Derivace funkce

Derivace je jedním z hlavních nástrojů matematické analýzy. V příští části ukážeme, jak mnoho různorodých aplikací derivace má.

Geometricky lze derivaci funkce v nějakém bodě chápat jako směrnici tečny grafu této funkce v daném bodě.

Tečna jako přímka je grafem nejjednodušší funkce, tzv. lineární funkce a do jisté míry aproximuje funkci v nejbližším okolí bodu dotyku.

Z této představy asi už lze poznat proč se derivace tolik používají.

Definice bude uvedena v obecném tvaru a derivace funkce f bude definována v hromadných bodech $\mathcal{D}(f)$, které do $\mathcal{D}(f)$ náleží.

511

DEFINICE. Nechť c je hromadný bod definičního oboru funkce f. Jestliže existuje

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

označíme ji $f'(c)$ a nazveme derivací funkce f v bodě c.

511

Vezmeme-li v definici $f'(c)$ limitu zprava (resp. zleva), dostaneme derivaci zprava $f'_+(c)$ (resp. derivaci zleva $f'_-(c)$).

Jde o tečnu, bere se i „tečna" ve svislém směru.

Značení derivací je více a každá volba má některé výhody a některé nevýhody: pro funkci $y = f(x)$ se derivace y' v bodě c často značí jako symbol $\frac{dy}{dx}(c)$ nebo $\frac{df}{dx}(c)$.

U tohoto značení se pozná, která proměnná se derivuje, stejně tak u značení (používaného hlavně pro funkce více proměnných) $f_x(c)$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

DERIVACE A SPOJITOST

VĚTA. Má-li funkce v nějakém bodě vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Podobně pro jednostrannou derivaci a jednostrannou spojitost. Jestliže má tedy funkce v nějakém bodě obě jednostranné derivace vlastní (mohou být různé), je v tomto bodě spojitá.

511

511

Poznámky 2 Příklady 2

DERIVACE A KONSTRUKCE FUNKCÍ

Dozvíme se, jak se počítají derivace součtu a součinu, složené funkce a podobně.

Nevyskytují se tu konstrukce funkcí pomocí uspořádání (např. max) protože v takových případech nemusí derivace ani u jednoduchých funkcí existovat.

Aritmetické operace

VĚTA. Nechť c je bodem i hromadným bodem $\mathcal{D}(f+g)$ a nechť funkce f, g mají v bodě c vlastní derivaci. Pak platí:

1. $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
2. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$
3. pro $g(c) \neq 0$ je
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} .$$

Tvrzení o součtu má jednoduchou geometrickou interpretaci.

Tvrzení o součinu má jednoduchou geometrickou interpretaci.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f, g mají v bodě c vlastní derivaci a $p, q \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$(pf)'(c) = pf'(c)\,, \quad (f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)\,, \quad (pf+qg)'(c) = pf'(c) + qg'(c)\,.$$

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Skládání

Vzorec pro derivaci složené funkce patří mezi nejužívanější vzorce při počítání derivací.

VĚTA. Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě c a funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(c)$, kde c je hromadným bodem $\mathcal{D}(f \circ g)$.

Pak $f \circ g$ má vlastní derivaci v bodě c a platí

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c)\,.$$

DŮSLEDEK. Derivace liché (sudé) funkce je sudá (resp. lichá) funkce.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4 4

Inverzní funkce

Inverzní funkce k f, pokud existuje, je určena jednoznačně funkcí f a její vlastnosti lze popsat pomocí vlastností f.

Následující tvrzení popisuje, jak lze i derivaci inverzní funkce k f vypočítat pomocí derivace funkce f.

VĚTA. Nechť je funkce f spojitá a prostá na intervalu J a má na něm derivaci. Pak její inverzní funkce g má na $f(J)$ derivaci

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}\,,$$

přičemž v případě $f'(g(x)) = 0$ se chápe převrácená hodnota jako $+\infty$ nebo $-\infty$ podle toho, je-li f rostoucí nebo klesající.

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5 5

DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU

Má-li funkce vlastní derivaci v každém bodě nějakého intervalu, vyplývají z toho pro funkci a pro její derivaci některé důležité vlastnosti.

První vlastnost (tzv. Darbouxova vlastnost) derivace o zobrazování intervalu je obdobná vlastnosti spojitých funkcí (Bolzanova věta); zde však nebude třeba předpokládat, že derivace je spojitá.

Další vlastnost je i tzv. Rolleova věta o existenci bodu s nulovou derivací. Poslední dvě věty jsou tzv. *věty o střední hodnotě*, které se budou často používat.

LEMMA. Nechť má funkce f v bodě $c \in (a, b)$ maximální nebo minimální hodnotu na (a, b). Jestliže $f'(c)$ existuje, musí být rovna 0.

Darbouxova vlastnost

VĚTA. Nechť interval J je částí definičního oboru vlastní derivace funkce f. Pak $f'(J)$ je buď bod nebo interval.

DŮSLEDEK. Jestliže funkce f má vlastní derivaci na intervalu J, tak

1. f' nemá na J žádné skoky (tj., body nespojitosti derivace jsou body oscilace),
2. je-li f' monotónní, je spojitá.

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

Věty o střední hodnotě

Následující větu lze chápat buď jako pomocné tvrzení pro další dvě věty (Lagrangeovu a Cauchyovu větu) anebo jako základní větu, z které obě další věty snadno vyplývají.

Geometricky obě následující věty říkají, že za daných podmínek vždy existuje tečna ke grafu funkce rovnoběžná se spojnicí krajních bodů.

Cauchyova věta pak nalézá vhodný bod pro dvě funkce současně. Jiný přístup k této větě umožní výpočet přírůstku funkce pomocí derivace.

VĚTA. (Rolleova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a má derivaci všude v otevřeném intervalu (a, b). Jestliže $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

VĚTA. (Lagrangeova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a má derivaci všude v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

DŮSLEDEK. Jestliže má funkce na intervalu derivaci rovnu 0, je na tomto intervalu konstantní.

DŮSLEDEK. (O jednostranné derivaci) Nechť funkce f má derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a je spojitá zprava v bodě a. Jestliže existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$, pak se rovná $f'_+(a)$.

VĚTA. (Cauchyova věta) Nechť funkce f, g jsou spojité na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ a mají derivaci všude v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)) .$$

Speciálně, když g' nenabývá hodnoty 0 v (a, b), existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Při troše snahy uvidíme Cauchyovu větu v následujícím obrázku.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7 7

Derivace vyšších řádů

Protože derivace f' funkce f je opět funkce, je možné vzít derivaci $(f')'$ funkce f'.

Dostane se tzv. druhá derivace funkce f, která se značí stručněji f''.

Můžeme definovat obecně:

DEFINICE. Pro $n \in \mathbb{N}$ se definuje indukcí $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, kde $f^{(0)} = f$. Funkce $f^{(n)}$ se nazývá n-tá derivace funkce f.

Jak už bylo výše naznačeno, druhá derivace se místo $f^{(2)}$ značí f'' a podobně třetí derivace f'''. Pro čtvrtou derivaci jsou už 4 čárky méně vhodné.

Pokud se použije značení $\frac{dy}{dx}$ pro derivaci, lze druhá derivace vyjádřit formálně pravidly pro úpravu zlomků

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} .$$

Obecně se n-tá derivace značí $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Pro derivace vyšších řádů lze samozřejmě použít odpovídající tvrzení pro derivace.

Např.

1. existuje-li v bodě c vlastní derivace třetího řádu, je druhá derivace v c spojitá

2. $(f + g)^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + g^{(n)}(c)$, *má-li pravá strana smysl.*

Obdoba posledního tvrzení pro součiny už není zcela triviální a je nutné je dokázat (viz *Otázky*):

VĚTA. Nechť funkce f, g mají v bodě c vlastní derivace až do řádu n včetně. Pak platí

$$(f \cdot g)^{(n)}(c) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(c) g^{(n-i)}(c) .$$

Poznámky 8 Příklady 8 Otázky 8 8

Implicitně a parametricky zadané funkce

Implicitně zadané funkce

Implicitně zadaná funkce f se zpravidla zadává rovnicí ve tvaru $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných a proměnná $y = f(x)$ se chápe jako funkce proměnné x, pro které platí uvedená rovnost (tj., grafem funkce f je množina $\{(x, y); F(x, y) = 0\}$).

Jak bylo uvedeno v části o implicitně zadaných funkcích, takto zadaná implicitní funkce není obecně funkcí ve smyslu definice funkce. Nicméně bývá funkcí „po částech" a velmi často se používá.

Definice implicitně zadané funkce už naznačuje, jak se bude derivovat. Pro začátek je vhodné psát proměnnou y ve tvaru, ze kterého je vidět, že je funkcí x, tj. např. jako $y(x)$.

Rovnost $F(x, y(x)) = 0$ se derivuje podle proměnné x pomocí věty o derivaci složené funkce. Např. pro rovnost $x^2y^3 - \sin(xy) = 0$ je první derivace funkce y podle x vyjádřena vztahem:

$$(2x \cdot y^3(x) + x^2 \cdot 3y^2(x)y'(x)) - (\cos(x \cdot y(x)) \cdot (1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x)) = 0\,.$$

Tedy mocnina $y^3(x)$ má derivaci podle x rovnou derivaci vnější funkce (třetí mocnina) vynásobenou derivací vnitřní funkce (tj. derivací funkce $y(x)$, což je $y'(x)$).

Z dosažené rovnosti (pokud vše v rovnosti má smysl, což v uvedeném příkladu má) lze vypočítat y' za předpokladu, že koeficient u y' není roven 0:

$$y' = \frac{y\cos(xy) - 2xy^3}{3x^2y^2 - x\cos(xy)}\,,$$

pro $3x^2y^2 - x\cos(xy) \neq 0$.

Obdobně se postupuje u derivací vyšších řádů. Např. u předchozího příkladu se druhá derivace dostane (už bez dodatečného označení proměnné x u y) ze vztahu

$$2y^3 + 2 \cdot 2x \cdot 3y^2y' + x^2 \cdot 6y(y')^2 + x^2 \cdot 3y^2y'' + \sin(xy) \cdot ((y + xy')^2 - \cos(xy) \cdot (2y' + xy'') = 0.$$

Odtud lze opět vypočítat y'', protože má stejný koeficient jako byl v dřívější rovnosti u y'. Na pravé straně se bude vyskytovat y'; pokud to vadí, lze za ní dosadit předchozí vypočtenou rovnost.

Parametricky zadané funkce

Parametricky zadaná funkce má tvar $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, kde t probíhá nějakou zadanou množinu na reálné přímce (většinou interval).

Opět se chápe proměnná y jako funkce proměnné x prostřednictvím parametru t.

Grafem je množina $\{(x, y);\ \text{existuje } t \text{ tak, že } y = \varphi(t), x = \psi(t)\}$. Obdobně jako u implicitně zadané funkce není takto zadaná funkce obecně funkcí ve smyslu definice funkce. Opět však bývá funkcí „po částech" a opět se velmi často používá.

Jestliže lze pro nějaký bod (x, y) grafu parametricky zadané funkce počítat derivaci, musí být x v nějakém svém okolí jednoznačně určeno parametrem t, tj., v tomto okolí existuje $\psi^{-1}(x)$ a potom $y = \varphi(\psi^{-1}(x))$.

Z tohoto vyjádření se snadno získá derivace podle vět o derivaci složené a inverzní funkce:

$$y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\,.$$

Tento vzorec lze snadno zapamatovat při značení derivace zlomky (použitím úpravy složeného zlomku):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\,.$$

Stejným způsobem se dostanou derivace vyšších řádů.

Např. druhá derivace je derivace parametricky zadané funkce $y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}, x = \psi(t)$, takže

$$y'' = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{\psi'^3(t)}\,.$$

Polárně zadané funkce $r = h(\varphi)$, kde h je nějaká funkce a proměnná φ probíhá nějakou podmnožinu reálných čísel (často interval $[0, 2\pi)$) jsou speciálním případem parametricky zadaných funkcí neboť $y = h(\varphi)\sin(\varphi), x = h(\varphi)\cos(\varphi)$.

Z předchozího vzorce pro derivaci parametricky zadané funkce vyplývá následující vzorec pro derivaci polárně zadané funkce:

$$y' = \frac{h'(\varphi)\sin\varphi + h(\varphi)\cos\varphi}{h'(\varphi)\cos\varphi - h(\varphi)\sin\varphi}\,.$$

Poznámky 9 Příklady 9 Otázky 9 9