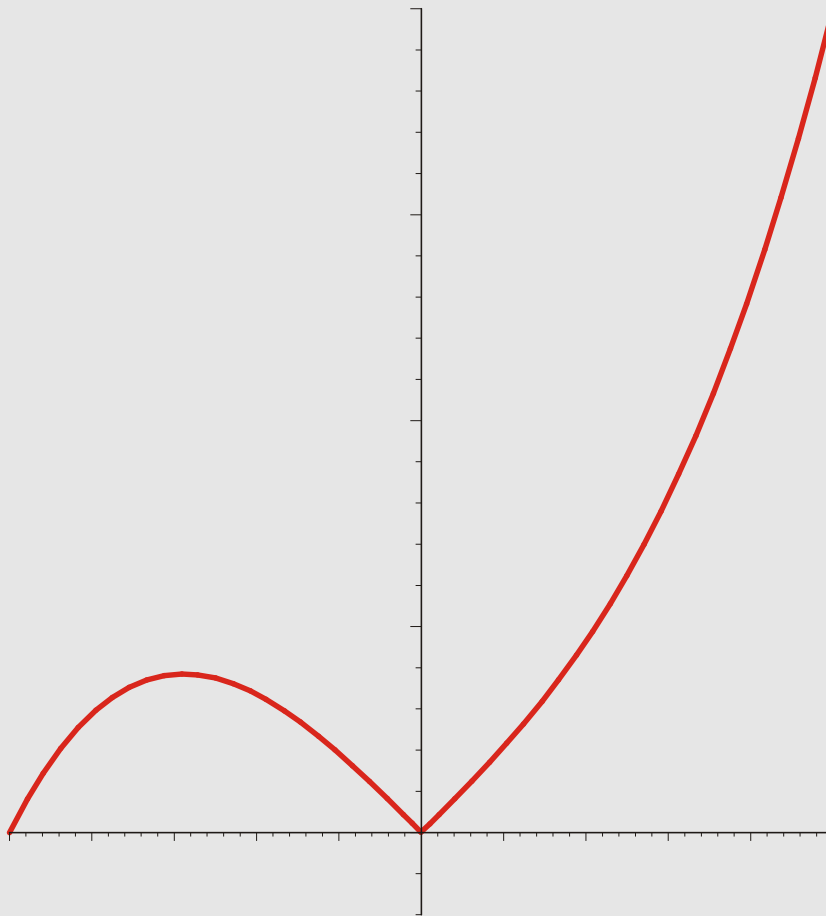


Jestliže je  $f$  v  $c$  spojitá a má v  $c$  obě jednostranné derivace, ale různé, říká se, že  $f$  má v  $c$  hrot (neboť graf  $f$  má v  $c$  jakýsi zlom).

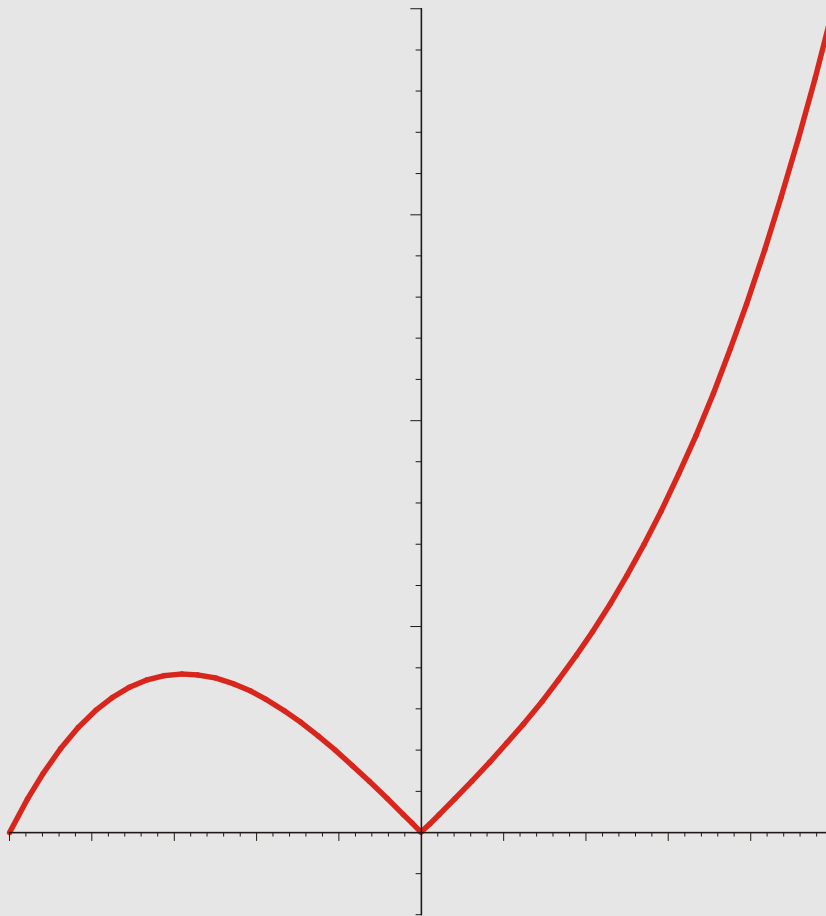


## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To je ve skutečnosti často bod, kde se napojují dvě funkce.



## LEKCE07-DER

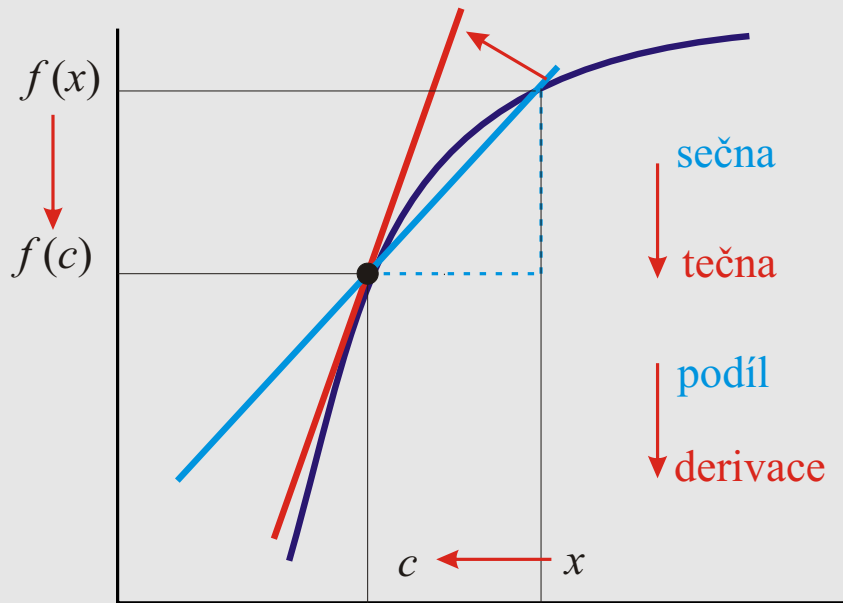
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Číslo  $(f(x) - f(c)) / (x - c)$  je směrnice přímky procházející body grafu  $(c, f(c)), (x, f(x))$  (tj. jakési sečny grafu).



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

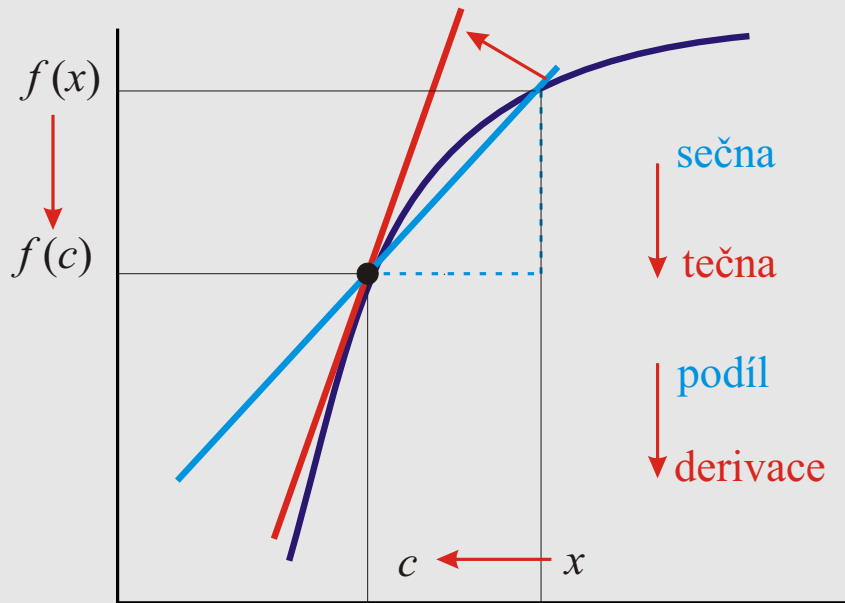
Číslo  $(f(x) - f(c)) / (x - c)$  je směrnice přímky procházející body grafu  $(c, f(c))$ ,  $(x, f(x))$  (tj. jakési sečny grafu).



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Číslo  $(f(x) - f(c)) / (x - c)$  je směrnice přímky procházející body grafu  $(c, f(c)), (x, f(x))$  (tj. jakési sečny grafu).



Jestliže se bod  $x$  přiblíží k bodu  $c$ , sečna se stane tečnou ke grafu  $f$  s bodem dotyku  $c$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z jiného pohledu znamená zlomek  $(f(x) - f(c))/(x - c)$  změnu (např., udává-li  $f$  ujetou vzdálenost, pak zlomek udává průměrnou rychlost od času  $c$  do času  $x$ ). Přejdem k limitě dostáváme hodnotu okamžité změny (okamžitá rychlost v čase  $c$ ).



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

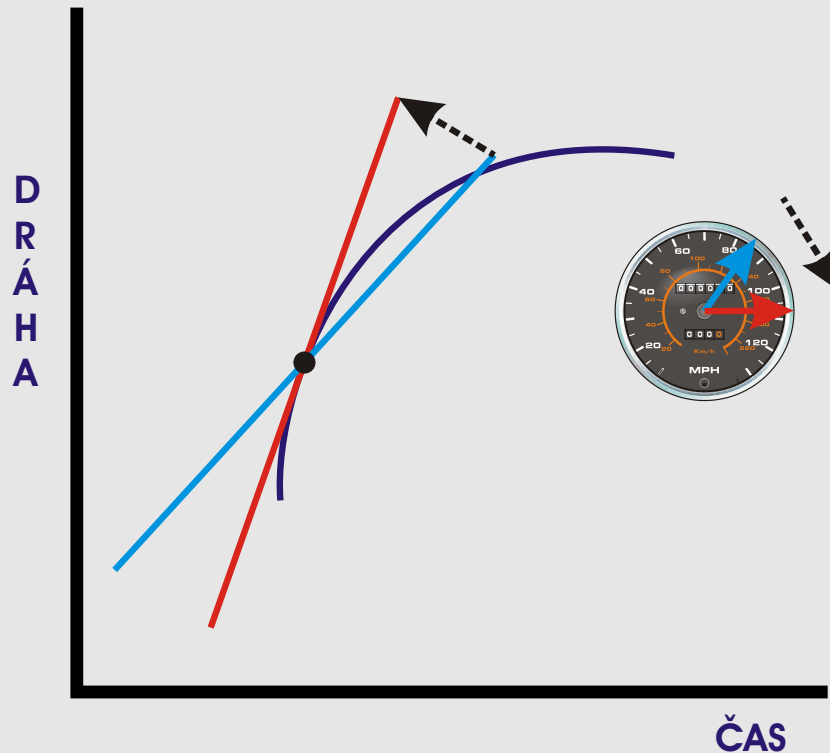
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z jiného pohledu znamená zlomek  $(f(x) - f(c))/(x - c)$  změnu (např., udává-li  $f$  ujetou vzdálenost, pak zlomek udává průměrnou rychlost od času  $c$  do času  $x$ ). Přejdem k limitě dostáváme hodnotu okamžité změny (okamžitá rychlost v čase  $c$ ).



Konec poznámek 1.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 2 :

Nejsou-li splněny předpoklady věty, mohou nastat všechny možné případy (viz *Příklady*).



### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Příklady spojitéch funkcí, které nemají v některém bodě derivaci, jsou poměrně jednoduché.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady spojitéch funkcí, které nemají v některém bodě derivaci, jsou poměrně jednoduché.



Trochu složitější jsou příklady funkcí, které nemají v některých bodech ani jednostranné derivace.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Příklady spojitéch funkcí, které nemají v některém bodě derivaci, jsou poměrně jednoduché.



Trochu složitější jsou příklady funkcí, které nemají v některých bodech ani jednostranné derivace.



Existují i spojité funkce na  $\mathbb{R}$ , které nemají derivaci ani v jednom bodě. Konstrukce těchto funkcí je složitá (pomocí limit posloupností funkcí nebo součtu nekonečných řad funkcí).

Konec poznámek 2.

|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Poznámky 3 :

Ve větě nelze vynechat předpoklad o existenci vlastních derivací obou funkcí v daném bodě a chápat platnost rovností za předpokladu, že jedna strana má smysl.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



## Poznámky 3 :

Ve větě nelze vynechat předpoklad o existenci vlastních derivací obou funkcí v daném bodě a chápat platnost rovností za předpokladu, že jedna strana má smysl.



Např. u derivace součtu stačí vzít  $g = -f$ , pak levá strana je nulová a pravá strana nemusí mít smysl (bud'  $f'(c)$  neexistuje nebo je nevlastní).



### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

## Poznámky 3 :

Ve větě nelze vynechat předpoklad o existenci vlastních derivací obou funkcí v daném bodě a chápat platnost rovností za předpokladu, že jedna strana má smysl.



Např. u derivace součtu stačí vzít  $g = -f$ , pak levá strana je nulová a pravá strana nemusí mít smysl (bud'  $f'(c)$  neexistuje nebo je nevlastní).



Podobně je tomu u dalších dvou rovností (najděte příklady). Větu však lze zobecnit pro nějaké případy nevlastních derivací, jestliže pravé strany budou mít smysl (viz *Otázky*).



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Poznámky 3 :

Ve větě nelze vynechat předpoklad o existenci vlastních derivací obou funkcí v daném bodě a chápat platnost rovností za předpokladu, že jedna strana má smysl.



Např. u derivace součtu stačí vzít  $g = -f$ , pak levá strana je nulová a pravá strana nemusí mít smysl (bud'  $f'(c)$  neexistuje nebo je nevlastní).



Podobně je tomu u dalších dvou rovností (najděte příklady). Větu však lze zobecnit pro nějaké případy nevlastních derivací, jestliže pravé strany budou mít smysl (viz *Otázky*).



Uvedené vzorce dávají návod, jak počítat derivace polynomů, racionálních funkcí (proměnné  $x$  i jiných proměnných, např. trigonometrických funkcí) – viz *Příklady*.

Konec poznámek 3.

- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 4 :

Vzorec pro derivaci složené funkce se dá snadno zapamatovat v následující formulaci (za předpokladu, že existují příslušné derivace):



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Poznámky 4 :

Vzorec pro derivaci složené funkce se dá snadno zapamatovat v následující formulaci (za předpokladu, že existují příslušné derivace):



Jestliže  $z = f(y)$ ,  $y = g(x)$ , pak

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} .$$



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Poznámky 4 :

Vzorec pro derivaci složené funkce se dá snadno zapamatovat v následující formulaci (za předpokladu, že existují příslušné derivace):



Jestliže  $z = f(y)$ ,  $y = g(x)$ , pak

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} .$$



Formálně se tedy jedná o  
krácení při součinu zlomků.



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Poznámky 4 :

Vzorec pro derivaci složené funkce se dá snadno zapamatovat v následující formulaci (za předpokladu, že existují příslušné derivace):



Jestliže  $z = f(y)$ ,  $y = g(x)$ , pak

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} .$$



Formálně se tedy jedná o  
krácení při součinu zlomků.



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



To je moje dílo. Sám nevím,  
jak mi to vyšlo.

Konec poznámek 4.

#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Poznámky 5 :

Použití věty o derivace inverzní funkce je jednoduché, jen je nutné dávat pozor na to, která proměnná je závislá a která nezávislá.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Poznámky 5 :

Použití věty o derivace inverzní funkce je jednoduché, jen je nutné dávat pozor na to, která proměnná je závislá a která nezávislá.



Např. funkce  $y = \sqrt{x}$  je inverzní k  $x = y^2$  na intervalu  $[0, +\infty)$ . Derivace funkce  $x = y^2$  je  $2y$ , její převrácená hodnota je  $\frac{1}{2y}$  a za  $y$  se musí dosadit původní funkce, takže výsledkem je  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  pro  $x \neq 0$ , což už bylo vypočteno přímo z definice derivace.



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Poznámky 5 :

Použití věty o derivace inverzní funkce je jednoduché, jen je nutné dávat pozor na to, která proměnná je závislá a která nezávislá.



Např. funkce  $y = \sqrt{x}$  je inverzní k  $x = y^2$  na intervalu  $[0, +\infty)$ . Derivace funkce  $x = y^2$  je  $2y$ , její převrácená hodnota je  $\frac{1}{2y}$  a za  $y$  se musí dosadit původní funkce, takže výsledkem je  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  pro  $x \neq 0$ , což už bylo vypočteno přímo z definice derivace.



Pro  $x = 0$  je podle věty hodnota derivace  $+\infty$ , a to také odpovídá dřívějšímu výpočtu.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Má-li spojitá funkce  $f$  na intervalu  $J$  inverzní funkci  $g$  (s definičním oborem  $f(J)$ ), je pro body  $x, y$  ekvivalentní  $y = f(x)$  s  $x = g(y)$ .



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Má-li spojitá funkce  $f$  na intervalu  $J$  inverzní funkci  $g$  (s definičním oborem  $f(J)$ ), je pro body  $x, y$  ekvivalentní  $y = f(x)$  s  $x = g(y)$ .



Pak vzorec o derivaci inverzní funkce lze psát pomocí „zlomků“:

$$g' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'}$$

Konec poznámek 5.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 6 :

Lemma je pro další použití velmi důležité, protože naznačuje, kde hledat maximální nebo minimální hodnoty funkce. Geometricky je to názorné: jestliže má funkce v bodě  $c$  např. maximální hodnotu, musí graf v tomto bodě měnit stoupání na klesání a tečna v tom bodě bude rovnoběžná s osou  $x$ .



### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Víme, že spojité funkce zobrazují interval na bod nebo na interval.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Víme, že spojité funkce zobrazují interval na bod nebo na interval.



Podle právě dokázané věty mají tutéž vlastnost funkce, které jsou derivacemi nějakých funkcí.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Víme, že spojité funkce zobrazují interval na bod nebo na interval.



Podle právě dokázané věty mají tutéž vlastnost funkce, které jsou derivacemi nějakých funkcí.



Na začátku části o integrálním počtu bude ukázáno, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu je derivací nějaké funkce.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Víme, že spojité funkce zobrazují interval na bod nebo na interval.



Podle právě dokázané věty mají tutéž vlastnost funkce, které jsou derivacemi nějakých funkcí.



Na začátku části o integrálním počtu bude ukázáno, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu je derivací nějaké funkce.



Obrácená implikace neplatí: existují funkce definované na nějakém intervalu, které mají nespojité derivace. Existují tedy na nějakém intervalu i nespojité funkce, které mají Darbouxovu vlastnost.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Víme, že spojité funkce zobrazují interval na bod nebo na interval.



Podle právě dokázané věty mají tutéž vlastnost funkce, které jsou derivacemi nějakých funkcí.



Na začátku části o integrálním počtu bude ukázáno, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu je derivací nějaké funkce.



Obrácená implikace neplatí: existují funkce definované na nějakém intervalu, které mají nespojité derivace. Existují tedy na nějakém intervalu i nespojité funkce, které mají Darbouxovu vlastnost.



Těžší je ukázat, že existují na nějakém intervalu funkce s Darbouxovou vlastností, které nejsou derivací žádné funkce. (Vzpomeňte na úvodní kapitulu o reálných funkcích, kde bylo řečeno, že existuje funkce na  $\mathbb{R}$ , která zobrazuje libovolný interval na celé  $\mathbb{R}$  – tato funkce tedy má Darbouxovu vlastnost a není derivací žádné funkce).

Konec poznámek 6.

|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Poznámky 7 :

Rolleova věta je důsledkem Lagrangeovy věty (pro případ, kdy  $f(a) = f(b)$ ) a Lagrangeova věta je důsledkem Cauchyovy věty (pro případ  $g(x) = x$ ).



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

V uvedených tvrzeních není nutné předpokládat, že existující derivace jsou vlastní.  
Např. ve druhém důsledku může být  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x) = +\infty$  a tedy  $f'_+(a) = +\infty$ .



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

První důsledek Lagrangeovy věty se zdá být triviální, ale přímý důkaz je vlastně obdobný postupu v uvedených důkazech. Tvrzení důsledku bude velmi důležité v integrálním počtu. Charakterizuje konstantní funkce na intervalu jako ty funkce, které tam mají nulovou derivaci.



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Druhý důsledek dává další možnost, jak počítat derivace v nějakých špatných bodech, např. v krajních bodech intervalů nebo v bodech, kde je funkce dodefinována jiným předpisem.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Důkaz Lagrangeovy věty spočíval v odečtení přímky rovnoběžné se spojnicí obou krajních bodů grafu, čímž se graf „narovnal“ do podoby potřebné v Rolleově větě.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Lagrangeova věta se nazývá větou o střední hodnotě, i když nalezený bod  $c$  nemusí ležet ve středu úsečky s krajními body  $a, b$ , ale pouze mezi těmito body.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Lagrangeova věta se nazývá větou o střední hodnotě, i když nalezený bod  $c$  nemusí ležet ve středu úsečky s krajními body  $a, b$ , ale pouze mezi těmito body.



I když více o bodu  $c$  není známo, přece jen slouží k odhadu přírůstku funkce, pokud je znám vhodný odhad derivace původní funkce. To je obsaženo v zápisu  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Lagrangeova věta se nazývá větou o střední hodnotě, i když nalezený bod  $c$  nemusí ležet ve středu úsečky s krajními body  $a, b$ , ale pouze mezi těmito body.



I když více o bodu  $c$  není známo, přece jen slouží k odhadu přírůstku funkce, pokud je znám vhodný odhad derivace původní funkce. To je obsaženo v zápisu  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .



Např. derivace sinus je cosinus a ten je v absolutní hodnotě nejvýše 1, takže pro libovolné dva body  $a, b$  platí  $|\sin a - \sin b| \leq |b - a|$ .



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Lagrangeova věta se nazývá větou o střední hodnotě, i když nalezený bod  $c$  nemusí ležet ve středu úsečky s krajními body  $a, b$ , ale pouze mezi těmito body.



I když více o bodu  $c$  není známo, přece jen slouží k odhadu přírůstku funkce, pokud je znám vhodný odhad derivace původní funkce. To je obsaženo v zápisu  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .



Např. derivace sinus je cosinus a ten je v absolutní hodnotě nejvýše 1, takže pro libovolné dva body  $a, b$  platí  $|\sin a - \sin b| \leq |b - a|$ .



Později bude Lagrangeova věta zobecněna pro vyšší derivace (viz Taylorova věta).



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V Cauchyově větě je podstatná existence společného bodu pro podíl dvou funkcí.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V Cauchyově větě je podstatná existence společného bodu pro podíl dvou funkcí.



Geometricky lze větu zhruba vyslovit tak, že podíl přírůstků dvou funkcí je roven podílu derivací těchto funkcí v nějakém bodě.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V Cauchyově větě je podstatná existence společného bodu pro podíl dvou funkcí.



Geometricky lze větu zhruba vyslovit tak, že podíl přírůstků dvou funkcí je roven podílu derivací těchto funkcí v nějakém bodě.



Existuje ještě interpretace pomocí derivace parametricky zadaných funkcí.

Konec poznámek 7.

#### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Poznámky 8 :

Pro čtvrtou a některé další derivace se občas používalo značení pomocí římských číslic, tj.  $f^{iv}$ ,  $f^v$ ,  $f^{vi}$ .



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ve vzorcích se výhodně používá rovnosti  $f^{(0)} = f$  – viz např. vzorec pro  $n$ -tou derivaci součinu.



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Je vhodné si uvědomit, že funkce  $f^{(n)}$  mají Darbouxovu vlastnost pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  (jak je to pro  $n = 0$ ?).

Konec poznámek 8.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Poznámky 9 :

Je vhodné si uvědomit, že implicitně nebo parametricky zadané funkce zahrnují i funkce a že popsané derivace se v tomto případě shodují s derivacemi funkcí (viz *Otázky*).



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

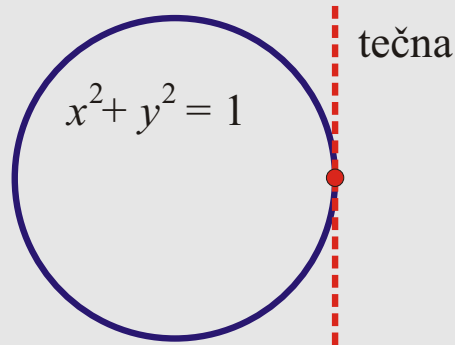
V bodech, kde je roven 0 koeficient u  $y'$  (u implicitně zadaných funkcí) nebo  $\psi'(t) = 0$  (u parametricky zadaných funkcí), bývá buď tečna ke grafu v příslušném bodě rovnoběžná s osou  $y$  jako například u kružnice v bodech průsečíku s osou  $x$ ,



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

V bodech, kde je roven 0 koeficient u  $y'$  (u implicitně zadaných funkcí) nebo  $\psi'(t) = 0$  (u parametricky zadaných funkcí), bývá buď tečna ke grafu v příslušném bodě rovnoběžná s osou  $y$  jako například u kružnice v bodech průsečíku s osou  $x$ ,



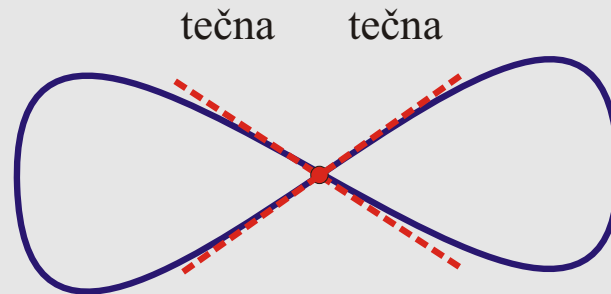
**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

nebo se v tom bodě protíná více větví grafu. Tato situace nastává např. u lemniskaty v počátku. Tečen je v příslušném bodě více.



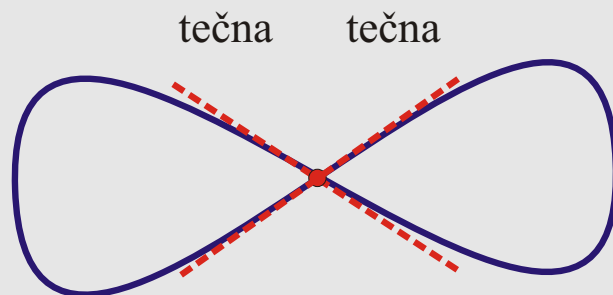
**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

nebo se v tom bodě protíná více větví grafu. Tato situace nastává např. u lemniskaty v počátku. Tečen je v příslušném bodě více.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

nebo se v tom bodě protíná více větví grafu. Tato situace nastává např. u lemniskaty v počátku. Tečen je v příslušném bodě více.



V obou případech to jsou body, v jejichž okolí nelze jednoznačně určit hodnotu  $y$ . Viz *Příklady*.

Konec poznámek 9.

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



# PŘÍKLADY

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 1 :

Přímo z definice lze vypočítat derivace některých elementárních funkcí.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Příklady 1 :

Přímo z definice lze vypočítat derivace některých elementárních funkcí.



Pro funkce složitější se používají jiné postupy ukázané dále.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li funkce v bodě  $c$  dodefinována jiným předpisem než v okolí  $c$ , počítá se derivace funkce v  $c$  pomocí definice (někdy zvlášť derivace zprava a derivace zleva, pokud jsou předpisy na obou stranách bodu  $c$  různé); ke konci této kapitoly ukážeme, že lze v některých takovýchto případech počítat derivaci jako limitu derivací.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Je-li  $f$  konstantní funkce, je její derivace všude rovna 0. V čitateli definice derivace je totiž stále 0 (ve jmenovateli není nikdy 0).



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Necht'  $f(x) = x$ . Potom pro všechna  $c$  platí

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{x - c} = 1.$$



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Necht'  $f(x) = x^2$ . Potom pro všechna  $c$  platí

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} (x + c) = 2c.$$



#### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

4. Necht'  $f(x) = \sqrt{x}$ . Potom pro všechna  $c > 0$  platí

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Pro  $c = 0$  je derivace totožná s derivací zprava. Předchozí postup dá  $+\infty$ .



#### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



5. Necht'  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Potom pro všechna  $c \neq 0$  platí

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{-1}{xc} = -\frac{1}{c^2}.$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## 6. Derivace funkce sinus v libovolném bodě $c$ :

$$\begin{aligned}\sin'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(c+h) - \sin c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin c}{h} = \\ &= \sin c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \sin c \cdot 0 + \cos c \cdot 1 = \cos c.\end{aligned}$$



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Funkce sign má v každém nenulovém bodě derivaci 0, jak vyplývá z prvního příkladu. Pro derivace v 0 lze např. využít toho, že pro  $x \neq 0$  je  $\text{sign } x = x/|x|$ :

$$\text{sgn}'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sign } x - \text{sign } 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$



#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## 8. Derivace obecné mocniny v libovolném bodě $x$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a .$$

Speciálně je  $(e^x)' = e^x$ .



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## 9. Derivace logaritmu $\log_a x$ v bodě $c$ :

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\log_a x - \log_a c}{x - c} = \frac{1}{c} \lim_{x \rightarrow c} \frac{\log_a(x/c)}{x/c - 1} = \frac{1}{c} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log_a y}{y - 1} = \frac{1}{c \log a}.$$

Pro poslední limitu viz *Příklady 6* předchozí kapitoly.



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## 9. Derivace logaritmu $\log_a x$ v bodě $c$ :

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\log_a x - \log_a c}{x - c} = \frac{1}{c} \lim_{x \rightarrow c} \frac{\log_a(x/c)}{x/c - 1} = \frac{1}{c} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log_a y}{y - 1} = \frac{1}{c \log a}.$$

Pro poslední limitu viz *Příklady 6* předchozí kapitoly.



Speciálně je tedy  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ .

Konec příkladů 1.

- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

Funkce sign má v 0 nevlastní derivaci a není tam spojitá.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce  $\sqrt[3]{x}$  má v 0 nevlastní derivaci a je tam spojitá.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Funkce  $|x|$  nemá v 0 derivaci a je tam spojitá (protože má v 0 vlastní derivaci zprava a vlastní derivaci zleva).



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Funkce  $|\operatorname{sign} x|$  nemá v 0 derivaci a není tam spojitá (má v 0 obě jednostranné derivace nevlastní).



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

je spojitá v 0 a nemá tam ani derivaci zprava ani derivaci zleva.



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Funkce

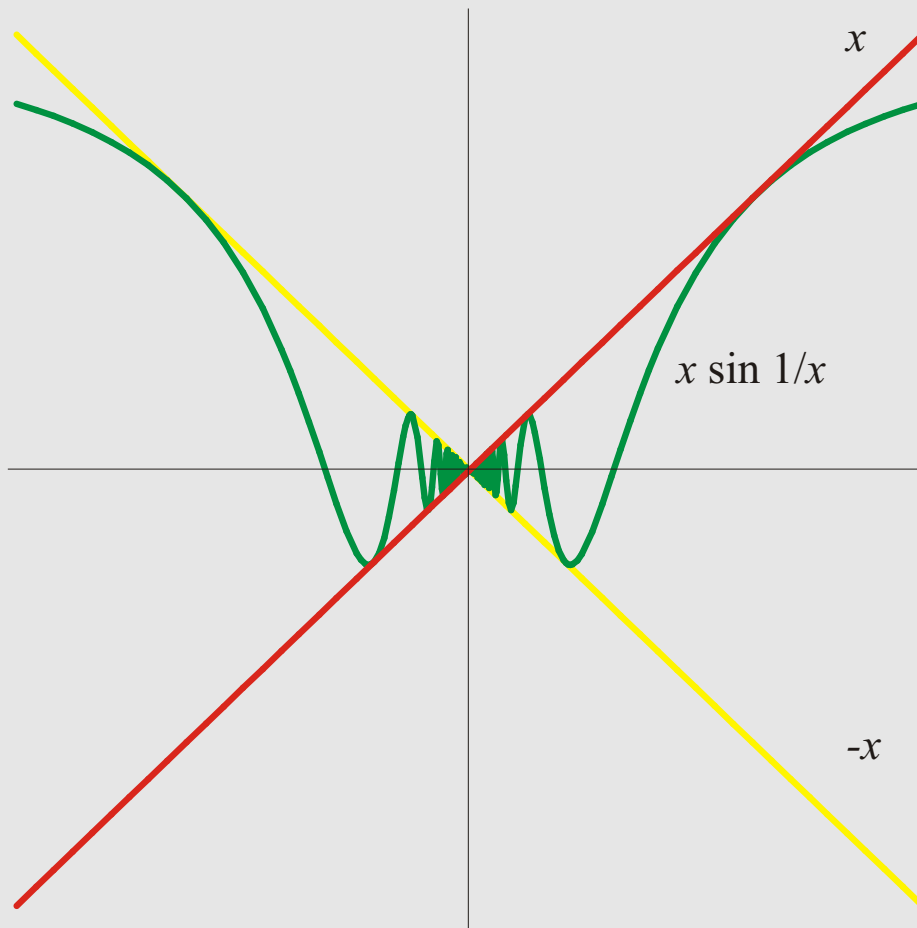
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

je spojitá v 0 a nemá tam ani derivaci zprava ani derivaci zleva.



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



Konec příkladů 2.

**LEKCE07-DER**  
 Derivace  
 definice  
 derivace->spoj  
 konstrukce  
 derivace součtu...  
 složená funkce  
 inverze  
 derivace na intervalu  
 max->der=0  
 Darboux  
 Rolle  
 Lagrange  
 Cauchy  
 vyšší derivace  
 implicitní funkce  
 param.funkce  
 polární souř.

Poznámky  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 3 :

Snadno se nyní vypočtou derivace některých součtů, např.

$$(5x^2 - 7 \sin x)' = 10x - 7 \cos x, \quad \left(\frac{3}{5x} + 2\sqrt{x}\right)' = -\frac{3}{5x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Pomocí věty o derivaci součinu lze znovu spočítat derivaci funkce  $x^2$ :

$$(x \cdot x)' = (x)'x + x(x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x .$$



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně lze postupovat při vyšších mocninách:

$$(x^3)' = (x \cdot x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2, \quad (x^4)' = (x \cdot x^3)' = x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3.$$

Pro další mocniny viz *Otázky*.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



Pomocí věty o derivaci podílu lze znovu spočítat derivaci funkce  $1/x$ :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}.$$



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Derivaci funkce  $1/x^2$  lze počítat jak podle věty o derivaci součinu tak podle věty o derivaci podílu:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' \frac{1}{x} = 2 \frac{-1}{x^3}.$$

Pro další mocniny viz *Otázky*.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jiné příklady:

$$(\sin^2 x)' = (\sin x \sin x)' = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin(2x),$$



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Jiné příklady:

$$(\sin^2 x)' = (\sin x \sin x)' = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin(2x),$$



$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{0 \sin x - 1 \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cotg x}{\sin x}.$$

Konec příkladů 3.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 4 :

Postup při výpočtu derivace složené funkce, např.  $\sin(x^3)$ :



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Příklady 4 :

Postup při výpočtu derivace složené funkce, např.  $\sin(x^3)$ :



Nejdříve se zderivuje vnější funkce, tj. funkce  $\sin$  (dostane se funkce  $\cos$ ) a opíše se argument této vnější funkce (tj.  $x^3$ ); výsledek se násobí derivací vnitřní funkce, tj. funkcí  $3x^2$  a dostane se  $\cos(x^3) \cdot 3x^2$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Je-li funkce složena z více funkcí, derivují se postupně všechny vyskytující se funkce, např. u derivace  $\sin \sqrt{x^3}$ :



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Je-li funkce složena z více funkcí, derivují se postupně všechny vyskytující se funkce, např. u derivace  $\sin \sqrt{x^3}$ :



Zderivuje se první funkce (tj.  $\sin$ ) a opíše její argument (dostane se  $\cos \sqrt{x^3}$ ) – výsledek se vynásobí derivací druhé funkce (tj. funkce druhé odmocniny) s opsaným její argumentem (dostane se  $\cos \sqrt{x^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ ) a tento výsledek se vynásobí derivací poslední funkce  $x^3$ ; výsledkem je funkce  $\cos \sqrt{x^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je nutné dávat pozor na pořadí jednotlivých funkcí definujících složenou funkci. Např. u funkce  $\sin^2 x$  je vnější funkcí druhá mocnina a vnitřní funkcí  $\sin$ , takže se nejdříve derivuje druhá mocnina a potom sinus – výsledkem je funkce  $2 \sin x \cdot \cos x$ .



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Ukažte pomocí rovnosti  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ , že  $(\cos x)' = -\sin x$  pro každé  $x$  (a tedy  $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$ ).



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Pomocí vyjádření  $x^a = e^{a \log x}$  spočtěte  $(x^a)' = ax^{a-1}$ .



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Pomocí podobného vyjádření  $f^g = e^{g \log f}$  se počítají derivace mocnin funkcí:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \log(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right).$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí podobného vyjádření  $f^g = e^{g \log f}$  se počítají derivace mocnin funkcí:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \log(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right).$$



Zamlada jsem  $x^x$  derivoval  
velmi zvláštním způsobem.  
Teď již to nedělám :-)

Konec příkladů 4.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 5 :

Pro  $q \in \mathbb{N}$  je funkce  $y = \sqrt[q]{x}$  inverzní k  $x = y^q$  (na  $\mathbb{R}$  pro liché  $q$  a na  $[0, +\infty)$  pro sudé  $q$ ).



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Příklady 5 :

Pro  $q \in \mathbb{N}$  je funkce  $y = \sqrt[q]{x}$  inverzní k  $x = y^q$  (na  $\mathbb{R}$  pro liché  $q$  a na  $[0, +\infty)$  pro sudé  $q$ ).



Protože derivace  $y^q$  je  $qy^{q-1}$ , je derivace funkce  $\sqrt[q]{x}$  rovna funkci

$$\frac{1}{q(\sqrt[q]{x})^{q-1}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{\sqrt[q]{x}}{qx}$$

(v bodě  $x = 0$  je derivace rovna  $+\infty$ ).



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $r = p/q$ , derivuje se funkce  $x^r$  jako složená funkce  $\sqrt[q]{x^p}$  s výsledkem

$$\frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot px^{p-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}$$

na příslušném definičním oboru (s úmluvou o převrácené hodnotě 0 ve větě o derivaci inverzní funkce).



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je-li  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $r = p/q$ , derivuje se funkce  $x^r$  jako složená funkce  $\sqrt[q]{x^p}$  s výsledkem

$$\frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot px^{p-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}$$

na příslušném definičním oboru (s úmluvou o převrácené hodnotě 0 ve větě o derivaci inverzní funkce).



Výsledkem je stejné pravidlo, jako bylo dokázané pravidlo pro případ  $r \in \mathbb{Z}$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cyklometrické funkce. Necht'  $y = \arcsin x$ , tj.  $x = \sin y$ . Pak

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

protože  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$  a tam je  $\cos y \geq 0$ . V bodech  $\pm 1$  jsou derivace nevlastní  $(+\infty)$ .



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Cyklometrické funkce. Necht'  $y = \arcsin x$ , tj.  $x = \sin y$ . Pak

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

protože  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$  a tam je  $\cos y \geq 0$ . V bodech  $\pm 1$  jsou derivace nevlastní  $(+\infty)$ .



Podobně spočtete

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Logaritmické funkce. Necht'  $y = \log_a x$ , tj.  $x = a^y$ . Pak

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a},$$

což souhlasí s výpočtem v *Příkladech 1*.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Logaritmické funkce. Necht'  $y = \log_a x$ , tj.  $x = a^y$ . Pak

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a},$$

což souhlasí s výpočtem v *Příkladech 1*.



Taky to mohlo nevyjít !!!

Konec příkladů 5.

#### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Příklady 6 :

Vypočtete derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0; \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

na  $\mathbb{R}$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Příklady 6 :

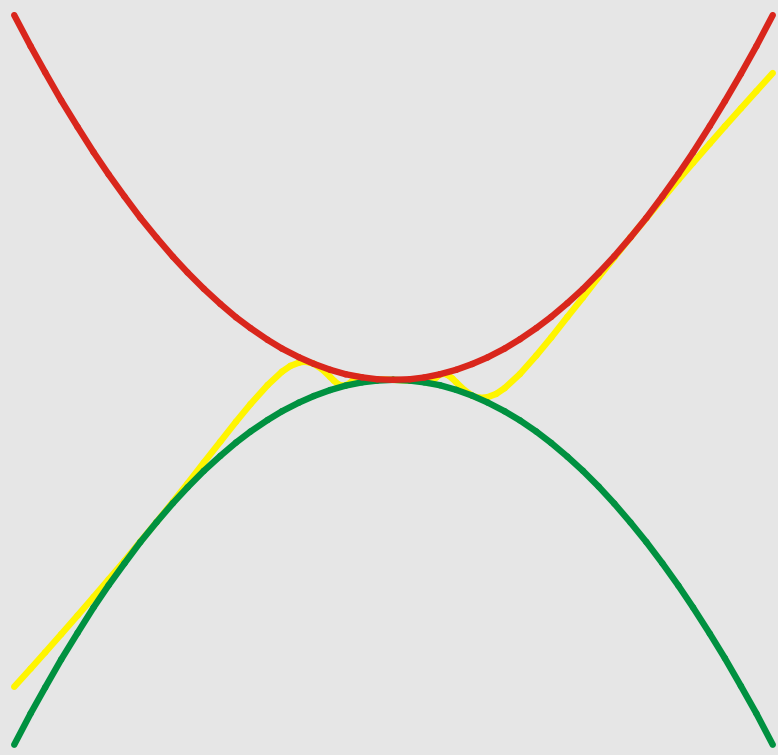
Vypočtete derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0; \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

na  $\mathbb{R}$ .

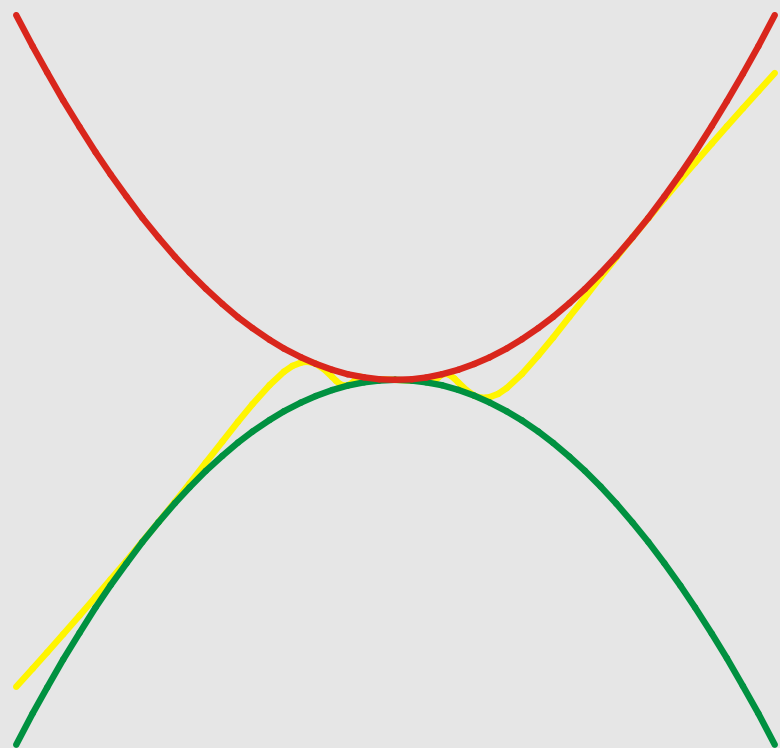


- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Ukažte, že tato derivace není spojitá v 0.

Konec příkladů 6.

## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 7 :

Ukažte, že obrácené tvrzení ke druhému důsledku neplatí, tj., že existuje funkce  $f$ , která má derivaci  $f'_+(a)$ , ale  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x)$  neexistuje.



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 7 :

Ukažte, že obrácené tvrzení ke druhému důsledku neplatí, tj., že existuje funkce  $f$ , která má derivaci  $f'_+(a)$ , ale  $\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x)$  neexistuje.



Návod: funkce  $x^2 \sin(1/x)$ .



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Příklady 7 :

Ukažte, že obrácené tvrzení ke druhému důsledku neplatí, tj., že existuje funkce  $f$ , která má derivaci  $f'_+(a)$ , ale  $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$  neexistuje.



Návod: funkce  $x^2 \sin(1/x)$ .



Tu jsem si chtěl nechat pro sebe. Zlobím se.

### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |



Pomocí Lagrangeovy věty ukažte, že pro  $0 < a < b$  je  $\sqrt{b} - \sqrt{a} < (b - a)/(2\sqrt{a})$ , tj.  
 $\sqrt{ab} < (a + b)/2$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Lagrangeovy věty ukažte, že pro  $0 < a < b$  je  $\sqrt{b} - \sqrt{a} < (b - a)/(2\sqrt{a})$ , tj.  
 $\sqrt{ab} < (a + b)/2$



Geometrický průměr dvou různých kladných čísel je vždy menší než jejich aritmetický průměr.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Lagrangeovy věty ukažte, že pro  $0 < a < b$  je  $\sqrt{b} - \sqrt{a} < (b - a)/(2\sqrt{a})$ , tj.  $\sqrt{ab} < (a + b)/2$



Geometrický průměr dvou různých kladných čísel je vždy menší než jejich aritmetický průměr.



Matematická analýza je moje sluníčko.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Lagrangeovy věty ukažte, že pro  $0 < a < b$  je  $\sqrt{b} - \sqrt{a} < (b - a)/(2\sqrt{a})$ , tj.  $\sqrt{ab} < (a + b)/2$



Geometrický průměr dvou různých kladných čísel je vždy menší než jejich aritmetický průměr.



Matematická analýza je moje sluníčko.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Moje je sluníčko.

Konec příkladů 7.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 8 :

Spočtěte třetí derivaci funkce  $\sqrt{x}$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtete  $n$ -tou derivaci funkce  $x^r$  pro  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  a  $r \in \mathbb{Q}$ .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtete  $n$ -tou derivaci funkcí sin, cos.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtěte 57. derivaci funkcí  $e^x$ .

Konec příkladů 8.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 9 :

**Implicitně zadané funkce** Vypočtete derivaci funkce  $y$  proměnné  $x$  dané rovností  $x^2 + y^2 = a^2$  pro  $a > 0$ .



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklady 9 :

**Implicitně zadané funkce** Vypočtete derivaci funkce  $y$  proměnné  $x$  dané rovností  $x^2 + y^2 = a^2$  pro  $a > 0$ .



Grafem takto implicitně zadané funkce je kružnice.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Příklady 9 :

**Implicitně zadané funkce** Vypočtete derivaci funkce  $y$  proměnné  $x$  dané rovností  $x^2 + y^2 = a^2$  pro  $a > 0$ .



Grafem takto implicitně zadané funkce je kružnice.



Derivace existují ve všech bodech kružnice kromě bodů, kde koeficient  $y$  u  $y'$  je roven 0, tedy v bodech  $(\pm a, 0)$ .



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



## Příklady 9 :

**Implicitně zadané funkce** Vypočtete derivaci funkce  $y$  proměnné  $x$  dané rovností  $x^2 + y^2 = a^2$  pro  $a > 0$ .



Grafem takto implicitně zadané funkce je kružnice.



Derivace existují ve všech bodech kružnice kromě bodů, kde koeficient  $y$  u  $y'$  je roven 0, tedy v bodech  $(\pm a, 0)$ .



Může se v těchto bodech brát derivace nevlastní?

### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rovnice lemniskaty s parametrem  $a > 0$  je  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rovnice lemniskaty s parametrem  $a > 0$  je  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .



Vypočtete derivaci a uvažte, proč z geometrického hlediska v bodech, kde  $y = 0$ , derivace neexistuje.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Najděte druhou derivaci  $y''$  implicitně zadané funkce tvaru  $2x^3 - 3y^2 = 0$  v bodech, kde  $y \neq 0$ .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte druhou derivaci  $y''$  implicitně zadané funkce tvaru  $2x^3 - 3y^2 = 0$  v bodech, kde  $y \neq 0$ .



Upravte výsledek tak, aby neobsahoval explicitně  $y'$  a to dvěma způsoby:



## LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Najděte druhou derivaci  $y''$  implicitně zadané funkce tvaru  $2x^3 - 3y^2 = 0$  v bodech, kde  $y \neq 0$ .



Upravte výsledek tak, aby neobsahoval explicitně  $y'$  a to dvěma způsoby:



1. vypočtete  $y'$  jako zlomek, ten derivujte a do výsledku dosad' te za  $y'$  vypočtený zlomek;



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Najděte druhou derivaci  $y''$  implicitně zadané funkce tvaru  $2x^3 - 3y^2 = 0$  v bodech, kde  $y \neq 0$ .



Upravte výsledek tak, aby neobsahoval explicitně  $y'$  a to dvěma způsoby:



1. vypočtete  $y'$  jako zlomek, ten derivujte a do výsledku dosad'te za  $y'$  vypočtený zlomek;



2. nechte první derivaci v implicitním tvaru, derivujte ji podruhé, vyřešte rovnici pro  $y''$  a teprve do tohoto výsledku dosad'te za  $y'$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



**Parametricky zadané funkce** Vypočtěte derivaci „kružnice“ zadané parametricky, tj.  $y = a \sin t, x = a \cos t$  pro  $t \in [0, 2\pi)$ .



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Parametricky zadané funkce** Vypočtěte derivaci „kružnice“ zadané parametricky, tj.  $y = a \sin t, x = a \cos t$  pro  $t \in [0, 2\pi)$ .



Srovnejte výsledek s výše vypočtenou derivací pomocí implicitně zadané kružnice. Kružnice je polárně zadaná rovnicí  $r = a$  pro  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Ověřte derivaci i přes toto zadání.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Předchozí úlohu zopakujte pro lemniskatu. Její parametrické zadání je

$$y = \frac{at(1 - t^2)}{1 + t^4}, \quad x = \frac{at(1 + t^2)}{1 + t^4}, \quad \text{pro } t \in (-\infty, +\infty)$$

a polární zadání (přesněji implicitně polární) je

$$r^2 = a^2 \cos(2\varphi) \quad \text{pro } \varphi \in [0, 2\pi]$$

Konec příkladů 9.

#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# OTÁZKY

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 1 :

Ukažte pomocí definice derivace, že Dirichletova a Riemannova funkce nemají derivaci v žádném bodě.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Pro jaká kladná  $a$  má funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

derivaci v 0? A jednostranné derivace?



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtěte v bodě  $1/2$  derivaci následující funkce:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1/2; \\ x^2, & x > 1/2. \end{cases}$$

Konec otázek 1.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

Najděte spojitou funkci na  $\mathbb{R}$ , která ....

Konec otázek 2.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Otázky 3 :

Dokažte indukcí pomocí postupu v *Příkladech*, že pro každé přirozené číslo  $n$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

### Otázky 3 :

Dokažte indukcí pomocí postupu v *Příkladech*, že pro každé přirozené číslo  $n$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$



Protože první rovnost platí i pro  $n = 0$  a druhá rovnost je vlastně první rovnost pro  $n < 0$ , platí první rovnost pro každé celé číslo  $n$ .



#### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**Nevlastní derivace** V následující části se předpokládá, že  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  (proč je tento předpoklad nutný?) Derivace mohou být i nevlastní.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**Nevlastní derivace** V následující části se předpokládá, že  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  (proč je tento předpoklad nutný?) Derivace mohou být i nevlastní.



Ukažte, že  $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ , jakmile má pravá strana smysl.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

**Nevlastní derivace** V následující části se předpokládá, že  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  (proč je tento předpoklad nutný?) Derivace mohou být i nevlastní.



Ukažte, že  $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ , jakmile má pravá strana smysl.



Ukažte, že  $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$  jakmile má pravá strana smysl a buď  $f$  nebo  $g$  je spojitá v  $c$ .



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

**Nevlastní derivace** V následující části se předpokládá, že  $c$  je bodem i hromadným bodem  $\mathcal{D}(f + g)$  (proč je tento předpoklad nutný?) Derivace mohou být i nevlastní.



Ukažte, že  $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ , jakmile má pravá strana smysl.



Ukažte, že  $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$  jakmile má pravá strana smysl a buď  $f$  nebo  $g$  je spojitá v  $c$ .



Ukažte, že platí vzorec pro derivaci podílu jakmile má pravá strana smysl a  $g$  je spojitá a nenulová v  $c$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**Více než dva faktory** Dokažte indukci vzorce pro derivaci součtu a součinu pro  $n$  funkcí  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  (jaké budou předpoklady?)



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Více než dva faktory** Dokažte indukci vzorce pro derivaci součtu a součinu pro  $n$  funkcí  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  (jaké budou předpoklady?)



$$\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)'(c) = \sum_{i=1}^n f_i'(c),$$
$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(c) = f_1'(c) f_2(c) \dots f_n(c) + f_1(c) f_2'(c) f_3(c) \dots f_n(c) + \dots + f_1(c) f_2(c) \dots f_{n-1}'(c) \dots f_n(c) + f_1(c) f_2(c) \dots f_{n-1}(c) \dots f_n'(c)$$

Konec otázek 3.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Otázky 4 :

Jaké možnosti mohou nastat, pokud jsou ve větě o derivaci složené funkce připuštěny i nevlastní derivace? Stačí pro uvedenou rovnost předpokládat, že pravá strana má smysl?



### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Zformulujte příslušné tvrzení o derivaci složené funkce pro jednostranné derivace. Stačí všude předpokládat např. derivaci zprava?



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtěte derivaci funkce  $(\operatorname{tg} x)^{\log(\sin x)}$ . Ve kterých bodech je tato derivace definována?

Konec otázek 4.

#### LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Otázky 5 :

Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce pro jednostranné derivace. Je možné brát všude např. derivaci zprava?



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Ukažte, že pokud je známa existence derivace funkce  $g$ , která je inverzní k  $f$ , lze vzorec pro výpočet derivace funkce  $g$  získat pomocí věty o derivace složené funkce z rovnosti  $f \circ g = id$ .

Konec otázek 5.

|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Otázky 6 :

Ukažte, že neplatí následující modifikace věty: Má-li  $f$  derivaci (i nevlastní) na intervalu  $J$ , pak  $f'(J)$  je buď bod nebo interval.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Otázky 6 :

Ukažte, že neplatí následující modifikace věty: Má-li  $f$  derivaci (i nevlastní) na intervalu  $J$ , pak  $f'(J)$  je buď bod nebo interval.



Zkuste upravit předchozí formulaci tak, aby platila i když se připustí nevlastní derivace (a tedy neomezený interval  $J$ ).

Konec otázek 6.

|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Otázky 7 :

Ukažte, že Rolleova věta (a tedy i Lagrangeova a Cauchyova věta) neplatí, pokud vynecháme nebo oslabíme některý ze dvou předpokladů (třetí předpoklad Rolleovy věty samozřejmě není potřeba pro Lagrangeovu a Cauchyovu větu):



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



## Otázky 7 :

Ukažte, že Rolleova věta (a tedy i Lagrangeova a Cauchyova věta) neplatí, pokud vynecháme nebo oslabíme některý ze dvou předpokladů (třetí předpoklad Rolleovy věty samozřejmě není potřeba pro Lagrangeovu a Cauchyovu větu):



$f$  je spojitá na  $[a, b]$  (předpokládejte spojitost jen na  $(a, b]$ );



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Otázky 7 :

Ukažte, že Rolleova věta (a tedy i Lagrangeova a Cauchyova věta) neplatí, pokud vynecháme nebo oslabíme některý ze dvou předpokladů (třetí předpoklad Rolleovy věty samozřejmě není potřeba pro Lagrangeovu a Cauchyovu větu):



$f$  je spojitá na  $[a, b]$  (předpokládejte spojitost jen na  $(a, b]$ );



existuje derivace na  $(a, b)$  (předpokládejte, že  $f'$  neexistuje v jednom bodě  $(a, b)$ ).



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Otázky 7 :

Ukažte, že Rolleova věta (a tedy i Lagrangeova a Cauchyova věta) neplatí, pokud vynecháme nebo oslabíme některý ze dvou předpokladů (třetí předpoklad Rolleovy věty samozřejmě není potřeba pro Lagrangeovu a Cauchyovu větu):



$f$  je spojitá na  $[a, b]$  (předpokládejte spojitost jen na  $(a, b]$ );



existuje derivace na  $(a, b)$  (předpokládejte, že  $f'$  neexistuje v jednom bodě  $(a, b)$ ).



Může se ve druhém důsledku vynechat předpoklad, že  $f$  je spojitá zprava v  $a$ ?



Já nic, já muzikant.

Konec otázek 7.

### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Otázky 8 :

Dokažte indukci vzorec pro  $n$ -tou derivaci součinu.



#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že pro druhou derivaci složené funkce platí vzorec

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x)) \cdot g'^2(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

za předpokladu, že všechny vyskytující se derivace existují a jsou vlastní.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že je-li  $g$  inverzní funkce k funkci  $f$  na nějakém intervalu, lze z předchozí rovnosti získat vzorec pro druhou derivaci funkce  $g$ :

$$g''(x) = \frac{-f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} = \frac{-f''(g(x))}{f'^2(g(x))}.$$

Předpoklad je, že všechny vyskytující se derivace existují a jsou vlastní. Tento předpoklad lze oslabit.



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

Ukažte, že pro každý polynom  $P$  existuje  $n$  tak, že  $P^{(n)} = 0$  na  $\mathbb{R}$ . Jak souvisí takovéto nejmenší  $n$  se stupněm  $P$ ? (Později bude ukázáno, že tato vlastnost charakterizuje polynomy.)

Konec otázek 8.

|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Otázky 9 :

Jak lze funkci  $f$  vyjádřit pomocí implicitního zadání?



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Otázky 9 :

Jak lze funkci  $f$  vyjádřit pomocí implicitního zadání?



Pomocí parametrického zadání?



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 9 :

Jak lze funkci  $f$  vyjádřit pomocí implicitního zadání?



Pomocí parametrického zadání?



Ukažte, že derivace získané pomocí těchto zadání souhlasí s derivací funkce  $f$ .



## LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Pomocí derivace implicitně zadaných funkcí dokažte vzorec  $(x^r)' = rx^{r-1}$  pro  $r \in \mathbb{Q}$ ,  
víte-li, že platí vzorec pro  $r \in \mathbb{N}$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí derivace implicitně zadaných funkcí dokažte vzorec  $(x^r)' = rx^{r-1}$  pro  $r \in \mathbb{Q}$ ,  
víte-li, že platí vzorec pro  $r \in \mathbb{N}$ .



Návod: pro  $r = p/q$  použijte  
implicitně zadanou funkci  
 $y^q = x^p$ .

Konec otázek 9.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# CVIČENÍ

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Cvičení 1 :

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 2 :

### LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Konec cvičení 2.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 3 :

### LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 4 :

**Příklad.** Zderivujte  $\sin(\cos x)$ .



### LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 4 :

**Příklad.** Zderivujte  $\sin(\cos x)$ .



**Řešení.** Derivujeme nejdříve vnější a pak vnitřní funkci. Dostaneme  $-\cos(\cos x) \sin x$ .



### LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 4 :

**Příklad.** Zderivujte  $\sin(\cos x)$ .



**Řešení.** Derivujeme nejdříve vnější a pak vnitřní funkci. Dostaneme  $-\cos(\cos x) \sin x$ .



Co jsou ty vnitřní a vnější funkce?



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Cvičení 4 :

**Příklad.** Zderivujte  $\sin(\cos x)$ .



**Řešení.** Derivujeme nejdříve vnější a pak vnitřní funkci. Dostaneme  $-\cos(\cos x) \sin x$ .



Co jsou ty vnitřní a vnější funkce?



To chce cvik. Vnitřní je ta uvnitř.

### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Zderivujte  $x^x$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zderivujte  $x^x$ .



**Řešení.** Rozepíšeme  $x^x = \exp(x \log x)$  a zderivujeme jako složenou funkci.



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zderivujte  $x^x$ .



**Řešení.** Rozepíšeme  $x^x = \exp(x \log x)$  a zderivujeme jako složenou funkci.



Dostaneme  $x^x(1 + \log x)$ .



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zderivujte  $x^x$ .



**Řešení.** Rozepíšeme  $x^x = \exp(x \log x)$  a zderivujeme jako složenou funkci.



Dostaneme  $x^x(1 + \log x)$ .



To je docela dobré umět na-  
zpaměť'.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdo bude derivovat  $x^x$  jinak, bude po zásluze odměněn.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdo bude derivovat  $x^x$  jinak, bude po zásluze odměněn.



O.K.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kdo bude derivovat  $x^x$  jinak, bude po zásluze odměněn.



O.K.



I já derivuju  $x^x$  podle vzorečku  $(x^x(1 + \log x))$ .

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně spočítáme pro

$$x^{x^x} = \exp(\exp(x \log x) \log x)$$

derivaci

$$x^{x^x} (x^{x-1} + x^x (1 + \log x) \log x) .$$



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně spočítáme pro

$$x^{x^x} = \exp(\exp(x \log x) \log x)$$

derivaci

$$x^{x^x} (x^{x-1} + x^x (1 + \log x) \log x) .$$



Derivace obecné mocniny obvykle obsahuje jako faktor zadanou funkci.



#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně spočítáme pro

$$x^{x^x} = \exp(\exp(x \log x) \log x)$$

derivaci

$$x^{x^x} (x^{x-1} + x^x (1 + \log x) \log x) .$$



Derivace obecné mocniny obvykle obsahuje jako faktor zadanou funkci.



Podobně derivujeme  $f(x)^{g(x)}$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dodefinujte funkci

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

v počátku limitou a zkoumejte její derivaci v počátku.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dodefinujte funkci

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

v počátku limitou a zkoumejte její derivaci v počátku.



**Řešení.** Vidíme, že pro  $x \neq 0$  platí

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} .$$



## LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**Příklad.** Dodefinujte funkci

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

v počátku limitou a zkoumejte její derivaci v počátku.



**Řešení.** Vidíme, že pro  $x \neq 0$  platí

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} .$$



Spočítáme pro přirozené  $m$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} \stackrel{S}{=} \left[ t = -\frac{1}{x^2} \right] \stackrel{S}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0 .$$



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

**Příklad.** Dodefinujte funkci

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

v počátku limitou a zkoumejte její derivaci v počátku.



**Řešení.** Vidíme, že pro  $x \neq 0$  platí

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$



Spočítáme pro přirozené  $m$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} \stackrel{S}{=} \left[ t = -\frac{1}{x^2} \right] \stackrel{S}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0.$$



Podobně ukážeme, že  $f$  má v počátku všechny derivace nulové.

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Cvičení 5 :

**Příklad.** Spočtěte derivaci funkce  $g$  inverzní k  $f(x) = \sqrt{x}$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Cvičení 5 :

**Příklad.** Spočtěte derivaci funkce  $g$  inverzní k  $f(x) = \sqrt{x}$ .



**Řešení.** Máme  $g(y) = x$  právě když  $y = f(x)$ . Pro derivaci platí vzoreček

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} = 2f(x) = 2y .$$



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

## Cvičení 5 :

**Příklad.** Spočtete derivaci funkce  $g$  inverzní k  $f(x) = \sqrt{x}$ .



**Řešení.** Máme  $g(y) = x$  právě když  $y = f(x)$ . Pro derivaci platí vzoreček

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} = 2f(x) = 2y .$$



Jako po másle.



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Cvičení 5 :

**Příklad.** Spočtete derivaci funkce  $g$  inverzní k  $f(x) = \sqrt{x}$ .



**Řešení.** Máme  $g(y) = x$  právě když  $y = f(x)$ . Pro derivaci platí vzoreček

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} = 2f(x) = 2y .$$



Jako po másle.



### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



Všimli jste si toho Ypsilonu? Vypadá jako tvrdý y, ale umí, co?



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Všimli jste si toho Ypsilonu? Vypadá jako tvrdý y, ale umí, co?



Jednostranná derivace v počátku je také snadná díky jednostranné spojitosti.



#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte derivaci funkce  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte derivaci funkce  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  .



**Řešení.** Jde postupovat mechanicky a dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cos x .$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Příklad.** Zkoumejte derivaci funkce  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  .



**Řešení.** Jde postupovat mechanicky a dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cos x .$$



To si říká o zjednodušení a vysvětlení. Vyjde  $\pm 1$ , v některých bodech jednostranně.



#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte derivaci funkce  $f(x) = \arcsin(\sin x)$  .



**Řešení.** Jde postupovat mechanicky a dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cos x .$$



To si říká o zjednodušení a vysvětlení. Vyjde  $\pm 1$ , v některých bodech jednostranně.



Koukám, že jde o Zubatou funkci.

#### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

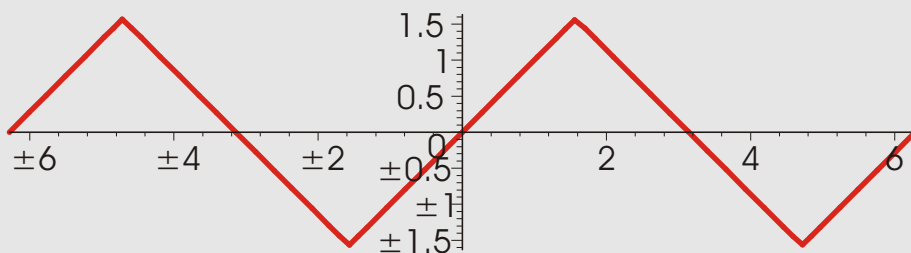
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jo.

$\arcsin(\sin x)$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.

Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte  $f(x) = \arcsin(\cos x)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte  $f(x) = \arcsin(\cos x)$ .



**Řešení.** Spočítáme  $f'(x) = -\text{sign}(\sin x)$  pro  $x \neq k\pi$ ,  $f'_{\pm}(x) = \pm(-1)^{k+1}$  pro  $x = k\pi$ .

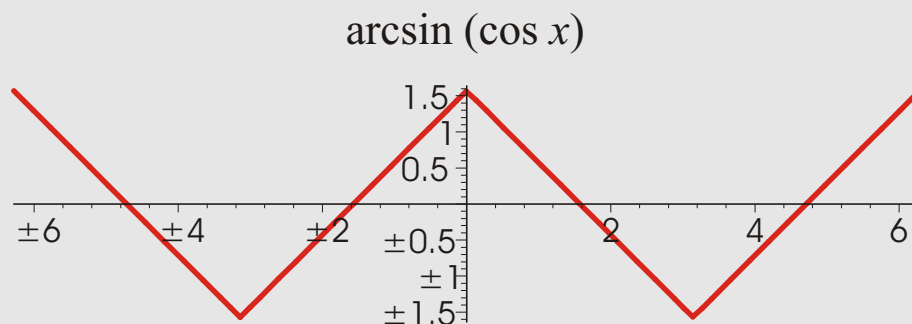


**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Zkoumejte  $f(x) = \arcsin(\cos x)$ .



**Řešení.** Spočítáme  $f'(x) = -\text{sign}(\sin x)$  pro  $x \neq k\pi$ ,  $f'_{\pm}(x) = \pm(-1)^{k+1}$  pro  $x = k\pi$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Cvičení 6 :

### LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 7 :

**Příklad.** Spočtěte derivace funkce  $f(x) = |x|$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Cvičení 7 :

**Příklad.** Spočtete derivace funkce  $f(x) = |x|$ .



**Řešení.** Pro  $x \neq 0$  jde o  $\pm x$  a derivace je  $\pm 1$ . Jednostranné derivace v počátku spočítáme podle věty o jednostranné derivaci:



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Cvičení 7 :

**Příklad.** Spočtěte derivace funkce  $f(x) = |x|$ .



**Řešení.** Pro  $x \neq 0$  jde o  $\pm x$  a derivace je  $\pm 1$ . Jednostranné derivace v počátku spočítáme podle věty o jednostranné derivaci:



1. Funkce  $f$  je spojitá zprava v bodě 0.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 .$$

$$3. \text{Tedy } f'_+(0) = 1 .$$



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



Je to důležitý návyk!!!!



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je to důležitý návyk!!!!



Uvidíme, co se dá dělat ...



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



At' jakkoliv stručně, ale  
správně.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





At' jakkoliv stručně, ale správně.



Funkce  $f$  je spojitá zprava v  $0$ , proto

$$f'_+(0) \stackrel{V}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x),$$

kde  $V$  znamená větu o jednostranné derivaci.



## LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



At' jakkoliv stručně, ale správně.



Funkce  $f$  je spojitá zprava v  $0$ , proto

$$f'_+(0) \stackrel{V}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x),$$

kde  $V$  znamená větu o jednostranné derivaci.



Takhle to беру.

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 7.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 8 :

**Příklad.** Spočtěte osmou derivaci funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 8 :

**Příklad.** Spočtěte osmou derivaci funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$



**Řešení.** Vidíme, že

$$f(x) = -(1+x) + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1}.$$



- LEKCE07-DER**
- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 8 :

**Příklad.** Spočtěte osmou derivaci funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$



**Řešení.** Vidíme, že

$$f(x) = -(1+x) + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1}.$$



Nyní

$$f^{(viii)} = 8!(1-x)^{-9}.$$



### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Cvičení 8 :

**Příklad.** Spočtěte osmou derivaci funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$



**Řešení.** Vidíme, že

$$f(x) = -(1+x) + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1}.$$



Nyní

$$f^{(viii)} = 8!(1-x)^{-9}.$$



Před derivováním je dobré přemýšlet ;-)

### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Konec cvičení 8.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Cvičení 9 :

**Příklad.** Derivujte funkci  $y = y(x)$  implicitně zadané vztahem  $y^2 = 4x$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

## Cvičení 9 :

**Příklad.** Derivujte funkci  $y = y(x)$  implicitně zadané vztahem  $y^2 = 4x$ .



**Řešení.** Derivace se snadno získá derivací vztahu podle  $x$ . Dostaneme

$$2y(x)y'(x) = 4 .$$

Tedy  $y'(x) = 2/y(x)$ .



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

**Příklad.** Odvod' te vztahy pro  $dr/dx$  a  $d\varphi/dx$  u polárních souřadnic.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Odvod' te vztahy pro  $dr/dx$  a  $d\varphi/dx$  u polárních souřadnic.



**Řešení.** Pracujeme nyní v polárních souřadnicích

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Odvod' te vztahy pro  $dr/dx$  a  $d\varphi/dx$  u polárních souřadnic.



**Řešení.** Pracujeme nyní v polárních souřadnicích

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



Derivujeme tyto vztahy podle  $x$  (pokud jde o  $y = y(x)$ ,  $r = r(x)$  a  $\varphi = \varphi(x)$ ) a dostaneme

$$1 = \frac{dr}{dx} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dx} \sin \varphi$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{dx} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dx} \cos \varphi.$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Odvod' te vztahy pro  $dr/dx$  a  $d\varphi/dx$  u polárních souřadnic.



**Řešení.** Pracujeme nyní v polárních souřadnicích

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



Derivujeme tyto vztahy podle  $x$  (pokud jde o  $y = y(x)$ ,  $r = r(x)$  a  $\varphi = \varphi(x)$ ) a dostaneme

$$1 = \frac{dr}{dx} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dx} \sin \varphi$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{dx} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dx} \cos \varphi.$$



Odtud spočteme takzvané „polární derivace“

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x + yy'}{r}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{xy' - y}{r^2}.$$

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





Pomocí těchto „polárních derivací“ budeme dál počítat.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pomocí těchto „polárních derivací“ budeme dál počítat.



Takové vztahy nejdou pamatovat, je potřeba je vždy vypočítat.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Příklad.** Spočteme  $dy/dx$  pro polárně zadanou funkci  $r = \varphi$  (Archimedova spirála).



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Spočteme  $dy/dx$  pro polárně zadanou funkci  $r = \varphi$  (Archimedova spirála).



**Řešení.** Derivujeme podle  $x$  a dostaneme

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}.$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Spočteme  $dy/dx$  pro polárně zadanou funkci  $r = \varphi$  (Archimedova spirála).



**Řešení.** Derivujeme podle  $x$  a dostaneme

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}.$$



Dosadíme sem „polární derivace“ (viz výše) a z rovnice vypočítáme  $y'$  ve tvaru

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{rx + y}{x - ry} = \frac{r + \frac{y}{x}}{1 + r\frac{y}{x}} = \frac{\varphi + \operatorname{tg} \varphi}{1 + \varphi \operatorname{tg} \varphi} \stackrel{?}{=} \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arctg} \varphi)$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Spočteme  $dy/dx$  pro polárně zadanou funkci  $r = \varphi$  (Archimedova spirála).



**Řešení.** Derivujeme podle  $x$  a dostaneme

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}.$$



Dosadíme sem „polární derivace“ (viz výše) a z rovnice vypočítáme  $y'$  ve tvaru

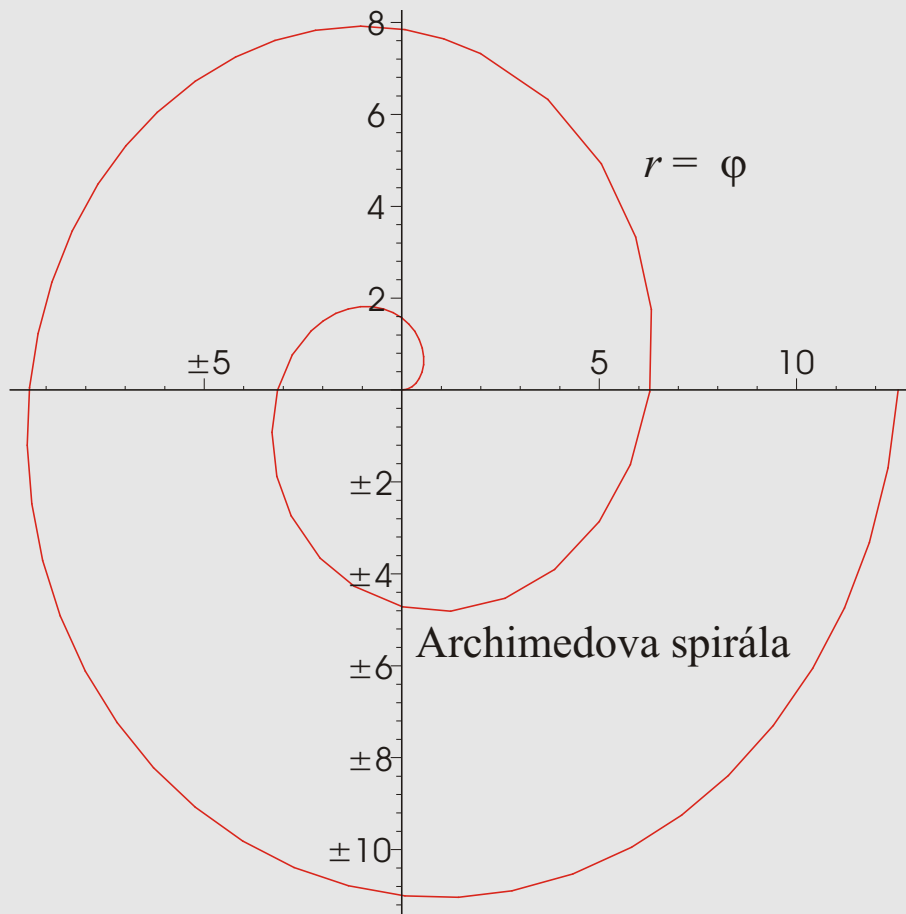
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{rx + y}{x - ry} = \frac{r + \frac{y}{x}}{1 + r\frac{y}{x}} = \frac{\varphi + \operatorname{tg} \varphi}{1 + \varphi \operatorname{tg} \varphi} \stackrel{?}{=} \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arctg} \varphi)$$



Až na otazník je všechno jasné.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9





**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Spočtěte  $F'$ , pokud  $F(x) = f(x^2)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Spočtěte  $F'$ , pokud  $F(x) = f(x^2)$ .



**Řešení.**  $F'(x) = f'(x^2)2x$ .



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**Příklad.** Spočtěte derivaci  $F(x) = f(f(f(x)))$ .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Příklad.** Spočtěte derivaci  $F(x) = f(f(f(x)))$ .



**Řešení.**  $F'(x) = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$ .



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht' funkce  $f$  je spojitá a derivovatelná na  $(x_0, \infty)$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ .  
Musí mít  $f$  limitu v  $\infty$ ?



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

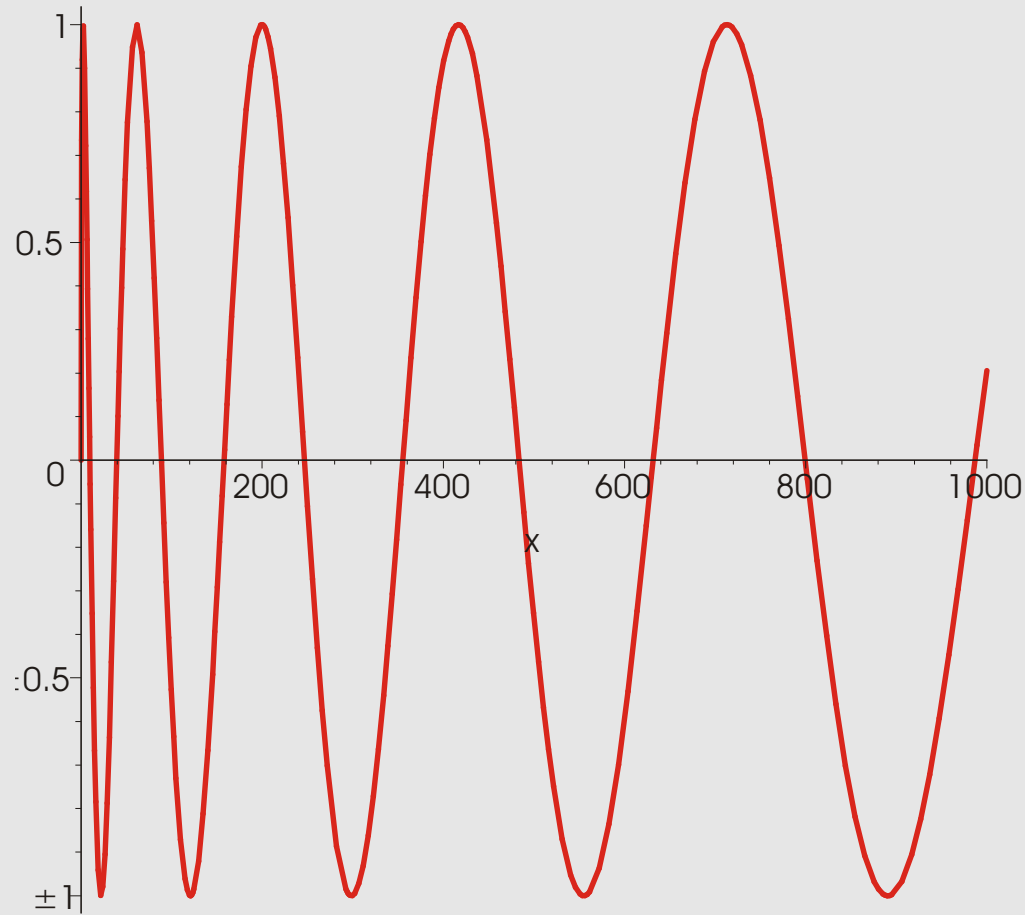
**Příklad.** Necht' funkce  $f$  je spojitá a derivovatelná na  $(x_0, \infty)$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ .  
Musí mít  $f$  limitu v  $\infty$ ?



**Řešení.** Ne. Volme například  $f(x) = g(h(x))$  pro  $g(x) = \sin x, \cos x, \dots$ ,  $h(x) = \log x, \sqrt{x}, \dots$

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE07-DER

Derivace  
 definice  
 derivace->spoj  
 konstrukce  
 derivace součtu...  
 složená funkce  
 inverze  
 derivace na intervalu  
 max->der=0  
 Darboux  
 Rolle  
 Lagrange  
 Cauchy  
 vyšší derivace  
 implicitní funkce  
 param.funkce  
 polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



U nekonečna čím dál poma-  
lejc nahoru a dolu ...



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht'  $f(x) = (x - a)g(x)$ ,  $g$  spojitá v  $a$ . Pak  $f'(a) = g(a)$ .



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht'  $f(x) = (x - a)g(x)$ ,  $g$  spojitá v  $a$ . Pak  $f'(a) = g(a)$ .



**Řešení.** Spočteme snadno

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((a + t) - a) g(a + t)}{t} = g(a) .$$



## LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Příklad. Jde Rolleova věta zobecnit na neomezený interval?



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Příklad.** Jde Rolleova věta zobecnit na neomezený interval?



**Řešení.** Snadno.



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht' má nekonečně derivovatelná funkce  $f$  alespoň  $n + 1$  různých nulových bodů. Dokažte, že existuje bod  $x$ , kde je  $f^{(n)}(x) = 0$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht' má nekonečně derivovatelná funkce  $f$  alespoň  $n + 1$  různých nulových bodů. Dokažte, že existuje bod  $x$ , kde je  $f^{(n)}(x) = 0$ .



**Řešení.** Pomocí opakovaného použití Rolleovy věty je to jednoduché.



#### LEKCE07-DER

|                       |
|-----------------------|
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

**Příklad.** Necht'  $f$  je spojitá na  $[0, 1]$  a má vlastní derivaci na  $(0, 1)$ . Podle Lagrangeovy věty existuje pro každé  $x \in (0, 1)$  číslo  $c(x) \in (0, x)$  tak, že platí

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c(x)).$$

Můžeme chtít, aby funkce  $c(x)$  byla spojitá?



## LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |

**Příklad.** Necht'  $f$  je spojitá na  $[0, 1]$  a má vlastní derivaci na  $(0, 1)$ . Podle Lagrangeovy věty existuje pro každé  $x \in (0, 1)$  číslo  $c(x) \in (0, x)$  tak, že platí

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c(x)).$$

Můžeme chtít, aby funkce  $c(x)$  byla spojitá?



Je to pravý diamant! Asi ho nenajdete ... Alespoň se můžete podívat.



#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht'  $f$  je spojitá na  $[0, 1]$  a má vlastní derivaci na  $(0, 1)$ . Podle Lagrangeovy věty existuje pro každé  $x \in (0, 1)$  číslo  $c(x) \in (0, x)$  tak, že platí

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c(x)).$$

Můžeme chtít, aby funkce  $c(x)$  byla spojitá?

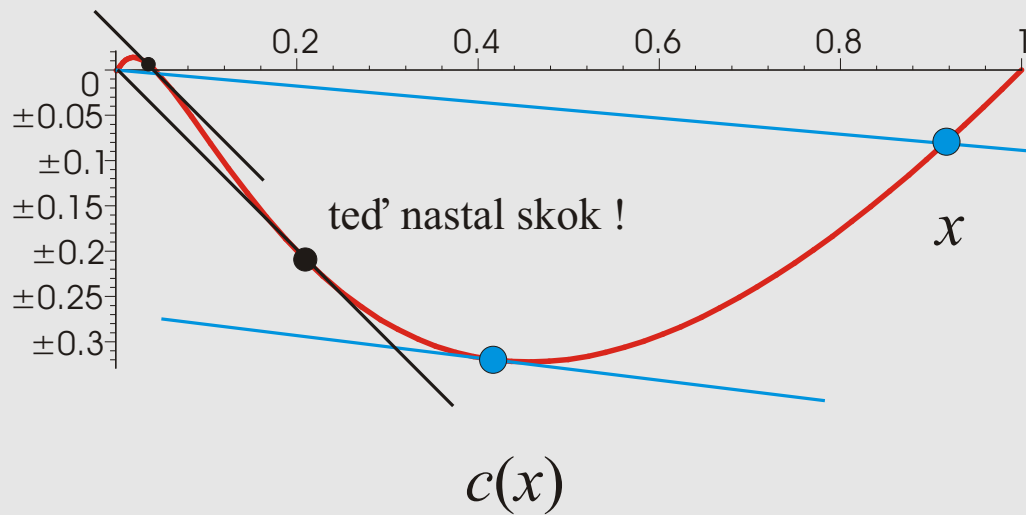


Je to pravý diamant! Asi ho nenajdete ... Alespoň se můžete podívat.



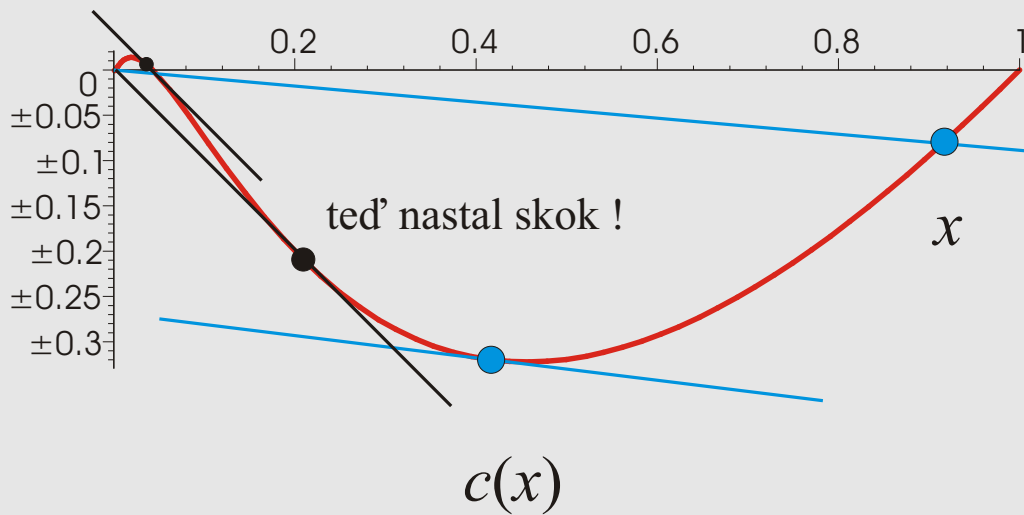
**Řešení.** NE. Například  $f(x) = x \sin \log(x)$  na  $(0, 1]$  dodefinovaná limitou v počátku to nedovede.

**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



## LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Já ho taky nenašel. Ale krásně se u něj sní ...

#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 9





**Příklad.** Dokažte pomocí Lagrangeovy věty vztah

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte pomocí Lagrangeovy věty vztah

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$



Kdo to nevidí si nasadí  
brýle.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht'  $f$  má na intervalu  $(0, 1)$  vlastní derivaci. Pokud je  $f$  neomezená, platí to i pro  $f'$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Necht'  $f$  má na intervalu  $(0, 1)$  vlastní derivaci. Pokud je  $f$  neomezená, platí to i pro  $f'$ .



Kdo to nevidí si nasadí brýle  
a hlavu.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte pro  $|x| \geq 1$  vztah

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pm \pi .$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte pro  $|x| \geq 1$  vztah

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pm \pi .$$



Kdo to vidí, je kabrňák.



#### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte pro  $|x| \geq 1$  vztah

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pm \pi .$$



Kdo to vidí, je kabrňák.



**Řešení.** Derivací získáme po částech konstantní funkci.



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte, že funkce

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

je rostoucí na  $(0, \infty)$ .



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Příklad.** Dokažte, že funkce

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

je rostoucí na  $(0, \infty)$ .



**Řešení.**

$$f'(x) = f(x) \left( \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} \right) \stackrel{V}{=} f(x) \left( \frac{1}{c(x)} - \frac{1}{x+1} \right),$$

kde  $c(x) \in (x, x+1)$ . Zde  $V$  je Lagrangeova věta. Kladnost derivace a tím i monotonie  $f$  je tím dokázána.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |

Příklad. Zkoumejte monotonii funkce

$$x + x^2 \sin \frac{2}{x}.$$



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

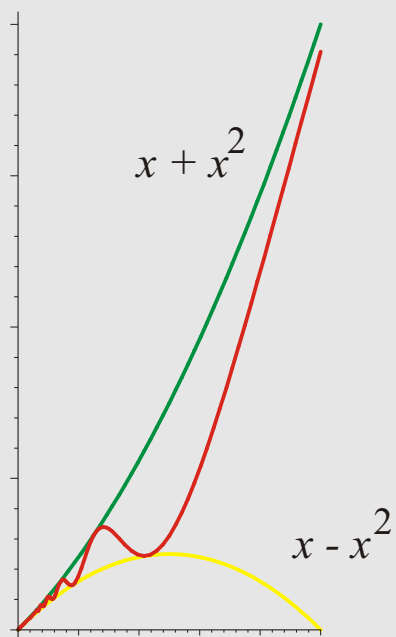
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Příklad. Zkoumejte monotonii funkce

$$x + x^2 \sin \frac{2}{x}.$$



Řešení.



### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



Příklad. Dokažte

$$e^x \geq 1 + x, x \in \mathbb{R}$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Dokažte

$$e^x \geq 1 + x, x \in \mathbb{R}$$



Příklad. Dokažte

$$x - \frac{x^2}{2} \geq \log(1 + x), x > 0$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
    max->der=0  
    Darboux  
    Rolle  
    Lagrange  
    Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
    polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Dokažte

$$e^x \geq 1 + x, x \in \mathbb{R}$$



Příklad. Dokažte

$$x - \frac{x^2}{2} \geq \log(1 + x), x > 0$$



Příklad. Dokažte

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, x > 0$$



**LEKCE07-DER**  
Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte pro kladná čísla nerovnost

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$



## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Příklad.** Dokažte pro kladná čísla nerovnost

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$



**Řešení.** Postupujeme indukcí. Zvolíme

$$f(x) = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

a dokážeme pomocí derivace, že  $f(x) \geq f(y_n)$ , kde

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$



**LEKCE07-DER**

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



**Příklad.** Dokažte pro kladná čísla nerovnost

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$



**Řešení.** Postupujeme indukcí. Zvolíme

$$f(x) = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

a dokážeme pomocí derivace, že  $f(x) \geq f(y_n)$ , kde

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$



Použijeme pro odhad  $f(y_n)$  indukční předpoklad a po úpravě dostaneme  $f(y_n) \geq 1$ , tedy je důkaz indukcí hotov.



|                       |
|-----------------------|
| <b>LEKCE07-DER</b>    |
| Derivace              |
| definice              |
| derivace->spoj        |
| konstrukce            |
| derivace součtu...    |
| složená funkce        |
| inverze               |
| derivace na intervalu |
| max->der=0            |
| Darboux               |
| Rolle                 |
| Lagrange              |
| Cauchy                |
| vyšší derivace        |
| implicitní funkce     |
| param.funkce          |
| polární souř.         |
| Poznámky              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Příklady              |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Otázky                |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Cvičení               |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |
| Učení                 |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |



A ještě pár triků z rukávu:



## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A ještě pár triků z rukávu:



Zderivováním

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

spočteme  $C_n = \cos x + 2 \cos 2x + \cdots + n \cos nx$ .



#### LEKCE07-DER

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Derivace              |  |
| definice              |  |
| derivace->spoj        |  |
| konstrukce            |  |
| derivace součtu...    |  |
| složená funkce        |  |
| inverze               |  |
| derivace na intervalu |  |
| max->der=0            |  |
| Darboux               |  |
| Rolle                 |  |
| Lagrange              |  |
| Cauchy                |  |
| vyšší derivace        |  |
| implicitní funkce     |  |
| param.funkce          |  |
| polární souř.         |  |
| Poznámky              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Příklady              |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Otázky                |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Cvičení               |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |
| Učení                 |  |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9     |  |



A ještě pár triků z rukávu:



Zderivováním

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

spočteme  $C_n = \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx$ .



To jsem se potěšil.



#### LEKCE07-DER

- Derivace
- definice
- derivace->spoj
- konstrukce
- derivace součtu...
- složená funkce
- inverze
- derivace na intervalu
  - max->der=0
  - Darboux
  - Rolle
  - Lagrange
  - Cauchy
- vyšší derivace
- implicitní funkce
- param.funkce
  - polární souř.
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



A ještě pár triků z rukávu:



Zderivováním

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

spočteme  $C_n = \cos x + 2 \cos 2x + \cdots + n \cos nx$ .



To jsem se potěšil.



#### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |



BTW, zderivoval jsem to ještě párkrát. Povinnost ...

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 9.

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# UČENÍ

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Učení 1 :

$$f'(x_0) \stackrel{?}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Tomuhle dobře rozumím,  
vysvětlit nic nepotřebuju.



### LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Učení 1 :

$$f'(x_0) \stackrel{?}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Tomuhle dobře rozumím,  
vysvětlit nic nepotřebuju.



Asi bych ti to ani vysvětlit  
nedokázal.

### LEKCE07-DER

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| Derivace              |                   |
| definice              |                   |
| derivace->spoj        |                   |
| konstrukce            |                   |
| derivace součtu...    |                   |
| složená funkce        |                   |
| inverze               |                   |
| derivace na intervalu |                   |
| max->der=0            |                   |
| Darboux               |                   |
| Rolle                 |                   |
| Lagrange              |                   |
| Cauchy                |                   |
| vyšší derivace        |                   |
| implicitní funkce     |                   |
| param.funkce          |                   |
| polární souř.         |                   |
| Poznámky              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady              | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky                | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení               | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení                 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Konec učení 1.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Učení 2 :

### LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 2.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 3 :

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 3.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 4 :

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Konec učení 4.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 5 :

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 5.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 6 :

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 6.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 7 :

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 7.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 8 :

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Konec učení 8.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Učení 9 :

## LEKCE07-DER

Derivace  
definice  
derivace->spoj  
konstrukce  
derivace součtu...  
složená funkce  
inverze  
derivace na intervalu  
max->der=0  
Darboux  
Rolle  
Lagrange  
Cauchy  
vyšší derivace  
implicitní funkce  
param.funkce  
polární souř.  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 9.

## LEKCE07-DER

Derivace

definice

derivace->spoj

konstrukce

derivace součtu...

složená funkce

inverze

derivace na intervalu

max->der=0

Darboux

Rolle

Lagrange

Cauchy

vyšší derivace

implicitní funkce

param.funkce

polární souř.

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9