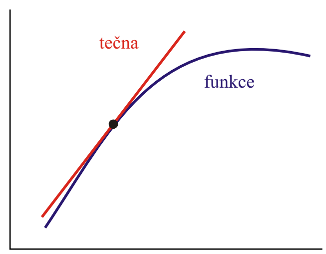
Derivace funkce

Derivace je jedním z hlavních nástrojů matematické analýzy. V příští části ukážeme, jak mnoho různorodých aplikací derivace má.

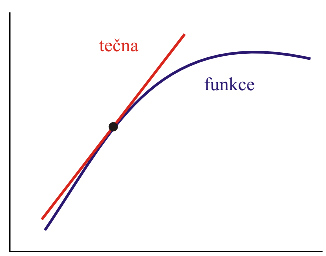
Tato část je věnována základním vlastnostem derivace a jejím výpočtům.

Geometricky lze derivaci funkce v nějakém bodě chápat jako směrnici tečny grafu této funkce v daném bodě.

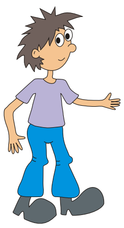


Tečna jako přímka je grafem nejjednodušší funkce, tzv. lineární funkce a do jisté míry aproximuje funkci v nejbližším okolí bodu dotyku.

Z této představy asi už lze poznat proč se derivace tolik používají.



Jde tedy v podstatě o lineární aproximaci funkce.



Ještě že se nechtějí kvadratické aproximace.

Na aproximace vyšších řádů si počkáme do další kapitoly.

Definice bude uvedena v obecném tvaru a derivace funkce f bude definována v hromadných bodech $\mathcal{D}(f)$, které do $\mathcal{D}(f)$ náleží.

Největší použití v dalších částech bude ovšem případ, kdy definiční obor f je interval a definice derivace má tedy smysl v každém jeho bodu (každý bod intervalu je jeho hromadným bodem).

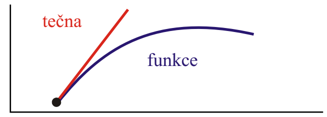
DEFINICE. Nechť c je hromadný bod definičního oboru funkce f. Jestliže existuje

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \,,$$

označíme ji $f'(c)$ a nazveme derivací funkce f v bodě c.

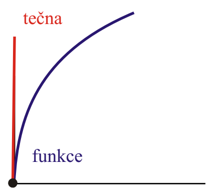
Definiční obor derivace f' je $\{c \in \mathcal{D}(f); f'(c) \in \mathbb{R}\}$ a je tedy vždy částí definičního oboru funkce f (i když se funkce f' dá rozšířit na větší množinu).

Vezmeme-li v definici $f'(c)$ limitu zprava (resp. zleva), dostaneme derivaci zprava $f'_+(c)$ (resp. derivaci zleva $f'_-(c)$).



Jednostranná derivace je jako jednostranná tečna.

Jde o tečnu, bere se i „tečna" ve svislém směru.

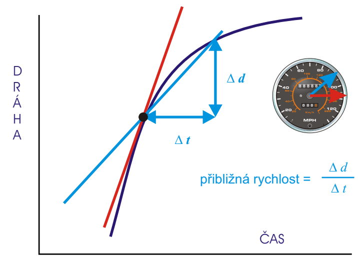


Derivace nemusí být konečná.

Značení derivací je více a každá volba má některé výhody a některé nevýhody: pro funkci $y = f(x)$ se derivace y' v bodě c často značí jako symbol $\frac{dy}{dx}(c)$ nebo $\frac{df}{dx}(c)$.

U tohoto značení se pozná, která proměnná se derivuje, stejně tak u značení (používaného hlavně pro funkce více proměnných) $f_x(c)$.

Koukejte se na to jednoduše. Derivace je prostě limita. Sice jiné funkce, ale to je jedno.



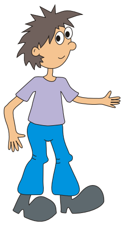
Ten zlomek v limitě pro derivaci odpovídá průměrné rychlosti, jak se funkce mění. Limitou získáme „okamžitou rychlost".

Zase je tu jeden malý prolémek. Při osové symetrii v rovině se bod P zobrazí na bod P'. Při derivování se funkce f zobrazí na funkci f'. Nejsem potížista, ale nahlásit by se to mělo.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 Učení 1

DERIVACE A SPOJITOST

Vlastní derivace je silná vlastnost. Plyne z ní spojitost.



Smůla že ne naopak.

VĚTA. Má-li funkce v nějakém bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Důkaz. Má-li funkce f v a derivaci, je a hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Pokud f není v a spojitá, existuje ryze monotónní posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k a taková, že existuje $\lim f(x_n) \neq f(a)$, tj., $\lim(f(x_n) - f(a)) \neq 0$.

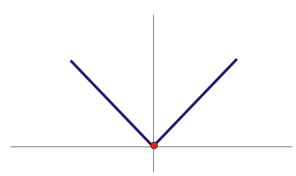
Potom

$$\lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \text{ je nevlastní },$$

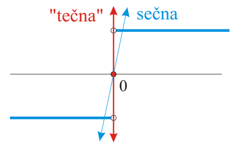
a tedy derivace f v a nemůže být vlastní. $\diamond$

Cítíte taky ty vibrace. Ten důkaz je geniální !!!

Podobně pro jednostrannou derivaci a jednostrannou spojitost. Jestliže má tedy funkce v nějakém bodě obě jednostranné derivace vlastní (mohou být různé), je v tomto bodě spojitá.



Spojitá funkce nemusí mít derivaci.



Nevlastní derivace nezaručuje spojitost. U funkce sign nejde o tečnu.

Poznámky 2 Příklady 2

DERIVACE A KONSTRUKCE FUNKCÍ

Dozvíme se, jak se počítají derivace součtu a součinu, složené funkce a podobně.

Jsou to jakési derivace v prášku. Místo počítání derivací jako limit si zvykneme na vzorečky. Moc se to bude hodit při výpočtech.

Nevyskytují se tu konstrukce funkcí pomocí uspořádání (např. max) protože v takových případech nemusí derivace ani u jednoduchých funkcí existovat.

Aritmetické operace

VĚTA. Nechť c je bodem i hromadným bodem $\mathcal{D}(f+g)$ a nechť funkce f, g mají v bodě c vlastní derivaci. Pak platí:

1. $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
2. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$
3. pro $g(c) \neq 0$ je

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} .$$

Důkaz. 1. První rovnost se dostane přímým použitím věty o limitě součtu funkcí:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \\
&= f'(a)+g'(a)\,.
\end{aligned}$$

Kouzelná jednoduchosti.

2. Derivace součinu je o něco složitější a použije se věta o limitě součtu i součinu:

$$\begin{aligned}
(f.g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f.g)(x)-(f.g)(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)-f(a).g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{g(a)(f(x)-f(a))+f(x)(g(x)-g(a))}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \\
&= g(a)f'(a)+f(a)g'(a)\,.
\end{aligned}$$

V poslední rovnosti se využilo spojitosti funkce f v bodě a (má tam vlastní derivaci).

Byl tam TRIK !!! Byl tam TRIK !!! Byl tam TRIK !!! Něco se přičetlo a odečetlo.

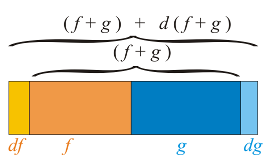
3. Postup při získání derivace podílu je stejný jako u jako derivace součinu:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)})}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{g(a)f(x)-f(a)g(x))}{g(x)g(a)}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a)))}{g(x)g(a)}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\lim_{x\to a}g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \\
&= \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}\,.
\end{aligned}
$$

Opět bylo pro poslední rovnost použito skutečnosti, že g je spojitá v a. ◇

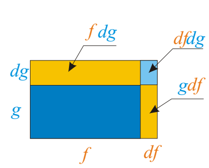
Použili jsme někde nějakou větu? ANO.

Tvrzení o součtu má jednoduchou geometrickou interpretaci.



Přírůstek plochy odpovídající součtu f a g je součtem přírůstků jednotlivých funkcí.

Tvrzení o součinu má jednoduchou geometrickou interpretaci.

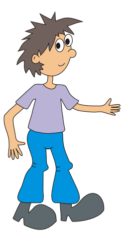


Zvětšování plochy odpovídající $f.g$ dá vzniknout třem obdélníkům. Dva větší odpovídají vzorečku pro derivaci součinu, třetí je řádově menší a v limitě (jde o první řád) se ztratí.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f, g mají v bodě c vlastní derivaci a $p, q \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$(pf)'(c) = pf'(c)\,, \quad (f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)\,, \quad (pf+qg)'(c) = pf'(c) + qg'(c)\,.$$

Recepty do kuchařky.



Za jakoukoliv dobrou vůli předem děkuji.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Skládání

Vzorec pro derivaci složené funkce patří mezi nejužívanější vzorce při počítání derivací.

Vzorec je jednoduchý, ale při jeho používání u složitějších funkcí se musí dávat velký pozor !!!

VĚTA. Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě c a funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(c)$, kde c je hromadným bodem $\mathcal{D}(f \circ g)$.

Pak $f \circ g$ má vlastní derivaci v bodě c a platí

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c) \, .$$

Důkaz. Dokazuje se rovnost $\lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = f'(g(c))\, g'(c)$.

Vezme se libovolná prostá posloupnost $\{x_n\}$ z definičního oboru funkce $f \circ g$ konvergující k c. Zvolí se taková její podposloupnost $\{x_{k_n}\}$, že buď $g(x_{k_n}) \neq g(c)$ pro všechna n nebo $g(x_{k_n}) = g(c)$ pro všechna n (potom $g'(c) = 0$).

V prvním případě je (pro jednoduchost se předpokládá $k_n = n$):

$$\lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{x_n - c} = \lim \left(\frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{g(x_n) - g(c)} \; \frac{g(x_n) - g(c)}{x - c} \right) =$$
$$\lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{g(x_n) - g(c)} \; \lim \frac{g(x_n) - g(c)}{x_n - c} = f'(g(c))\, g'(c) \, .$$

Ve druhém případě je

$$\lim \frac{f(g(x_n)) - f(g(c))}{x_n - c} = 0 \, ,$$

což je opět $f'(g(c))\, g'(c)$. Podle 4. základní vlastnosti limity posloupnosti je důkaz dokončen. $\diamond$

DŮSLEDEK. Derivace liché (sudé) funkce je sudá (resp. lichá) funkce.

Japato asi bude ...

Poznámky 4   Příklady 4   Otázky 4   Cvičení 4

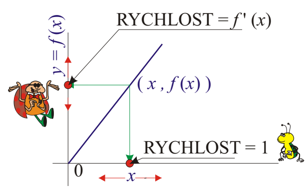
Inverzní funkce

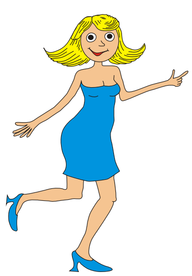
Inverzní funkce k f, pokud existuje, je určena jednoznačně funkcí f a její vlastnosti lze popsat pomocí vlastností f.

Zde to nebude jednoduché.

Zde se dělá hodně chyb, a s tím nic nenaděláme.

Moje oblíbená věta. Tady udělám chybu rád.





Jsi dvakrát rychlejší odpovídá derivaci 2. Jsi dvakrát pomalejší odpovídá derivaci 1/2.

Následující tvrzení popisuje, jak lze i derivaci inverzní funkce k f vypočítat pomocí derivace funkce f.

VĚTA. Nechť je funkce f spojitá a prostá na intervalu J a má na něm derivaci. Pak její inverzní funkce g má na $f(J)$ derivaci

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

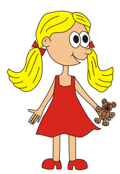
přičemž v případě $f'(g(x)) = 0$ se chápe převrácená hodnota jako $+\infty$ nebo $-\infty$ podle toho, je-li f rostoucí nebo klesající.

Důkaz. Nechť $a \in f(J)$ a $\{y_n\}$ je ryze monotónní posloupnost v $f(J)$ konvergující k a. Pro $x_n = g(y_n)$, $c = g(a)$ platí $x_n \to c$ (proč?) tedy $\lim \frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} = f'(c)$. Potom je pro $f'(c) \neq 0$

$$\lim \frac{g(y_n) - g(a)}{y_n - a} = \lim \frac{x_n - c}{f(x_n) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(a))}\,.$$

Protože f je ryze monotónní, jsou i posloupnosti uvedených zlomků ryze monotónní. Proto v případě $f'(c) = 0$ konvergují uvedené zlomky k $+\infty$, je-li f rostoucí a k $-\infty$, je-li f klesající. $\diamond$

To, že má inverzní funkce derivaci $1/f'$ je samozřejmé. Problém je, když se má napsat v kterém bodě a nemůže se přitom ukazovat prstem na obrázek.



Ukazovat prstem se nemá.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 Cvičení 5

DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU

Má-li funkce vlastní derivaci v každém bodě nějakého intervalu, vyplývají z toho pro funkci a pro její derivaci některé důležité vlastnosti.

První vlastnost (tzv. Darbouxova vlastnost) derivace o zobrazování intervalu je obdobná vlastnosti spojitých funkcí (Bolzanova věta); zde však nebude třeba předpokládat, že derivace je spojitá.

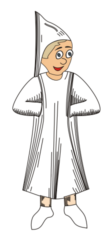
Další vlastnost je i tzv. Rolleova věta o existenci bodu s nulovou derivací. Poslední dvě věty jsou tzv. *věty o střední hodnotě*, které se budou často používat.

Jsou to opravdu známé věty !!! První jsem se dozvěděl nedávno a tu druhou znám od kolíbky.

Nejprve pomocnou větičku.

LEMMA. Nechť má funkce f v bodě $c \in (a,b)$ maximální nebo minimální hodnotu na (a,b). Jestliže $f'(c)$ existuje, musí být rovna 0.

Důkaz. Nechť např. $f'(c) > 0$. Pak podle věty o vztahu limity a uspořádání platí pro $x \in U \setminus \{c\}$, kde U je nějaké okolí bodu c, nerovnost $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ a tedy je $f(x) > f(c)$ pro $x \in U, x > c$ a $f(x) < f(c)$ pro $x \in U, x < c$. V bodě c tedy f nemá ani minimální ani maximální hodnotu na (a,b). ◇



To je můj dárek k Mezinárodnímu dni dětí.

Darbouxova vlastnost

VĚTA. Nechť interval J je částí definičního oboru vlastní derivace funkce f. Pak $f'(J)$ je buď bod nebo interval.

Důkaz. Postup důkazu je podobný důkazu Bolzanovy věty. Nechť $p \in (f'(a), f'(b)) \subset \mathbb{R}$ pro nějaká $a, b \in J$. Nejdříve nechť $p = 0$ a tedy $f'(a) < 0, f'(b) > 0$, např. pro $a < b$.

Protože f je spojitá (existuje vlastní derivace), podle Weierstrassovy věty o maximu a minimu spojité funkce dosahuje na $[a,b]$ nejmenší hodnoty, např. v bodě c. Je vidět, že $c \in (a,b)$, neboť kdyby např. $c = a$, pak (viz předchozí důkaz) $f(x) < f(a) = f(c)$ pro blízká $x > a$. Podle předchozího lemmatu je $f'(c) = 0 = p$.

V obecném případě se položí $g(x) = f(x) - px$. Potom $0 \in (g'(a), g'(b))$ a tedy podle předchozích úvah existuje c mezi a, b tak, že $g'(c) = 0$ a tedy $f'(c) = p$. ◇

DŮSLEDEK. Jestliže funkce f má vlastní derivaci na intervalu J, tak

1. f' nemá na J žádné skoky (tj., body nespojitosti derivace jsou body oscilace),
2. je-li f' monotónní, je spojitá.

Důkaz. První část tvrzení je zřejmá, druhá vyplývá z tvrzení, že monotónní funkce bez skoků je spojitá. ◇

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

Věty o střední hodnotě

Následující větu lze chápat buď jako pomocné tvrzení pro další dvě věty (Lagrangeovu a Cauchyovu větu) anebo jako základní větu, z které obě další věty snadno vyplývají.

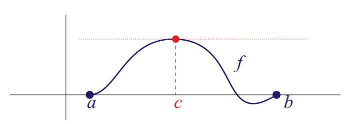
Geometricky obě následující věty říkají, že za daných podmínek vždy existuje tečna ke grafu funkce rovnoběžná se spojnicí krajních bodů.

Cauchyova věta pak nalézá vhodný bod pro dvě funkce současně. Jiný přístup k této větě umožní výpočet přírůstku funkce pomocí derivace.

Až to nastane, budete si přát, aby to nenastalo.

VĚTA. **(Rolleova věta)** Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a,b]$ a má derivaci všude v otevřeném intervalu (a,b). Jestliže $f(a)=f(b)$, pak existuje $c\in(a,b)$ takové, že $f'(c)=0$.

Důkaz. Podle Weierstrassovy věty dosahuje f na $[a,b]$ své největší i nejmenší hodnoty. Není-li f konstantní (pak f' je nulová funkce a není co dokazovat), je jedna z těchto hodnot různá od $f(a)=f(b)$; tedy je to hodnota v nějakém bodě $c\in(a,b)$. Podle předchozího lemmatu je $f'(c)=0$. $\diamond$



Ten bod dotyku lehce najdeme.

VĚTA. **(Lagrangeova věta)** Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a,b]$ a má derivaci všude v otevřeném intervalu (a,b). Pak existuje $c\in(a,b)$ takové, že

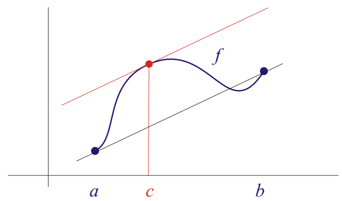
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Důkaz. Funkce

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$$

splňuje předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje $c\in(a,b)$ takové, že $g'(c)=0$, tudíž $f'(c)$ má hledanou hodnotu. $\diamond$

V podstatě odečteme lineární funkci a převedeme na předchozí větu.



Není co řešit.

DŮSLEDEK. Jestliže má funkce na intervalu derivaci rovnu 0, je na tomto intervalu konstantní.

Tak si tu klidně děláme matiku a ono to opravdu vypadá k světu. To tvrzení je opravdu silné.

DŮSLEDEK. (O jednostranné derivaci) Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a je spojitá zprava v bodě a. Jestliže existuje $\lim\limits_{x \to a_+} f'(x)$, pak se rovná $f'_+(a)$.

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x \to a_+} f'(x) = A$. Podle Lagrangeovy věty existuje pro každé $x \in (a, b)$ bod $c_x \in (a, x)$ tak, že $f'(c_x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$.

Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ v (a, b) konvergující k a konverguje i posloupnost $\{c_{x_n}\}$ k a. Proto je

$$A = \lim f'(c_{x_n}) = \lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} .$$

Protože $\{x_n\}$ byla libovolná, je $f'_+(a) = A$. $\diamond$

Takové použití Lagrangeovy věty potěší. Je do opravdu pěkné.

Tak to je už opravdu matematika. Už vám v hospodě neporozumí a pivo s jednostrannou derivací nenalejou.

Teď se nadechněte a nedýchejte.

VĚTA. **(Cauchyova věta)** Nechť funkce f, g jsou spojité na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a mají derivaci všude v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)) .$$

Důkaz. Funkce

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

splňuje předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že $h'(c) = 0$, což dává hledanou rovnost. $\diamond$

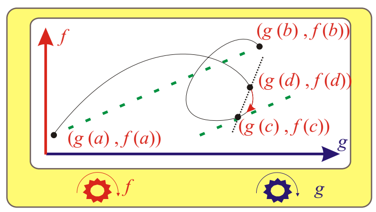
Zase jsme si nachystali jakousi pomocnou funkci, pro kterou jsme použili Rolleovu větu. Kde se ta pomocná funkce vzala, to je nedůležitá otázka. Asi to není triviální.

Speciálně, když g' nenabývá hodnoty 0 v (a, b), existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Pro $g(x) = x$ jde zde o Lagrangeovu větu. Tedy je Cauchyova věta pouze jakousi deformací Lagrangeovy věty. Tu deformaci dělá derivovatelná funkce g.

Při troše snahy uvidíme Cauchyovu větu v následujícím obrázku.



V hledaném bodě bude tečna ke křivce odpovídat spojnici krajních bodů. Mimochodem, ta klička tam nemá co dělat, pokud g bude monotónní.

Ta věta vypadá tak nepoužitelná, že jsem si ji zařadil do sbírky kuriozit. Pak jsem se dozvěděl její důsledky, ale stejně nechápu, kdo, proč a jak jí vymyslel.

Je to prostě Lagrangeova (Rolleova) věta s jakousi modifikační váhovou funkcí g. A náhodou to funguje.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7 Cvičení 7

Derivace vyšších řádů

Protože derivace f' funkce f je opět funkce, je možné vzít derivaci $(f')'$ funkce f'.

Dostane se tzv. druhá derivace funkce f, která se značí stručněji f''.

Můžeme definovat obecně:

DEFINICE. Pro $n \in \mathbb{N}$ se definuje indukcí $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, kde $f^{(0)} = f$. Funkce $f^{(n)}$ se nazývá n-tá derivace funkce f.

Jak už bylo výše naznačeno, druhá derivace se místo $f^{(2)}$ značí f'' a podobně třetí derivace f'''. Pro čtvrtou derivaci jsou už 4 čárky méně vhodné.

Pokud se použije značení $\frac{dy}{dx}$ pro derivaci, lze druhá derivace vyjádřit formálně pravidly pro úpravu zlomků

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\,.$$

Obecně se n-tá derivace značí $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Pro derivace vyšších řádů lze samozřejmě použít odpovídající tvrzení pro derivace.

Např.

1. existuje-li v bodě c vlastní derivace třetího řádu, je druhá derivace v c spojitá

2. $(f+g)^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + g^{(n)}(c)$, *má-li pravá strana smysl.*

Obdoba posledního tvrzení pro součiny už není zcela triviální a je nutné je dokázat (viz *Otázky*):

VĚTA. Nechť funkce f, g mají v bodě c vlastní derivace až do řádu n včetně. Pak platí

$$(f \cdot g)^{(n)}(c) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(c) g^{(n-i)}(c)\,.$$

Pro podíl jednoduchý vzorec neexistuje.

Implicitně a parametricky zadané funkce

Implicitně zadané funkce

Implicitně zadaná funkce f se zpravidla zadává rovnicí ve tvaru $F(x,y)=0$, kde F je funkce dvou proměnných a proměnná $y=f(x)$ se chápe jako funkce proměnné x, pro které platí uvedená rovnost (tj., grafem funkce f je množina $\{(x,y);F(x,y)=0\}$).

Jak bylo uvedeno v části o implicitně zadaných funkcích, takto zadaná implicitní funkce není obecně funkcí ve smyslu definice funkce. Nicméně bývá funkcí „po částech" a velmi často se používá.

Definice implicitně zadané funkce už naznačuje, jak se bude derivovat. Pro začátek je vhodné psát proměnnou y ve tvaru, ze kterého je vidět, že je funkcí x, tj. např. jako $y(x)$.

Rovnost $F(x,y(x))=0$ se derivuje podle proměnné x pomocí věty o derivaci složené funkce. Např. pro rovnost $x^2y^3-\sin(xy)=0$ je první derivace funkce y podle x vyjádřena vztahem:

$$(2x\cdot y^3(x)+x^2\cdot 3y^2(x)y'(x))-(\cos(x\cdot y(x))\cdot(1\cdot y(x)+x\cdot y'(x))=0\,.$$

Tedy mocnina $y^3(x)$ má derivaci podle x rovnou derivaci vnější funkce (třetí mocnina) vynásobenou derivací vnitřní funkce (tj. derivací funkce $y(x)$, což je $y'(x)$).

Z dosažené rovnosti (pokud vše v rovnosti má smysl, což v uvedeném příkladu má) lze vypočítat y' za předpokladu, že koeficient u y' není roven 0:

$$y'=\frac{y\cos(xy)-2xy^3}{3x^2y^2-x\cos(xy)}\,,$$

pro $3x^2y^2-x\cos(xy)\neq 0$.

Obdobně se postupuje u derivací vyšších řádů. Např. u předchozího příkladu se druhá derivace dostane (už bez dodatečného označení proměnné x u y) ze vztahu

$$2y^3+2\cdot 2x\cdot 3y^2y'+x^2\cdot 6y(y')^2+x^2\cdot 3y^2y''+\sin(xy)\cdot((y+xy')^2-\cos(xy)\cdot(2y'+xy'')=0$$

Odtud lze opět vypočítat y'', protože má stejný koeficient jako byl v dřívější rovnosti u y'. Na pravé straně se bude vyskytovat y'; pokud to vadí, lze za ní dosadit předchozí vypočtenou rovnost.

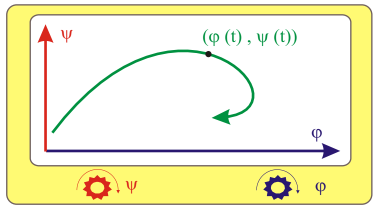
Na nějakém intervalu platí identita $F(x,y(x))=0$, tedy jde o jakousi nulovou funkci, která má samozřejmě nulovou derivaci. Nic jiného v tom není.

Parametricky zadané funkce

Parametricky zadaná funkce má tvar $y=\varphi(t), x=\psi(t)$, kde t probíhá nějakou zadanou množinu na reálné přímce (většinou interval).

Opět se chápe proměnná y jako funkce proměnné x prostřednictvím parametru t.

Grafem je množina $\{(x,y);\ \text{existuje } t \text{ tak, že } y=\varphi(t), x=\psi(t)\}$. Obdobně jako u implicitně zadané funkce není takto zadaná funkce obecně funkcí ve smyslu definice funkce. Opět však bývá funkcí „po částech" a opět se velmi často používá.



Jestliže lze pro nějaký bod (x, y) grafu parametricky zadané funkce počítat derivaci, musí být x v nějakém svém okolí jednoznačně určeno parametrem t, tj., v tomto okolí existuje $\psi^{-1}(x)$ a potom $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$.

Z tohoto vyjádření se snadno získá derivace podle vět o derivaci složené a inverzní funkce:

$$y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \, .$$

Tento vzorec lze snadno zapamatovat při značení derivace zlomky (použitím úpravy složeného zlomku):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \, .$$

Dík.

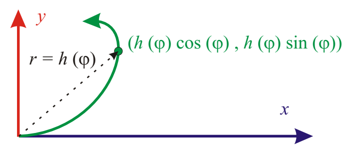
Stejným způsobem se dostanou derivace vyšších řádů.

Např. druhá derivace je derivace parametricky zadané funkce $y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}, x = \psi(t)$, takže

$$y'' = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^3(t)} \, .$$

Je to kalkulus. Jsou to návody, jak zvládnout technicky náročné situace. Je za tím opravdová matematika, ale pro použití technik nás nesmí příliš zatěžovat.

Polárně zadané funkce $r = h(\varphi)$, kde h je nějaká funkce a proměnná φ probíhá nějakou podmnožinu reálných čísel (často interval $[0, 2\pi)$) jsou speciálním případem parametricky zadaných funkcí neboť $y = h(\varphi)\sin(\varphi), x = h(\varphi)\cos(\varphi)$.



Z předchozího vzorce pro derivaci parametricky zadané funkce vyplývá následující vzorec pro derivaci polárně zadané funkce:

$$y' = \frac{h'(\varphi)\sin\varphi + h(\varphi)\cos\varphi}{h'(\varphi)\cos\varphi - h(\varphi)\sin\varphi}\,.$$

Kde takové věci použít necháme na čtenáři.

To zařídím s radostí.

Poznámky 9 Příklady 9 Otázky 9 Cvičení 9

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Derivace funkce f v bodě c existuje, jestliže c je hromadný bod $\mathcal{D}(f)$ (aby měla smysl příslušná limita) a náleží do $\mathcal{D}(f)$ (protože v limitním výrazu se vyskytuje hodnota $f(c)$) a příslušná limita existuje (může být i nevlastní).

Formálně jiné vyjádření derivace se získá položením $x = c + h$ v definici derivace:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\,.$$

Tento popis je vhodný při některých výpočtech (viz např. derivace funkce sinus v *Příkladech*).

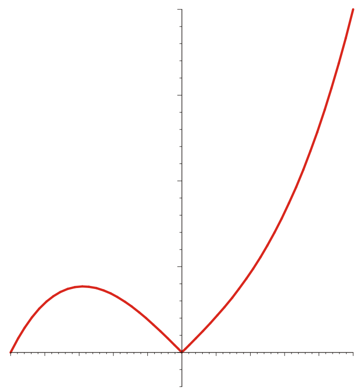
Derivace zprava (popř. zleva) v bodě c existuje právě když existuje derivace funkce f zúžené na množinu $[c, +\infty) \cap \mathcal{D}(f)$ (popř. $(-\infty, c] \cap \mathcal{D}(f)$).

Má-li f za definiční obor interval $[c, b)$, pak derivace f v c a derivace zprava f v c jsou totožné pojmy.

Jestliže má v bodě c smysl mluvit o derivaci f zprava a zleva, pak f má v c derivaci právě když tam má derivaci zprava a derivaci zleva a obě tyto jednostranné derivace se rovnají.

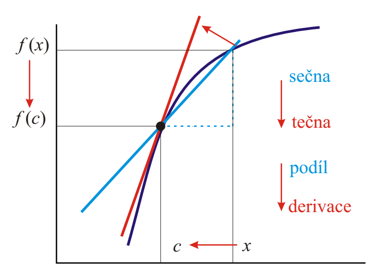
Jestliže má f v c derivaci, má v c aspoň jednu jednostrannou derivaci.

Jestliže je f v c spojitá a má v c obě jednostranné derivace, ale různé, říká se, že f má v c *hrot* (neboť graf f má v c jakýsi zlom).



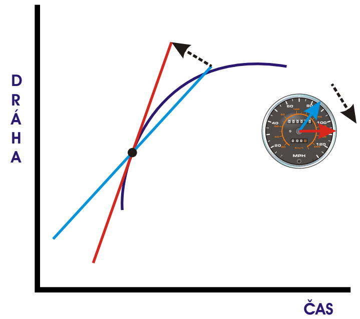
To je ve skutečnosti často bod, kde se napojují dvě funkce.

Číslo $(f(x)-f(c))/(x-c)$ je směrnice přímky procházející body grafu $(c, f(c)), (x, f(x))$ (tj. jakési sečny grafu).



Jestliže se bod x přiblíží k bodu c, sečna se stane tečnou ke grafu f s bodem dotyku c. animace??

Z jiného pohledu znamená zlomek $(f(x) - f(c))/(x - c)$ změnu (např., udává-li f ujetou vzdálenost, pak zlomek udává průměrnou rychlost od času c do času x). Přechodem k limitě dostáváme hodnotu okamžité změny (okamžitá rychlost v čase c).



Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Nejsou-li splněny předpoklady věty, mohou nastat všechny možné případy (viz *Příklady*).

Příklady spojitých funkcí, které nemají v některém bodě derivaci, jsou poměrně jednoduché.

Trochu složitější jsou příklady funkcí, které nemají v některých bodech ani jednostranné derivace.

Existují i spojité funkce na $\mathbb{R}$, které nemají derivaci ani v jednom bodě. Konstrukce těchto funkcí je složitá (pomocí limit posloupností funkcí nebo součtu nekonečných řad funkcí).

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

Ve větě nelze vynechat předpoklad o existenci vlastních derivací obou funkcí v daném bodě a chápat platnost rovností za předpokladu, že jedna strana má smysl.

Např. u derivace součtu stačí vzít $g = -f$, pak levá strana je nulová a pravá strana nemusí mít smysl (buď $f'(c)$ neexistuje nebo je nevlastní).

Podobně je tomu u dalších dvou rovností (najděte příklady). Větu však lze zobecnit pro nějaké případy nevlastních derivací, jestliže pravé strany budou mít smysl (viz *Otázky*).

Uvedené vzorce dávají návod, jak počítat derivace polynomů, racionálních funkcí (proměnné x i jiných proměnných, např. trigonometrických funkcí) – viz *Příklady*.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Vzorec pro derivaci složené funkce se dá snadno zapamatovat v následující formulaci (za předpokladu, že existují příslušné derivace):

Jestliže $z = f(y), y = g(x)$, pak

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} .$$

Formálně se tedy jedná o krácení při součinu zlomků.

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Použití věty o derivace inverzní funkce je jednoduché, jen je nutné dávat pozor na to, která proměnná je závislá a která nezávislá.

Např. funkce $y = \sqrt{x}$ je inverzní k $x = y^2$ na intervalu $[0, +\infty)$. Derivace funkce $x = y^2$ je $2y$, její převrácená hodnota je $\frac{1}{2y}$ a za y se musí dosadit původní funkce, takže výsledkem je $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pro $x \neq 0$, což už bylo vypočteno přímo z definice derivace.

Pro $x = 0$ je podle věty hodnota derivace $+\infty$, a to také odpovídá dřívějšímu výpočtu.

Má-li spojitá funkce f na intervalu J inverzní funkci g (s definičním oborem $f(J)$), je pro body x, y ekvivalentní $y = f(x)$ s $x = g(y)$.

Pak vzorec o derivaci inverzní funkce lze psát pomocí „zlomků":

$$g' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'}\,.$$

Konec poznámek 5.

Poznámky 6:

Lemma je pro další použití velmi důležité, protože naznačuje, kde hledat maximální nebo minimální hodnoty funkce. Geometricky je to názorné: jestliže má funkce v bodě c např. maximální hodnotu, musí graf v tomto bodě měnit stoupání na klesání a tečna v tom bodě bude rovnoběžná s osou x.

Víme, že spojité funkce zobrazují interval na bod nebo na interval.

Podle právě dokázané věty mají tutéž vlastnost funkce, které jsou derivacemi nějakých funkcí.

Na začátku části o integrálním počtu bude ukázáno, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu je derivací nějaké funkce.

Obrácená implikace neplatí: existují funkce definované na nějakém intervalu, které mají nespojité derivace. Existují tedy na nějakém intervalu i nespojité funkce, které mají Darbouxovu vlastnost.

Těžší je ukázat, že existují na nějakém intervalu funkce s Darbouxovou vlastností, které nejsou derivací žádné funkce. (Vzpomeňte na úvodní kapitolu o reálných funkcích, kde bylo řečeno, že existuje funkce na $\mathbb{R}$, která zobrazuje libovolný interval na celé $\mathbb{R}$ – tato funkce tedy má Darbouxovu vlastnost a není derivací žádné funkce).

Konec poznámek 6.

Poznámky 7:

Rolleova věta je důsledkem Lagrangeovy věty (pro případ, kdy $f(a) = f(b)$) a Lagrangeova věta je důsledkem Cauchyovy věty (pro případ $g(x) = x$).

V uvedených tvrzeních není nutné předpokládat, že existující derivace jsou vlastní. Např. ve druhém důsledku může být $\lim\limits_{x \to a_+} f'(x) = +\infty$ a tedy $f'_+(a) = +\infty$.

První důsledek Lagrangeovy věty se zdá být triviální, ale přímý důkaz je vlastně obdobný postupu v uvedených důkazech. Tvrzení důsledku bude velmi důležité v integrálním počtu. Charakterizuje konstantní funkce na intervalu jako ty funkce, které tam mají nulovou derivaci.

Druhý důsledek dává další možnost, jak počítat derivace v nějakých špatných bodech, např. v krajních bodech intervalů nebo v bodech, kde je funkce dodefinována jiným předpisem.

Důkaz Lagrangeovy věty spočíval v odečtení přímky rovnoběžné se spojnicí obou krajních bodů grafu, čímž se graf „narovnal" do podoby potřebné v Rolleově větě.

Lagrangeova věta se nazývá větou o střední hodnotě, i když nalezený bod c nemusí ležet ve středu úsečky s krajními body a, b, ale pouze mezi těmito body.

I když více o bodu c není známo, přece jen slouží k odhadu přírůstku funkce, pokud je znám vhodný odhad derivace původní funkce. To je obsaženo v zápisu $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Např. derivace sinus je cosinus a ten je v absolutní hodnotě nejvýše 1, takže pro libovolné dva body a, b platí $|\sin a - \sin b| \leq |b - a|$.

Později bude Lagrangeova věta zobecněna pro vyšší derivace (viz Taylorova věta).

V Cauchyově větě je podstatná existence společného bodu pro podíl dvou funkcí.

Geometricky lze větu zhruba vyslovit tak, že podíl přírůstků dvou funkcí je roven podílu derivací těchto funkcí v nějakém bodě.

Existuje ještě interpretace pomocí derivace parametricky zadaných funkcí.

Konec poznámek 7.

Poznámky 8:

Pro čtvrtou a některé další derivace se občas používalo značení pomocí římských číslic, tj. f^{iv}, f^{v}, f^{vi}.

Ve vzorcích se výhodně používá rovnosti $f^{(0)} = f$ – viz např. vzorec pro n-tou derivaci součinu.

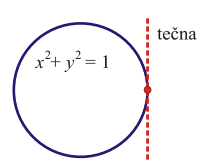
Je vhodné si uvědomit, že funkce $f^{(n)}$ mají Darbouxovu vlastnost pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ (jak je to pro $n = 0$?).

Konec poznámek 8.

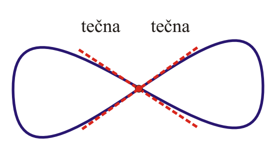
Poznámky 9:

Je vhodné si uvědomit, že implicitně nebo parametricky zadané funkce zahrnují i funkce a že popsané derivace se v tomto případě shodují s derivacemi funkcí (viz *Otázky*).

V bodech, kde je roven 0 koeficient u y' (u implicitně zadaných funkcí) nebo $\psi'(t) = 0$ (u parametricky zadaných funkcí), bývá buď tečna ke grafu v příslušném bodě rovnoběžná s osou y jako například u kružnice v bodech průsečíku s osou x,



nebo se v tom bodě protíná více větví grafu. Tato situace nastává např. u lemniskaty v počátku. Tečen je v příslušném bodě více.



V obou případech to jsou body, v jejichž okolí nelze jednoznačně určit hodnotu y. Viz *Příklady*.

Konec poznámek 9.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

Přímo z definice lze vypočítat derivace některých elementárních funkcí.

Pro funkce složitější se používají jiné postupy ukázané dále.

Je-li funkce v bodě c dodefinována jiným předpisem než v okolí c, počítá se derivace funkce v c pomocí definice (někdy zvlášť derivace zprava a derivace zleva, pokud jsou předpisy na obou stranách bodu c různé); ke konci této kapitoly ukážeme, že lze v některých takovýchto případech počítat derivaci jako limitu derivací.

1. Je-li f konstantní funkce, je její derivace všude rovna 0. V čitateli definice derivace je totiž stále 0 (ve jmenovateli není nikdy 0).

2. Nechť $f(x) = x$. Potom pro všechna c platí
$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{x-c}{x-c} = 1\,.$$

3. Nechť $f(x) = x^2$. Potom pro všechna c platí
$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{x^2-c^2}{x-c} = \lim_{x\to c}(x+c) = 2c\,.$$

4. Nechť $f(x) = \sqrt{x}$. Potom pro všechna $c > 0$ platí
$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{c}}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\,.$$
Pro $c = 0$ je derivace totožná s derivací zprava. Předchozí postup dá $+\infty$.

5. Nechť $f(x) = \frac{1}{x}$. Potom pro všechna $c \neq 0$ platí

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{-1}{xc} = -\frac{1}{c^2}\,.$$

6. Derivace funkce sinus v libovolném bodě c:

$$\begin{aligned}\sin'(c) \quad &= \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin(c+h) - \sin c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin c}{h} = \\ &\sin c \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos c \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin c \cdot 0 + \cos c \cdot 1 = \cos c\,.\end{aligned}$$

7. Funkce sign má v každém nenulovém bodě derivaci 0, jak vyplývá z prvního příkladu. Pro derivace v 0 lze např. využít toho, že pro $x \neq 0$ je $\operatorname{sign} x = x/|x|$):

$$\operatorname{sgn}'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty\,.$$

8. Derivace obecné mocniny v libovolném bodě x:

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a\,.$$

Speciálně je $(e^x)' = e^x$.

9. Derivace logaritmu $\log_a x$ v bodě c:

$$\lim_{x \to c} \frac{\log_a x - \log_a c}{x - c} = \frac{1}{c} \lim_{x \to c} \frac{\log_a (x/c)}{x/c - 1} = \frac{1}{c} \lim_{y \to 1} \frac{\log_a y}{y - 1} = \frac{1}{c \log a}\,.$$

Pro poslední limitu viz *Příklady 6* předchozí kapitoly.

Speciálně je tedy $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

Funkce sign má v 0 nevlastní derivaci a není tam spojitá.

Funkce $\sqrt[3]{x}$ má v 0 nevlastní derivaci a je tam spojitá.

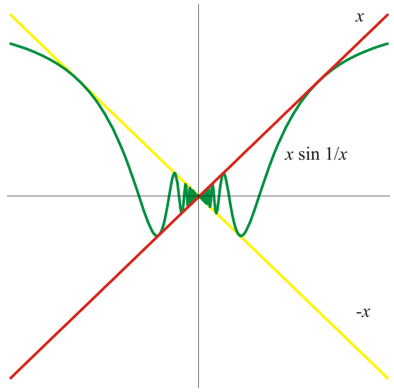
Funkce $|x|$ nemá v 0 derivaci a je tam spojitá (protože má v 0 vlastní derivaci zprava a vlastní derivaci zleva).

Funkce $|\operatorname{sign} x|$ nemá v 0 derivaci a není tam spojitá (má v 0 obě jednostranné derivace nevlastní).

Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & \text{x=0.} \end{cases}$$

je spojitá v 0 a nemá tam ani derivaci zprava ani derivaci zleva.



Konec příkladů 2.

Příklady 3:

Snadno se nyní vypočtou derivace některých součtů, např.

$$(5x^2 - 7\sin x)' = 10x - 7\cos x\,, \quad \left(\frac{3}{5x} + 2\sqrt{x}\right)' = -\frac{3}{5x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Pomocí věty o derivaci součinu lze znovu spočítat derivaci funkce x^2:

$$(x.x)' = (x)'x + x(x)' = 1.x + x.1 = 2x\,.$$

Podobně lze postupovat při vyšších mocninách:

$$(x^3)' = (x.x^2)' = 1.x^2 + x.2x = 3x^2\,, \quad (x^4)' = (x.x^3)' = x^3 + x.3x^2 = 4x^3\,.$$

Pro další mocniny viz *Otázky*.

Pomocí věty o derivaci podílu lze znovu spočítat derivaci funkce $1/x$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{0.x - 1.1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}\,.$$

Derivaci funkce $1/x^2$ lze počítat jak podle věty o derivaci součinu tak podle věty o derivaci podílu:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{0.x^2 - 1.2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}\,, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)'\frac{1}{x} = 2\frac{-1}{x^3}\,.$$

Pro další mocniny viz *Otázky*.

Jiné příklady:

$$(\sin^2 x)' = (\sin x \sin x)' = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2\sin x \cos x = \sin(2x)\,,$$

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{0\sin x - 1\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\operatorname{cotg} x}{\sin x}\,.$$

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

Postup při výpočtu derivace složené funkce, např. $\sin(x^3)$:

Nejdříve se zderivuje vnější funkce, tj. funkce $\sin$ (dostane se funkce $\cos$) a opíše se argument této vnější funkce (tj. x^3); výsledek se násobí derivací vnitřní funkce, tj. funkcí $3x^2$ a dostane se $\cos(x^3) \cdot 3x^2$.

Je-li funkce složena z více funkcí, derivují se postupně všechny vyskytující se funkce, např. u derivace $\sin\sqrt{x^3}$: Zderivuje se první funkce (tj. $\sin$) a opíše její argument (dostane se $\cos\sqrt{x^3}$) – výsledek se vynásobí derivací druhé funkce (tj. funkce druhé odmocniny) s opsaným její argumentem (dostane se $\cos\sqrt{x^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$) a tento výsledek se vynásobí derivací poslední funkce x^3; výsledkem je funkce $\cos\sqrt{x^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2$.

Je nutné dávat pozor na pořadí jednotlivých funkcí definujících složenou funkci. Např. u funkce $\sin^2 x$ je vnější funkcí druhá mocnina a vnitřní funkcí $\sin$, takže se nejdříve derivuje druhá mocnina a potom sinus – výsledkem je funkce $2\sin x \cdot \cos x$.

Ukažte pomocí rovnosti $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, že $(\cos x)' = -\sin x$ pro každé x (a tedy $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$).

Pomocí vyjádření $x^a = e^{a \log x}$ spočtěte $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Pomocí podobného vyjádření $f^g = e^{g \log f}$ se počítají derivace mocnin funkcí:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\log(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right).$$

Zamlada jsem x^x derivoval velmi zvláštním způsobem. Teď již to nedělám :-)

Konec příkladů 4.

Příklady 5:

Pro $q \in \mathbb{N}$ je funkce $y = \sqrt[q]{x}$ inverzní k $x = y^q$ (na $\mathbb{R}$ pro liché q a na $[0, +\infty)$ pro sudé q).
Protože derivace y^q je qy^{q-1}, je derivace funkce $\sqrt[q]{x}$ rovna funkci

$$\frac{1}{q(\sqrt[q]{x})^{q-1}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{\sqrt[q]{x}}{qx}$$

(v bodě $x = 0$ je derivace rovna $+\infty$).

Je-li $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, r = p/q$, derivuje se funkce x^r jako složená funkce $\sqrt[q]{x^p}$ s výsledkem

$$\frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot px^{p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}$$

na příslušném definičním oboru (s úmluvou o převrácené hodnotě 0 ve větě o derivaci inverzní funkce).

Výsledkem je stejné pravidlo, jako bylo dokázané pravidlo pro případ $r \in \mathbb{Z}$.

Cyklometrické funkce. Nechť $y = \arcsin x$, tj. $x = \sin y$. Pak

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

protože $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ a tam je $\cos y \geq 0$. V bodech ± 1 jsou derivace nevlastní $(+\infty)$.
Podobně spočtěte

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Logaritmické funkce. Nechť $y = \log_a x$, tj. $x = a^y$. Pak

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a}\,,$$

což souhlasí s výpočtem v *Příkladech 1*.

Taky to mohlo nevyjít !!!

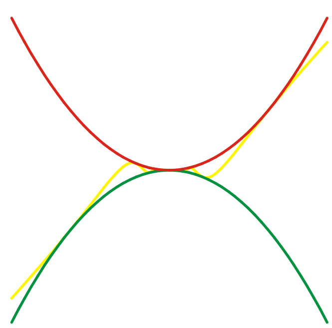
Konec příkladů 5.

Příklady 6:

Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0; \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.



Ukažte, že tato derivace není spojitá v 0.

Konec příkladů 6.

Příklady 7:

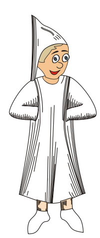
Ukažte, že obrácené tvrzení ke druhému důsledku neplatí, tj., že existuje funkce f, která má derivaci $f'_+(a)$, ale $\lim\limits_{x \to a_+} f'(x)$ neexistuje.

Návod: funkce $x^2 \sin(1/x)$.

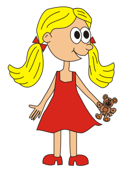
Tu jsem si chtěl nechat pro sebe. Zlobím se.

Pomocí Lagrangeovy věty ukažte, že pro $0 < a < b$ je $\sqrt{b} - \sqrt{a} < (b - a)/(2\sqrt{a})$, tj. $\sqrt{ab} < (a + b)/2$

Geometrický průměr dvou různých kladných čísel je vždy menší než jejich aritmetický průměr.



Matematická analýza je moje sluníčko.



Moje je sluníčko.

Konec příkladů 7.

Příklady 8:

Spočtěte třetí derivaci funkce $\sqrt{x}$.

Spočtěte n-tou derivaci funkce x^r pro $r \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ a $r \in \mathbb{Q}$.

Spočtěte n-tou derivaci funkcí $\sin, \cos$.

Spočtěte 57. derivaci funkcí e^x.

Konec příkladů 8.

Příklady 9:

Implicitně zadané funkce Vypočtěte derivaci funkce y proměnné x dané rovností $x^2 + y^2 = a^2$ pro $a > 0$.

Grafem takto implicitně zadané funkce je kružnice.

Derivace existují ve všech bodech kružnice kromě bodů, kde koeficient y u y' je roven 0, tedy v bodech $(\pm a, 0)$.

Může se v těchto bodech brát derivace nevlastní?

Rovnice lemniskaty s parametrem $a > 0$ je $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
Vypočtěte derivaci a uvažte, proč z geometrického hlediska v bodech, kde $y = 0$, derivace neexistuje.

Najděte druhou derivaci y'' implicitně zadané funkce tvaru $2x^3 - 3y^2 = 0$ v bodech, kde $y \neq 0$.
Upravte výsledek tak, aby neobsahoval explicitně y' a to dvěma způsoby:

1. vypočtěte y' jako zlomek, ten derivujte a do výsledku dosaďte za y' vypočtený zlomek;

2. nechte první derivaci v implicitním tvaru, derivujte ji podruhé, vyřešte rovnici pro y'' a teprve do tohoto výsledku dosaďte za y'.

Parametricky zadané funkce Vypočtěte derivaci „kružnice" zadané parametricky, tj. $y = a \sin t, x = a \cos t$ pro $t \in [0, 2\pi)$.
Srovnejte výsledek s výše vypočtenou derivací pomocí implicitně zadané kružnice. Kružnice je polárně zadaná rovnicí $r = a$ pro $\varphi \in [0, 2\pi)$. Ověřte derivaci i přes toto zadání.

Předchozí úlohu zopakujte pro lemniskatu. Její parametrické zadání je

$$y = \frac{at(1-t^2)}{1+t^4}\,, \quad x = \frac{at(1+t^2)}{1+t^4}\,, \text{ pro } t \in (-\infty, +\infty)$$

a polární zadání (přesněji implicitně polární) je

$$r^2 = a^2 \cos(2\varphi) \quad \text{pro } \varphi \in [0, 2\pi]$$

Konec příkladů 9.

OTÁZKY

Otázky 1:

Ukažte pomocí definice derivace, že Dirichletova a Riemannova funkce nemají derivaci v žádném bodě.

Pro jaká kladná a má funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

derivaci v 0? A jednostranné derivace?

Spočtěte v bodě 1/2 derivaci následující funkce:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1/2; \\ x^2, & x > 1/2. \end{cases}$$

Konec otázek 1.

Otázky 2:

Najděte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která ....

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Dokažte indukcí pomocí postupu v *Příkladech*, že pro každé přirozené číslo n

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,, \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}\,.$$

Protože první rovnost platí i pro $n = 0$ a druhá rovnost je vlastně první rovnost pro $n < 0$, platí první rovnost pro každé celé číslo n.

Nevlastní derivace V následující části se předpokládá, že c je bodem i hromadným bodem $\mathcal{D}(f+g)$ (proč je tento předpoklad nutný?) Derivace mohou být i nevlastní.
Ukažte, že $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$, jakmile má pravá strana smysl.

Ukažte, že $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$ jakmile má pravá strana smysl a buď f nebo g je spojitá v c.

Ukažte, že platí vzorec pro derivaci podílu jakmile má pravá strana smysl a g je spojitá a nenulová v c.

Více než dva faktory Dokažte indukcí vzorce pro derivaci součtu a součinu pro n funkcí $f_1, f_2, ..., f_n$, kde $n \in \mathbb{N}$ (jaké budou předpoklady?)

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} f_i)'(c) &= \sum_{i=1}^{n} f_i'(c)\,, \\
(f_1 f_2 ... f_n)'(c) &= f_1'(c) f_2(c) ... f_n(c) + f_1(c) f_2'(c) f_3(c) ... f_n(c) + \cdots \\
& \quad f_1(c) f_2(c) .. f_{n-1}'(c) ... f_n(c) + f_1(c) f_2(c) .. f_{n-1}(c) ... f_n'(c)
\end{aligned}$$

Konec otázek 3.

Otázky 4:

Jaké možnosti mohou nastat, pokud jsou ve větě o derivaci složené funkce připuštěny i nevlastní derivace? Stačí pro uvedenou rovnost předpokládat, že pravá strana má smysl?

Zformulujte příslušné tvrzení o derivaci složené funkce pro jednostranné derivace. Stačí všude předpokládat např. derivaci zprava?

Spočtěte derivaci funkce $(\operatorname{tg} x)^{\log(\sin x)}$. Ve kterých bodech je tato derivace definována?

Konec otázek 4.

Otázky 5:

Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce pro jednostranné derivace. Je možné brát všude např. derivaci zprava?

Ukažte, že pokud je známa existence derivace funkce g, která je inverzní k f, lze vzorec pro výpočet derivace funkce g získat pomocí věty o derivace složené funkce z rovnosti $f \circ g = id$.

Konec otázek 5.

Otázky 6:

Ukažte, že neplatí následující modifikace věty: Má-li f derivaci (i nevlastní) na intervalu J, pak $f'(J)$ je buď bod nebo interval.

Zkuste upravit předchozí formulaci tak, aby platila i když se připustí nevlastní derivace (a tedy neomezený interval J).

Konec otázek 6.

Otázky 7:

Ukažte, že Rolleova věta (a tedy i Lagrangeova a Cauchyova věta) neplatí, pokud vynecháme nebo oslabíme některý ze dvou předpokladů (třetí předpoklad Rolleovy věty samozřejmě není potřeba pro Lagrangeovu a Cauchyovu větu):

f je spojitá na $[a, b]$ (předpokládejte spojitost jen na $(a, b]$);

existuje derivace na (a, b) (předpokládejte, že f' neexistuje v jednom bodě (a, b)).

Může se ve druhém důsledku vynechat předpoklad, že f je spojitá zprava v a?

Já nic, já muzikant.

Konec otázek 7.

Otázky 8:

Dokažte indukcí vzorec pro n-tou derivaci součinu.

Ukažte, že pro druhou derivaci složené funkce platí vzorec

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x)) \cdot g'^2(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

za předpokladu, že všechny vyskytující se derivace existují a jsou vlastní.

Ukažte, že je-li g inverzní funkce k funkci f na nějakém intervalu, lze z předchozí rovnosti získat vzorec pro druhou derivaci funkce g:

$$g''(x) = \frac{-f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} = \frac{-f''(g(x))}{f'^2(g(x))}\,.$$

Předpoklad je, že všechny vyskytující se derivace existují a jsou vlastní. Tento předpoklad lze oslabit.

Ukažte, že pro každý polynom P existuje n tak, že $P^{(n)} = 0$ na $\mathbb{R}$. Jak souvisí takovéto nejmenší n se stupněm P? (Později bude ukázáno, že tato vlastnost charakterizuje polynomy.)

Konec otázek 8.

Otázky 9:

Jak lze funkci f vyjádřit pomocí implicitního zadání?

Pomocí parametrického zadání?

Ukažte, že derivace získané pomocí těchto zadání souhlasí s derivací funkce f.

Pomocí derivace implicitně zadaných funkcí dokažte vzorec $(x^r)' = rx^{r-1}$ pro $r \in \mathbb{Q}$, víte-li, že platí vzorec pro $r \in \mathbb{N}$.

Návod: pro $r = p/q$ použijte implicitně zadanou funkci $y^q = x^p$.

Konec otázek 9.

CVIČENÍ

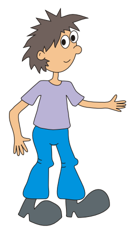
Cvičení 1:
Konec cvičení 1.

Cvičení 2:
Konec cvičení 2.

Cvičení 3:
Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Zderivujte $\sin(\cos x)$.

Řešení. Derivujeme nejdříve vnější a pak vnitřní funkci. Dostaneme $-\cos(\cos x)\sin x$.



Co jsou ty vnitřní a vnější funkce?

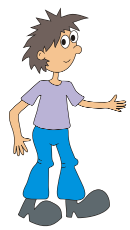
To chce cvik. Vnitřní je ta uvnitř.

Příklad. Zderivujte x^x.

Řešení. Rozepíšeme $x^x = \exp(x \log x))$ a zderivujeme jako složenou funkci.
Dostaneme $x^x(1 + \log x)$.

To je docela dobré umět nazpaměť.

Kdo bude derivovat x^x jinak, bude po zásluze odměněn.



O.K.

I já derivuju x^x podle vzorečku ($x^x(1 + \log x)$).

Podobně spočítáme pro

$$x^{x^x} = \exp(\exp(x \log x)) \log x))$$

derivaci

$$x^{x^x}\left(x^{x-1} + x^x(1 + \log x)\log x\right) .$$

Derivace obecné mocniny obvykle obsahuje jako faktor zadanou funkci.

Podobně derivujeme $f(x)^{g(x)}$.

Příklad. Dodefinujte funkci

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

v počátku limitou a zkoumejte její derivaci v počátku.

Řešení. Vidíme, že pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}\ .$$

Spočítáme pro přirozené m

$$\lim_{x\to 0} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} \overset{S}{=} [t = -\frac{1}{x^2}] \overset{S}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0\ .$$

Podobně ukážeme, že f má v počátku všechny derivace nulové.

Konec cvičení 4.

Cvičení 5: Příklad. Spočtěte derivaci funkce g inverzní k $f(x) = \sqrt{x}$.

Řešení. Máme $g(y) = x$ právě když $y = f(x)$. Pro derivaci platí vzoreček

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} = 2f(x) = 2y\ .$$

Jako po másle.

Všimli jste si toho Ypsilonu? Vypadá jako tvrdý y, ale umí, co?

Jednostranná derivace v počátku je také snadná díky jednostranné spojitosti.

Příklad. Zkoumejte derivaci funkce $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

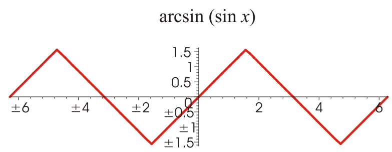
Řešení. Jde postupovat mechanicky a dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x\ .$$

To si říká o zjednodušení a vysvětlení. Vyjde ± 1, v některých bodech jednostranně.

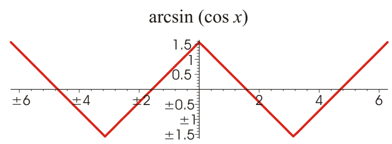
Koukám, že jde o Zubatou funkci.

Jo.



Příklad. Zkoumejte $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

Řešení. Spočítáme $f'(x) = -\operatorname{sign}(\sin x)$ pro $x \neq k\pi$, $f'_{\pm}(x) = \pm(-1)^{k+1}$ pro $x = k\pi$.



Konec cvičení 5.

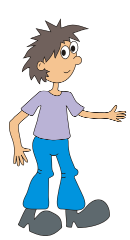
Cvičení 6:
Konec cvičení 6.

Cvičení 7: Příklad. Spočtěte derivace funkce $f(x) = |x|$.

Řešení. Pro $x \neq 0$ jde o $\pm x$ a derivace je ± 1. Jednostranné derivace v počátku spočítáme podle věty o jednostranné derivaci:

1. Funkce f je spojitá zprava v bodě 0.
2. $\lim_{x \to 0+} f'(x) = 1$.
3. Tedy $f'_{+}(0) = 1$.

Je to důležitý návyk!!!!!



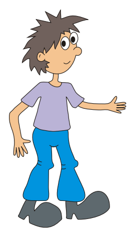
Uvidíme, co se dá dělat ...

Ať jakkoliv stručně, ale správně.

Funkce f je spojitá zprava v 0, proto

$$f'_+(0) \stackrel{V}{=} \lim_{x\to 0+} f'(x) \,,$$

kde V znamená větu o jednostranné derivaci.



Takhle to beru.

Konec cvičení 7.

Cvičení 8:

Příklad. Spočtěte osmou derivaci funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} \,.$$

Řešení. Vidíme, že

$$f(x) = -(1+x) + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + (1-x)^{-1} \,.$$

Nyní

$$f^{(viii)} \;=\; 8!(1-x)^{-9} \,.$$

Před derivováním je dobré přemýšlet ;-)

Konec cvičení 8.

Cvičení 9:

Příklad. Derivujte funkci $y = y(x)$ implicitně zadané vztahem $y^2 = 4x$.

Řešení. Derivace se snadno získá derivací vztahu podle x. Dostaneme

$$2y(x)y'(x) = 4\,.$$

Tedy $y'(x) = 2/y(x)$.

Příklad. Odvoďte vztahy pro dr/dx a $d\varphi/dx$ u polárních souřadnic.

Řešení. Pracujeme nyní v polárních souřadnicích

$$x = r\cos\varphi\,, \; y = r\sin\varphi\,.$$

Derivujeme tyto vztahy podle x (pokud jde o $y = y(x)$, $r = r(x)$ a $\varphi = \varphi(x)$) a dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dr}{dx}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dx}\sin\varphi \\ y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{dr}{dx}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dx}\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Odtud spočteme takzvané „polární derivace"

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x + yy'}{r}\;;\quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{xy' - y}{r^2}\,.$$

Pomocí těchto „polárních derivací" budeme dál počítat.

Takové vztahy nejdou pamatovat, je potřeba je vždy vypočítat.

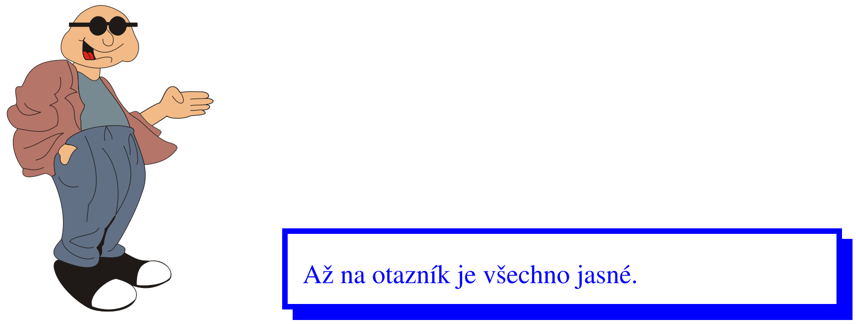
Příklad. Spočteme dy/dx pro polárně zadanou funkci $r = \varphi$ (Archimedova spirála).

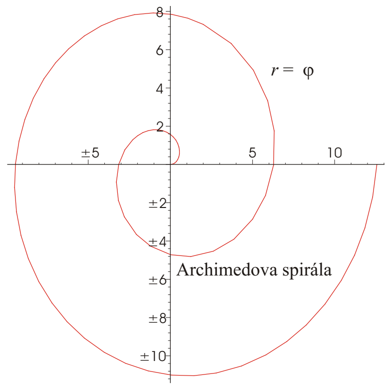
Řešení. Derivujeme podle x a dostaneme

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}\,.$$

Dosadíme sem „polární derivace" (viz výše) a z rovnice vypočítáme y' ve tvaru

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{rx + y}{x - ry} = \frac{r + \frac{y}{x}}{1 + r\frac{y}{x}} = \frac{\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{1 + \varphi\operatorname{tg}\varphi} \stackrel{?}{=} \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arctg}\varphi)$$

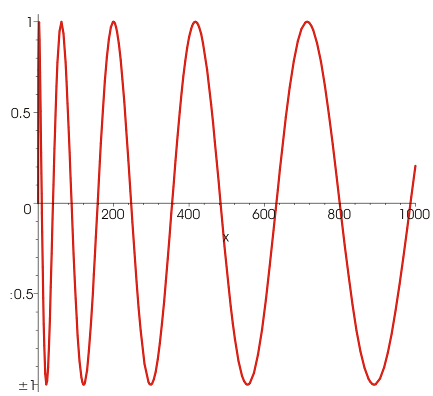




Příklad. Spočtěte F', pokud $F(x) = f(x^2)$.
Řešení. $F'(x) = f'(x^2)2x$.

Příklad. Spočtěte derivaci $F(x) = f(f(f(x)))$.
Řešení. $F'(x) = f'(f(f(x))f'(f(x))f'(x)$.

Příklad. Nechť funkce f je spojitá a derivovatelná na (x_0, ∞) a existuje $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. Musí mít f limitu v ∞?
Řešení. Ne. Volme například $f(x) = g(h(x))$ pro $g(x) = \sin x, \cos x \ldots$, $h(x) = \log x, \sqrt{x}, \ldots$.



U nekonečna čím dál pomalejc nahoru a dolu . . .

Příklad. Nechť $f(x) = (x - a)g(x)$, g spojitá v a. Pak $f'(a) = g(a)$.

Řešení. Spočteme snadno

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{(\,(a+t) - a\,)\,g(a+t)}{t} = g(a)\,.$$

Příklad. Jde Rolleova věta zobecnit na neomezený interval?

Řešení. Snadno.

Příklad. Nechť má nekonečně derivovatelná funkce f alespoň $n+1$ různých nulových bodů. Dokažte, že existuje bod x, kde je $f^{(n)}(x) = 0$.

Řešení. Pomocí opakovaného použití Rolleovy věty je to jednoduché.

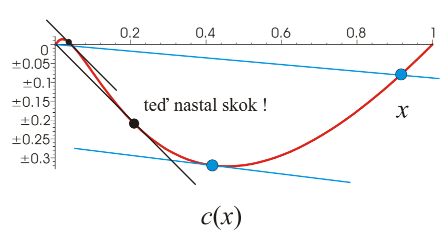
Příklad. Nechť f je spojitá na $[0,1]$ a má vlastní derivaci na $(0,1)$. Podle Lagrangeovy věty existuje pro každé $x \in (0,1)$ číslo $c(x) \in (0,x)$ tak, že platí

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \;=\; f'(c(x))\,.$$

Mužeme chtít, aby funkce $c(x)$ byla spojitá?

Je to pravý diamant! Asi ho nenajdete . . . Alespoň se můžete podívat.

Řešení. NE. Například $f(x) = x \sin\log(x)$ na $[0,1]$ dodefinovaná limitou v počátku to nedovede.



Já ho taky nenašel. Ale krásně se u něj sní ...

Příklad. Dokažte pomocí Lagrangeovy věty vztah

$$|\sin x - \sin y| \;\leq\; |x - y|\,.$$

Kdo to nevidí si nasadí brýle.

Příklad. Nechť f má na intervalu $(0, 1)$ vlastní derivaci. Pokud je f neomezená, platí to i pro f'.

Kdo to nevidí si nasadí brýle a hlavu.

Příklad. Dokažte pro $|x| \geq 1$ vztah

$$2 \operatorname{arctg} x \;+\; \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \;= \pm\pi\,.$$

Kdo to vidí, je kabrňák.

Řešení. Derivací získáme po částech konstantní funkci.

Příklad. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

je rostoucí na $(0, \infty)$.

Řešení.

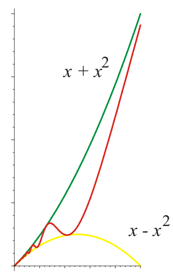
$$f'(x) = f(x)\left(\log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1}\right) \overset{V}{=} f(x)\left(\frac{1}{c(x)} - \frac{1}{x+1}\right) ,$$

kde $c(x) \in (x, x+1)$. Zde V je Lagrangeova věta. Kladnost derivace a tím i monotonie f je tím dokázána.

Příklad. Zkoumejte monotonii funkce

$$x + x^2 \sin\frac{2}{x} .$$

Řešení.



Příklad. Dokažte

$$e^x \geq 1 + x , \ x \in \mathbb{R}$$

Příklad. Dokažte

$$x - \frac{x^2}{2} \geq \log(1+x) , \ x > 0$$

Příklad. Dokažte

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ < \ e \ < \ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} , \ x > 0$$

Příklad. Dokažte pro kladná čísla nerovnost

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \ \leq \ \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} .$$

Řešení. Postupujeme indukcí. Zvolíme

$$f(x) \ = \ \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x}{n}}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x}}$$

a dokážeme pomocí derivace, že $f(x) \geq f(y_n)$, kde

$$y_n \ = \ \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} .$$

Použijeme pro odhad $f(y_n)$ indukční předpoklad a po úpravě dostaneme $f(y_n) \geq 1$, tedy je důkaz indukcí hotov.

A ještě pár triků z rukávu:

Zderivováním

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx \;=\; \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

spočteme $C_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$.

To jsem se potěšil.

BTW, zderivoval jsem to ještě párkrát. Povinnost …

Konec cvičení 9.

UČENÍ

Učení 1:

$$f'(x_0) \stackrel{?}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tomuhle dobře rozumím, vysvětlit nic nepotřebuju.

Asi bych ti to ani vysvětlit nedokázal.

Konec učení 1.

Učení 2:
Konec učení 2.

Učení 3:
Konec učení 3.

Učení 4:
Konec učení 4.

Učení 5:
Konec učení 5.

Učení 6:
Konec učení 6.

Učení 7:
Konec učení 7.

Učení 8:
Konec učení 8.

Učení 9:
Konec učení 9.