Použití derivací

V této části budou uvedena některá použití derivací.

Jedná se hlavně o průběh funkce (tj., co nejpřesnější popis chování funkce) a o aproximace funkce polynomy.

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO POČÍTÁNÍ LIMIT

Toto pravidlo pro výpočet limit zlomků, které vedou na neurčitý výraz, je výhodné, ale nikoli všemocné.

V mnoha případech zjednoduší výpočet.

Při každém použití je nutné zkontrolovat předpoklady, protože při špatném použití vede ke špatnému výsledku.

Tvrzení je uvedeno pro jednostrannou limitu zprava. Samozřejmě obdobné tvrzení platí pro limitu zleva nebo pro oboustrannou limitu.

VĚTA. (l'Hospital) Nechť funkce f, g mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existuje.

To znamená, že to někdo ověří!

Jestliže platí

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \lim_{x\to a_+} |f(x)| = \lim_{x\to a_+} |g(x)| = +\infty\,,$$

pak

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

V prvním případě $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = \lim\limits_{x\to a_+} g(x) = 0$ je postup následující.

Jestliže $a \in \mathbb{R}$, lze v bodě a dodefinovat nebo předefinovat f, g hodnotou 0, takže f i g jsou nyní spojité v a zprava.

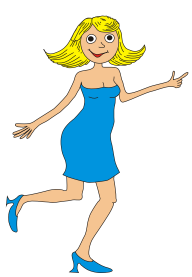
Je-li $\{x_n\}$ posloupnost konvergující zprava k a, pak podle Cauchyovy věty o střední hodnotě (členy posloupnosti lze brát dostatečně blízko bodu a, kde existují derivace funkcí f, g a kde g' je nenulová) existují body $c_n \in (a, x_n)$ tak, že

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}\,.$$

Pravá strana rovnosti má limitu A a tedy i levá strana má limitu A.

Pokud je $a = -\infty$, pak

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\to 0_-} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0_-} \frac{\frac{-1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{-1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0_-} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{y\to 0_-} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$



Předposlední rovnost vyplývá z právě dokázaného tvrzení, ale pro limity zleva.

Tím máme dokázánu lehčí půlku.

Zbývá dokázat druhý případ $\lim\limits_{x\to a_+} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a_+} |g(x)| = +\infty$.

Opět stačí předpokládat, že a je vlastní bod. Dále lze předpokládat, že $\lim\limits_{x\to a_+} g(x) = +\infty$, že $g > 0$ na (a, b) a, např., $g' < 0$ na (a, b).

Dá se předpokládat, že $A \in \mathbb{R}$, protože jinak stačí vzít převrácené hodnoty zlomků $\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a uvědomit si, že tyto zlomky nemění blízko a znaménka.

Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (a, a+\delta)$ je $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon$. Nechť $\{x_n\}$ je klesající posloupnost konvergující zprava k a a ležící v $(a, a+\delta)$.

Podle Cauchyovy věty o střední hodnotě existuje pro každé n bod $c_n \in (x_n, x_0)$ tak, že

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \quad \text{a tedy} \quad \left|\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} - A\right| < \varepsilon\,.$$

Nyní se provede následující odhad:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - A\right| = \left|\frac{f(x_n) - Ag(x_n)}{g(x_n)}\right| = \left|\frac{(f(x_n) - f(x_0) + f(x_0)) - A(g(x_n) - g(x_0) + g(x_0))}{g(x_n)}\right| \le \\
&\left|\frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x_n)}\right| + \left|\frac{(f(x_n) - f(x_0)) - A(g(x_n) - g(x_0))}{g(x_n)}\right| \le \\
&\left|\frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x_n)}\right| + \left|\frac{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} - A}{g(x_n)(g(x_n) - g(x_0))}\right|
\end{aligned}$$

V posledním řádku jde první sčítanec k 0, ve druhém je čitatel nejvýše ε, jak bylo ukázáno výše a jmenovatel jde k $+\infty$. To znamená, že celý výraz konverguje k 0, což bylo dokázat. $\diamond$

To je teda nářez.

Klid. Ten nevlastní případ stejně řada studentů nepochopí.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 Cvičení 1

PRŮBĚH FUNKCE

Stanovit průběh funkce znamená zjistit intervaly, kde je funkce monotónní, konvexní či konkávní, zjistit její hodnoty nebo limity v různých potřebných bodech, asymptotické chování v některých bodech, maximální a minimální hodnoty, popř. další vhodné vlastnosti.

Na základě těchto údajů pak lze poměrně přesně nakreslit graf funkce.

Při zjišťování těchto vlastností pomáhá znalost derivace funkce.

Monotónie

Zda je funkce rostoucí nebo klesající lze u složitějších funkcí těžko zjišťovat z definice těchto vlastností. Následující kritérium může ověření monotónie značně zjednodušit.

Jde o to, že kladná derivace zaručuje rostoucí funkci.

VĚTA. Nechť má funkce f na intervalu J derivaci.

1. Funkce f je na J neklesající právě když je $f' \geq 0$.
2. Funkce f je na J nerostoucí právě když je $f' \leq 0$.
3. Funkce f je na J rostoucí, je-li $f' > 0$.
4. Funkce f je na J klesající, je-li $f' < 0$.

Důkaz. Pro libovolná $a < b$ z J jsou splněny podmínky Lagrangeovy věty o střední hodnotě na intervalu $[a, b]$, takže existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Protože $b - a > 0$, má $f'(c)$ stejné znaménko jako rozdíl $f(b) - f(a)$. Takže je-li $f' \geq 0$ (nebo $f' \leq 0$) na J, je $f(b) \geq f(a)$ (resp. $f(b) \leq f(a)$) a f je neklesající (resp. nerostoucí).

Je-li $f' > 0$ (nebo $f' < 0$) na J, je $f(b) > f(a)$ (resp. $f(b) < f(a)$) a f je rostoucí (resp. klesající).

U prvních dvou tvrzení zbývá dokázat implikaci zleva doprava.

Pro $c \in J$ je (berou se pouze $x \in J$)

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\,.$$

Je-li f neklesající na J, má jmenovatel i čitatel stejná znaménka a tedy $f'(c) \geq 0$. Je-li f nerostoucí na J, má jmenovatel i čitatel opačná znaménka a tedy $f'(c) \leq 0$. ◇

To byla zcela průhledná věta.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Konvexita

Podobně jako u monotonie, lze i konvexitu a konkávitu zjišťovat pomocí derivace a nikoli podle definice těchto vlastností.

VĚTA. Nechť má funkce f na intervalu J derivaci.

1. Funkce f je na J konvexní právě když je f' neklesající.
2. Funkce f je na J konkávní právě když je f' nerostoucí.
3. Funkce f je na J ryze konvexní právě když je f' rostoucí.
4. Funkce f je na J ryze konkávní právě když je f' klesající.

Konvexita a monotonie derivace spolu souvisí. Důkaz bude jednoduchý:

Důkaz. Stačí dokázat tvrzení pro konvexitu, tvrzení pro konkávní funkce z nich plynou použitím funkce $-f$.

Funkce f je na intervalu J konvexní právě když pro libovolné tři body $u < v < w$ z J platí

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}\,.$$

Podobné nerovnosti napsané pro 4 body $t < u < v < w$ implikují (zlimitováním pro $u \to t_+, v \to w_-$), že f' je na J neklesající.

Je-li f' na J neklesající a $u < v < w$ jsou body J, pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existují body $c \in (u, v), d \in (v, w)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}\,, \quad f'(d) = \frac{f(w) - f(v)}{w - v}\,.$$

Protože $c < d$, je $f'(c) \le f'(d)$, což dává předchozí nerovnost charakterizující konvexitu.

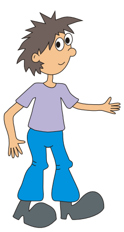
Pro tvrzení o ryzí konvexitě si stačí uvědomit, že lze všude brát ostré nerovnosti $<$ místo neostrých $\le$.

◇

Použije-li se v předchozí větě charakterizace monotónie pomocí derivací, dostane se tvrzení:

DŮSLEDEK. Nechť má funkce f na intervalu J druhou derivaci.

1. Funkce f je na J konvexní právě když je $f'' \ge 0$.
2. Funkce f je na J konkávní právě když je $f'' \le 0$.
3. Je-li $f'' > 0$, je f na J ryze konvexní.
4. Je-li $f'' < 0$, je f na J ryze konkávní.

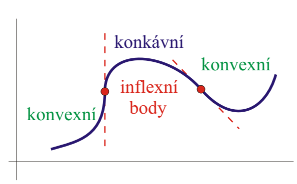


Tohle beru.

Body, ve kterých mění funkce chování z jednoho typu na druhý, jsou z jistého hlediska zajímavé. Později budou probrány body, ve kterých se funkce mění z rostoucí na klesající (nebo opačně), v této části to budou body, ve kterých se funkce mění z konvexní na konkávní nebo z konkávní na konvexní.

DEFINICE. Nechť funkce f je definována na intervalu J, c je vnitřní bod J, f je spojitá v c a existuje $f'(c)$.

Bod c se nazývá inflexní bod f, jestliže existuje okolí $(a, b) \subset J$ bodu c takové, že funkce f je ryze konvexní na jedné ze dvou částí $(a, c]$, $[c, b)$ a ryze konkávní na druhé části.



Inflexní bod se dá zjistit pomocí druhé derivace funkce.

VĚTA. Nechť funkce f má druhou derivaci na nějakém okolí bodu c. Pak c je inflexním bodem funkce f, jestliže f'' mění v bodě c znaménko.

Důkaz. Protože $f''(c)$ existuje, je $f'(c)$ vlastní a f je spojitá v c; navíc je f (dokonce i f'') definována na nějakém okolí bodu c, např. na (a, b). Je-li f'' kladná na (a, c) a záporná na (c, b), je f konvexní na (a, c) a konkávní na (c, b), takže c je inflexní bod f. Podobně je tomu při opačné volbě znamének. $\diamond$

DŮSLEDEK. Funkce f definovaná na intervalu J může mít inflexní bod pouze v následujících bodech:

1. ve vnitřním bodě J, ve kterém f nemá druhou derivaci;
2. ve vnitřním bodě J, kde má f druhou derivaci rovnou 0.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Extrémy

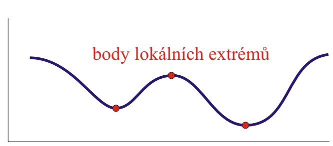
Body, ve kterých funkce dosahuje maximálních nebo minimálních hodnot patří k nejdůležitějším bodům, které je vhodné o funkci znát. Jsou předmětem mnoha praktických úloh.

Při vyhledávání extrémů pomohou derivace, ale je nutné dávat pozor i na jiné možnosti.

Je vhodné připomenout, že *maximální* (nebo *minimální*) hodnota znamená, že žádná jiná srovnávaná hodnota není větší (resp. menší), kdežto *největší* (nebo *nejmenší*) hodnota znamená, že každá jiná srovnávaná hodnota je menší (resp. větší).

DEFINICE. Funkce f má v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, nebo lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu c takové, že $f(c)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v c lokální extrém, jestliže má v c lokální maximum nebo lokální minimum.



Nahradí-li se v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší*, dostane se definice ostrých lokálních extrémů.

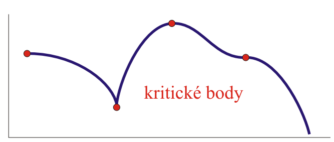
Následující věta vymezuje body, v kterých může (ale nemusí!) mít funkce lokální extrém. Na žádný z těchto bodů se nesmí při zkoumání zapomenout.

VĚTA. Funkce f definovaná na intervalu J může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v krajním bodě J, který patří do J;
2. ve vnitřním bodě J, ve kterém f nemá derivaci;
3. ve vnitřním bodě J, kde má f derivaci rovnou 0.

Důkaz. Nechť f má v c lokální extrém, c není krajním bodem J a $f'(c)$ existuje. Hodnota $f(c)$ je maximální nebo minimální mezi všemi hodnotami na nějakém intervalu (a, b) obsahujícím c.
Podle lemmatu o derivaci v extremálním bodě je $f'(c) = 0$. ◇

Body popsané v předchozí větě se nazývají kritické body (pro lokální extrémy).



Dalším krokem po nalezení všech kritických bodů je zjistit, zda v nich lokální extrém nastane a zda jde o maximum nebo minimum. Následující tvrzení a jeho důsledek jsou obdobou tvrzení pro určení inflexního bodu. Důkaz vyplývá ihned z definice lokálních extrémů.

VĚTA. Nechť je $c \in \mathcal{D}(f)$ a (a, b) je okolí c.

1. Jestliže f je neklesající v jedné ze dvou částí $(a, c]$, $[c, b)$ a nerostoucí ve druhé, má f v c lokální extrém.
2. Jestliže f je rostoucí v jedné ze dvou částí $(a, c]$, $[c, b)$ a klesající ve druhé, má f v c ostrý lokální extrém.

DŮSLEDEK. Nechť je c vnitřním bodem definičního oboru funkce f a nechť f má derivaci v nějakém okolí bodu c. Jestliže f' mění v bodě c znaménko, má f v tomto bodě ostrý lokální extrém.

Předchozí tvrzení dávají návod nejen k nalezení lokálního extrému ale i ke zjištění, o jaký extrém se jedná. Je-li např. f klesající nalevo od c a rostoucí napravo od c, je v c ostré lokální minimum.

I když se zdá, že předchozí věty nejsou pro praktické použití příliš výhodné, při zjišťování průběhu funkce se ukáží jako velmi vhodné.

Následující tvrzení ukazuje jinou cestu pro ověření typu extrému.

VĚTA. Nechť funkce f má ve vnitřním bodě c svého definičního oboru lokální extrém. Je-li f v okolí bodu c konvexní (resp. konkávní), má v c lokální minimum (resp. lokální maximum).

Důkaz. Nechť je f konkávní v nějakém okolí (a, b) bodu c a nechť f má v c vzhledem k (a, b) extrém, který není lokálním maximem. To znamená, že existuje bod $p \in (a, b)$ takový, že $f(p) > f(c)$. Nechť např. $p \in (a, c)$. Pro libovolný bod $q \in (c, b)$ je $f(q) \geq f(c)$. Z toho vyplývají nerovnosti

$$\frac{f(c) - f(p)}{c - p} < 0 \leq \frac{f(q) - f(c)}{q - c} \,,$$

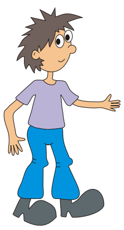
což je ve sporu s konkávitou f na (a, b). $\diamond$

Konvexita je u lokálního extrému užitečná.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f má ve vnitřním bodě c svého definičního oboru druhou derivaci $f''(c)$.

1. Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$, má f v bodě c ostré lokální minimum.
2. Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) < 0$, má f v bodě c ostré lokální maximum.

Jde vlastně o něco takového, jako kdybychom srovnávali funkci s parabolou. Pokud v bodě s nulovou derivací sestrojíme parabolu „pod grafem funkce", tak je tam minimum.



O.K.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

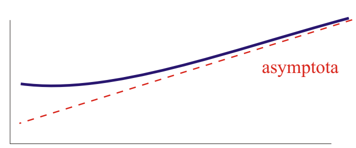
Asymptoty

Chování funkce „blízko" nevlastních bodů se dá zhruba popsat pomocí limit funkce a její derivace v těchto bodech.

Nejzajímavější je případ, kdy se graf funkce blíží k nějaké přímce, která se pak nazývá asymptotou.

To může být i přímka kolmá na osu x (např. osa y pro funkci $y = 1/x$), ale tento případ nebude v následující definici zahrnut.

DEFINICE. Přímka $y = ax + b$ se nazývá asymptotou funkce f v nevlastním bodě c, jestliže $\lim_{x \to c} (f(x) - (ax + b)) = 0$.



Hledáme lineární aproximaci v nekonečnu. Tou můžeme u nekonečna nahradit funkci. U některých funkcí asymptota neexistuje, ale mohli bychom najít parabolickou „asymptotu".

VĚTA. Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f v nevlastním bodě c právě když platí

$$a = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to c} (f(x) - ax).$$

Důkaz. Nechť nejdříve přímka $ax+b$ je asymptotou f v c. Pak

$$\lim_{x\to c}(f(x)-(ax+b)) = \lim_{x\to c} x\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0\,.$$

Protože c je nevlastní bod, jedinou možností pro poslední rovnost je

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0 \quad \text{a tedy} \ \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = 0\,,$$

což dává první rovnost pro a. Druhá rovnost charakterizující b plyne z věty o limitě součtu.

Opačná implikace je triviální. ◇

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Průběh funkce

Průběh funkce f znamená určit přinejmenším následující:

1. definiční obor;
2. spojitost;
3. lokální a absolutní extrémy;
4. asymptoty;
5. konvexita, konkávita, inflexní body;
6. nakreslit graf.

Je to kreativní část matematické analýzy. Můžete jít na to buď metodou „dřevorubec", t.j. spočítat všechny derivace a pak přemýšlet, nebo chytře.

Nelze navrhnout postup, který je optimální pro všechny možné případy. Nicméně, následující postup bývá většinou vhodný.

1. Pokud není definiční obor dán, zjistí se běžným způsobem, tj. ověřením, kde má použitý předpis smysl. Je vhodné ověřit, zda je funkce lichá nebo sudá nebo periodická – v těchto případech je pak možné zkoumání funkce zúžit na menší množinu.
2. Vypočte se derivace a zjistí se její definiční obor – na tomto definičním oboru je původní funkce spojitá. Ve zbývajících bodech (nebo ve všech) se spojitost funkce většinou zjistí přímo z předpisu funkce pomocí základních vět o spojitosti funkcí.
3. Naleznou se všechny kritické body pro lokální extrémy a udělá se tabulka hodnot v těchto bodech (viz *Příklady* v lokálních extrémech), pro každý interval definičního oboru zvlášť.
4. Zjistí se asymptoty v nevlastních bodech, obvykle podle předchozí charakterizace.
5. Konvexita, konkávita a inflexní body se obvykle zjišťují pomocí druhé derivace nebo pomocí monotónie první derivace. To může být obtížné, a proto se někdy tato část vynechává a dodělává se až při kreslení grafu, ukáže-li se to potřebné.

6. Většinou je v této chvíli známo dost vlastností funkce pro hrubé nakreslení grafu. Je nutné si připomenout, že v intervalech definičního oboru funkce spojujících sousední kritické body musí funkce buď růst nebo klesat. Pokud nebyla zjišťována konvexita a konkávita, nemusí být jasné, jak v některých těchto intervalech graf funkce „ohnout".

7. V bodech, ve kterých derivace neexistuje, je vhodné vypočítat jednostranné derivace, pokud existují. Pomohou v grafu přesněji zakreslit „hroty" v těchto bodech.

Poznámky 6 Příklady 6 Cvičení 6 Učení 6

APROXIMACE FUNKCE POLYNOMY, TAYLORŮV POLYNOM

Zkoumání některých funkcí může být velmi složité, a proto se nahrazují funkcemi jednoduššími, které jsou v jistém smyslu velmi blízko dané funkci (danou funkci aproximují).

Slovo „blízko" může mít více významů. Např. v každém bodě budou hodnoty aproximující funkce blízko hodnotám dané funkce, ale v různých bodech různě blízko, nebo budou ve všech bodech hodnoty stejně blízko. Základem je tu bodová konvergence posloupnosti funkcí (tj., konvergence posloupnosti hodnot v každém bodě)

Uvažujme posloupnost funkcí $f_n(x) = x^2/n$. Jistě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

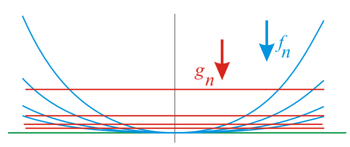
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 .$$

Tedy tato posloupnost aproximuje nulovou funkci na reálné ose (ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ různě rychle)

Uvažujme posloupnost funkcí $g_n(x) = 1/n$. Jistě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 .$$

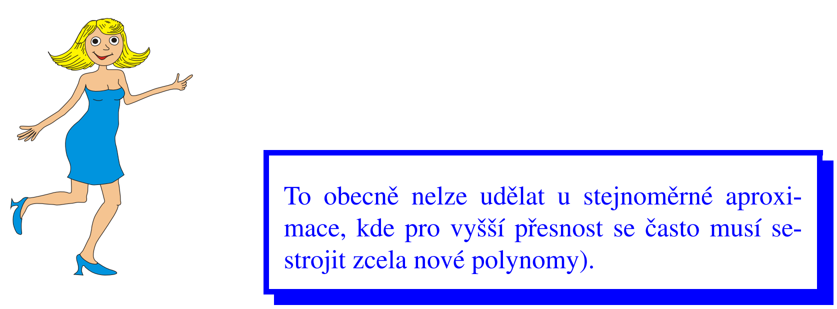
Tedy tato posloupnost také aproximuje nulovou funkci na reálné ose (ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ stejně).



První případ se nazývá *bodová aproximace* (vlastně jiný termín pro bodovou konvergenci), druhý případ *stejnoměrná aproximace* (je to bodová konvergence s dalším požadavkem navíc). V prvním případě se n-tá funkce od limitní funkce u nekonečna velmi vzdaluje, v druhém případě je n-tá funkce docela blízko limitní vlastně všude najednou.

Jako aproximující funkce se často volí polynomy, se kterými se dobře pracuje a jejichž hodnoty se dobře počítají. V této části budou sestrojeny tzv. Taylorovy polynomy, které bodově (někde i stejnoměrně) aproximují mnoho funkcí.

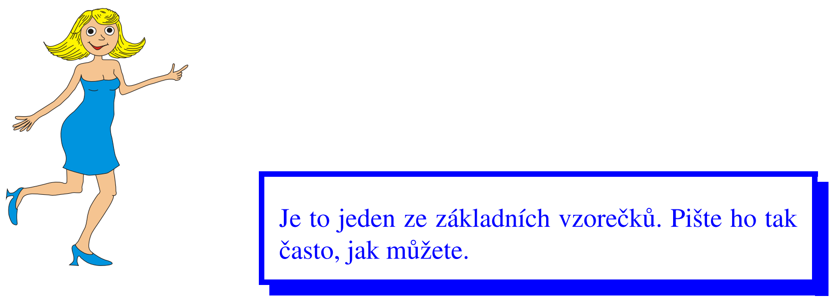
Bude-li požadována vyšší přesnost, bude stačit k již sestrojeným polynomům přidat další členy vyšších stupňů.



VĚTA. Nechť funkce f má derivace v bodě a až do řádu n. Pak polynom

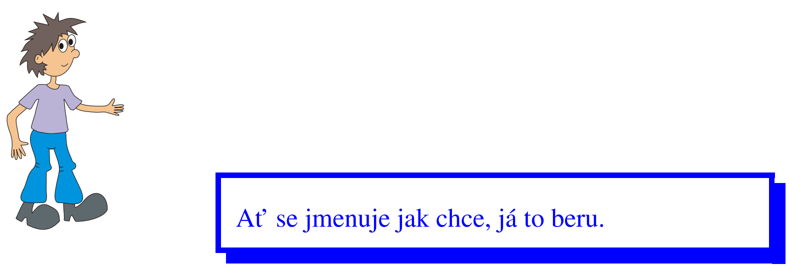
$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

je jediný polynom nejvýše n-tého stupně takový, že $f^{(i)}(a) = T_n^{(i)}(a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$.



Důkaz. Každý polynom lze psát v mocninách $x - a$, tj., pro stupeň n, ve tvaru $P(x) = a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + a_1(x-a) + a_0$, kde $a_n \neq 0$. Nechť $f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. Pravé strany jsou rovny $i!a_i$, takže $a_i = f^{(i)}(a)/i!$ a tedy $P(x) = T_n(x)$. $\diamond$

DEFINICE. Polynom $T_n(x)$ (přesněji $T_{f,a,n}(x)$) se nazývá Taylorův polynom stupně nejvýše n funkce f v bodě a. Je-li $a = 0$, nazývá se $T_n(x)$ též Maclaurinův polynom.



Následující věta usnadní výpočet Taylorových polynomů pro různé konstrukce funkcí.

VĚTA. Pro Taylorovy polynomy v bodě a platí (pro $p \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
T_{f+g,n} &= T_{f,n} + T_{g,n}\,, \\
T_{pf,n} &= pT_{f,n},\,, \\
T_{f\cdot g,n} &\doteq T_{f,n} \cdot T_{g,n}\,, \\
T_{\frac{f}{g},n} &\doteq \frac{T_{f,n}}{T_{g,n}}\,, \\
T_{f',n}(x) &= (T_{f,n+1}(x))'\,, \\
\text{pro } a = 0\,, \quad T_{f(px^k),kn}(x) &= T_{f(x),n}(px^k)\,.
\end{aligned}$$

Ve dvou případech je nad rovností tečka. U součinu funkcí znamená, že levá strana (polynom stupně nejvýše n) se rovná části pravé strany (polynom stupně až $2n$) po vynechání mocnin vyšších než n. U podílu se na pravé straně nedělí polynomy obvyklým způsobem, tj. nejvyšší mocnina čitatele nejvyšší mocninou jmenovatele, ale nejnižší mocnina čitatele nejnižší mocninou jmenovatele a skončí se u stupně n, jinak je postup dělení stejný (např. $(x + x^2) : (x - x^3) = 1 + x + x^2 + \ldots$, viz *Příklady*).

Důkaz. Dva polynomy se rovnají, jestliže se rovnají koeficienty u stejných mocnin $(x-a)^i$. Důkaz první, druhé a páté rovnosti plyne jednoduše z tohoto kritéria a je přenechán do *Otázek*.

Třetí rovnost: Pro $i \le n$ je na levé straně rovnosti koeficient u $(x-a)^i$ roven

$$\frac{(fg)^{(i)}(a)}{i!} = \frac{\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f^{(j)}(a) g^{(i-j)}(a)}{i!}$$

a koeficient na pravé straně je roven

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \frac{g^{(i-j)}(a)}{(i-j)!} \,.$$

Snadno se ověří, že je to totéž.

Pro podíl je nutné znát, že jestliže se uvedeným způsobem dělí dva polynomy n-tého stupně $P(x)/Q(x)$ s výsledkem rovným polynomu $R(x)$ n-tého stupně, pak část polynomu $Q(x) \cdot R(x)$ se všemi členy stupně nejvýše n se rovná $P(x)$. Nyní je zřejmé, že rovnost pro podíl vyplývá z předchozí rovnosti pro součin.

Poslední rovnost se dokáže pomocí Peanova zbytku. Ten říká, že Taylorův polynom $T_{f,n,a}$ je jediný polynom, pro který je $f - T_{f,n,a}$ malý řádu aspoň $n+1$. Stačí tedy dokázat, že $f(px^k) - T_{f(x),n}(px^k)$ je malý řádu aspoň $nk+1$. Protože

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u^n} = 0 \,,$$

je po dosazení $u = px^k$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(px^k)}{x^{kn}} = 0 \,,$$

což se mělo dokázat. ◇

Pokud mají Taylorovy polynomy bodově aproximovat funkci f na nějaké množině M, musí podle definice bodové konvergence pro každé $x \in M$ platit $\lim T_n(x) = f(x)$, neboli $\lim(T_n(x) - f(x)) = 0$.

Kvůli stručnosti se rozdíl $f(x) - T_{f,a,n}(x)$ značí $R_{f,a,n}(x)$ (častěji jen $R_n(x)$) a nazývá se zbytek.

Zbytek vyjadřuje chybu při nahrazování funkce jejím Taylorovým polynomem. Existují vzorce, které zbytek vyjadřují v jednodušším tvaru vhodném pro odhadování.

VĚTA. Nechť f má na uzavřeném intervalu s koncovými body a, x derivaci řádu $n+1$. Pak existují uvnitř tohoto intervalu body c, d tak, že

$$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a) \,.$$

Důkaz. Podle definice je $f(x) - T_{n,a}(x) - R_{n,a}(x) = 0$. Z výrazu na levé straně se udělá funkce $g(t)$ tak, že se buď za a nebo za x zvolí nová proměnná t, která se bude pohybovat mezi a a x. Lze předpokládat, že např. $a < x$.

Nejdříve se t dosadí za x a zbytek $R_{n,a}(x)$ se bude hledat ve tvaru $p \cdot (x-a)^{n+1}$ pro nějaké $p \in \mathbb{R}$. Tedy $g(t) = f(t) - T_{n,a}(t) - p(t-a)^{n+1}$. Funkce g je rovna 0 v krajních bodech intervalu $[a, x]$. Navíc $g^{(i)}(a) = 0$ pro $i \le n$. Protože $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p(n+1)!$, stačí ukázat, že $g^{(n+1)}(t) = 0$ v nějakém bodě (a, x). Opakovaným použitím Rolleovy věty se najdou body $c_i, i \le n+1$: $c_1 \in (a, x)$ tak, že $g'(c_1) = 0$, $c_2 \in (a, c_1)$ tak, že $g''(c_2) = 0$,..., $c_{n+1} \in (a, c_n)$ tak, že $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. Pro $c = c_{n+1}$ se dostává hledaný výraz pro p, totiž $p = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$.

Nyní se t dosadí za a a zbytek $R_{n,a}(x)$ se bude hledat ve tvaru $p \cdot (x-a)$ pro nějaké $p \in \mathbb{R}$. Tedy $g(t) = f(x) - T_{n,t}(x) - p(x-t)$ a $g(a) = 0, g(x) = 0$. Podle Rolleovy věty existuje $d \in (a,x)$ tak, že $g'(d) = 0$. Snadno se spočte $g'(t) = p - f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!$ a tedy $p = f^{(n+1)}(d)(x-d)^n/n!$, což dává druhý hledaný tvar zbytku. $\diamond$

První vyjádření zbytku se nazývá Lagrangeův tvaru zbytku a je jednoduchý pro zapamatování.

Lagrangeův tvaru zbytku je tvar následujícího $(n+1)$. členu s tím, že derivace se nebere v bodě a, ale v nějakém bodě mezi a, x.

Druhé vyjádření se nazývá Cauchyův tvar zbytku.

Existují i jiné vzorce pro zbytek.

Speciálně tedy platí, že má-li f derivace až do řádu $n+1$ na intervalu J obsahujícím bod a, pak pro každé $x \in J$ existuje c_x ležící mezi a, x tak, že

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Pro $n = 0$ je předchozí rovnost totožná s rovností v Lagrangeově větě o střední hodnotě (totéž platí i při použití Cauchyova tvaru zbytku – ověřte).

VĚTA. Nechť f má v okolí bodu a derivace až do řádu n. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{f,a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

a $T_{f,a,n}$ je jediný polynom nejvýše n-tého stupně, pro který uvedená rovnost platí.

Důkaz. Dosadí-li se do zlomku v limitě $x = a$, dostane se neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Lze použít l'Hospitalovo pravidlo a opět se dostane tentýž neurčitý výraz. Až po n-tém zderivování se dostane $\frac{0}{n!}$ a tedy 0.

Nechť naopak je dán polynom P stupně nejvýše n, pro který je $\lim_{x \to a}(f(x) - P(x))/(x-a)^n = 0$. Protože jmenovatel se blíží k 0, musí se i čitatel blížit k 0. Funkce f je spojitá v okolí a a tedy $P(a) = f(a)$. Lze použít l'Hospitalovo pravidlo a dostane se, že $\lim_{x \to a}(f'(x) - P'(x)) = 0$ a tedy $f'(a) = P'(a)$. Postupným použitím l'Hospitalova pravidla se dostane $f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a)$ pro všechna $i \le n$ Podle definice Taylorových polynomů je $P(x) = T_{f,a,n}(x)$. $\diamond$

Skutečnost, že

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

se často vyjadřuje zápisem

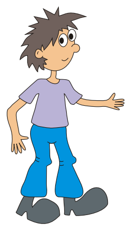
$$g(x) = o(x-a)^n \ , \ x \to a$$

a slovy *g je malá řádu aspoň $n+1$ v bodě a*.

Takže $R_{f,a,n}(x) = o(x-a)^n, \ x \to a$ a tento výraz pro zbytek se často nazývá Peanův tvar zbytku.

Tohoto zápisu se využívá tehdy, není-li třeba znát, o jakou funkci na levé straně se jedná. To je případ počítání limit pomocí Taylorových polynomů, kdy se jednotlivé funkce nahradí svými Taylorovými polynomy jistého stupně (předem odhadnutého) spolu se zbytky zapsanými právě pomocí malého „o".

Malé „o" vlastně definuje jakousi lokální funkci, o které nepotřebujeme znát (a ani neznáme) nic víc, než tu limitu.



Těch óček se bojím.

Klídek. Jsou to jenom malý prckové.

Má-li se zjistit, že na určitém okolí bodu a Taylorovy polynomy bodově aproximují funkci f, je nutné dokázat, že v každém bodě x tohoto okolí konvergují hodnoty zbytku $R_n(x)$ (pro rostoucí n) k 0.

Protože se ve vyjádření zbytku vyskytují neznámá čísla c, d, je vhodné zbytky odhadnout seshora. Následující tvrzení plyne přímo z Lagrangeova tvaru zbytku.

VĚTA. Nechť f má derivace až do řádu $n+1$ na intervalu $(a-p, a+p)$. Pak platí pro $x \in (a-p, a+p)$:

$$|R_{(f,a,n)}(x)| \le \frac{M_{n+1}p^{n+1}}{(n+1)!}\,, \qquad \text{kde } M_{n+1} \ge \sup_{y \in (a-p,a+p)} |f^{(n+1)}(y)|\,.$$

Ani to nemusí být konečné číslo. I tak je to zajímavé.

DŮSLEDEK. Nechť f má všechny derivace na intervalu $(a-p, a+p)$. Je-li $p \leq 1$ a f má všechny své derivace na $(a-p, a+p)$ omezené stejným číslem, aproximují její Taylorovy polynomy v bodě a bodově funkci f na $(a-p, a+p)$.

Protože horní odhad zbytků v tomto případě nezávisí na x, jedná se dokonce o stejnoměrnou aproximaci – ta ovšem bude zavedena až později.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7 Cvičení 7

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Jméno l'Hospital je možné vidět i v jiných tvarech, např. Lhospital nebo l'Hôpital. V každém případě se však čte , ‚lopital".

Nejčastěji se pomocí l'Hospitalova pravidla počítají limity funkcí, které po dosazení limitního bodu vedou k neurčitému výrazu $\frac{0}{0}$. Ostatní neurčité výrazy lze na tento základní typ převést:

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} - \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}.$$

Před každým použitím l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat jeho předpoklady.

Pokud vyjde $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ opět jako neurčitý výraz, lze při splnění předpokladů postup opakovat tak dlouho až bude možné $\lim_{x\to a_+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ spočítat.

Při tomto opakování je vhodné po každém kroku se snažit získaný výraz zjednodušit, popřípadě část limity spočítat (např. nějaký násobitel a vytknout před limitu).

V *Příkladech* jsou uvedeny případy, kdy je L'Hospitalovo pravidlo nevhodné použít, nebo kdy $\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje a $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje.

Může se stát, že ve zlomku $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bude $g'(x)$ nabývat v každém prstencovém okolí limitního bodu nulovou hodnotu, ale po nějakém zkrácení s čitatelem se dostane výraz, který smysl a limitu bude mít.

Přesto se v tomto případě l'Hospitalovo pravidlo **nesmí použít**.

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Je nutné zdůraznit, že ve větě je podstatný předpoklad intervalu. Pokud nejde o interval, např. máme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro funkci $1/x$, pak tvrzení neplatí, i když je derivace $-1/x^2$ záporná.

Všimněte si, že zatímco první dvě tvrzení jsou ekvivalence, druhá dvě tvrzení nejsou ekvivalence.

Funkce totiž může být ryze monotónní a derivace přitom může být rovna 0 v některých bodech (např. funkce x^3 na $\mathbb{R}$ je rostoucí, ale její derivace je rovna 0 pro $x = 0$).

Takovýchto bodů může být v jistém smyslu jen málo.

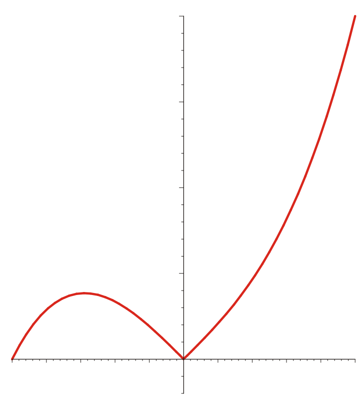
Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

V první větě charakterizující konvexitu jsou všechna čtyři tvrzení ekvivalencemi protože se srovnává konvexita funkce s monotónií její derivace.

Ale jakmile se v další větě přejde ke srovnávání znamének, už opět se u ryzí konvexity změní ekvivalence jen na jednu implikaci (uvažte příklady, že tam ekvivalence nemůže být).

Inflexní body se mohou definovat i bez podmínky existence derivace, ale při neexistenci tečny v onom bodě tam může býti hrot, jako např. v bodě 0 u funkce $x^3 + |x|$ a situace pak nevyjadřuje přirozený význam inflexního bodu.



Podobně nevhodná situace může nastat, pokud by se v definici inflexního bodu vynechala slova „ryzí", protože pak každý bod přímky by byl jejím inflexním bodem. Tyto body se někdy nazývají *slabými* inflexními body.

Je nutné si uvědomit, že při hledání inflexních bodů nelze jenom vyřešit rovnici $f''(x) = 0$, ale k těmto řešením se musí přidat body, kde druhá derivace neexistuje.

Pro takto získané body se zkoumá možnost inflexního bodu, např. pomocí změny znaménka druhé derivace nebo pomocí změny monotónie první derivace (nebo pomocí jiné charakterizace konvexity a konkávity).

Opět jako u hledání intervalů ryzí monotónie, ani při hledání inflexních bodů se nepochybí, pokud mezi zkoumané body (kde je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje) přidají další nejasné body (např. body, kde kvůli složitosti funkce nelze snadno rozhodnout, zda v nich druhá derivace existuje nebo zda se rovná nule).

Sice přibude práce s více body, ale ušetřila se práce při složitém řešení rovnice apod.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Při přepisu definice lokálních extrémů pomocí nerovností se dostane následující charakterizace (je uvedeno jen maximum, minimum zformulujte sami):

Funkce f má v bodě c svého definičního oboru lokální maximum (nebo ostré lokální maximum), jestliže existuje otevřený interval (a, b) obsahující bod c a takový, že pro $x \in (a, b) \cap \mathcal{D}(f), x \neq c$, je $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) < f(c)$).

Pokud se v předchozí charakterizaci lokálního maxima místo $x \in (a, b) \cap \mathcal{D}(f)$ napíše $x \in \mathcal{D}(f)$ dostane se maximální hodnota funkce f.

Podobně se dostane minimální hodnota funkce f (zformulujte). Tyto extrémy se na rozdíl od lokálních nazývají *absolutní* nebo *globální.*

Zatímco funkce může mít nejvýše jedno absolutní maximum nebo minimum, může mít nekonečně mnoho lokálních extrémů.

Absolutní maximum (nebo minimum) může ovšem být dosahováno ve více bodech; např. sinus má absolutní maximum 1 dosahováno v nekonečně mnoha bodech (více v *Příkladech*).

Každý absolutní extrém je i lokální extrém, obráceně to samozřejmě neplatí.

Je vhodné si připomenout, že podle Weierstrassovy věty má každá spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu absolutní maximum i minimum.

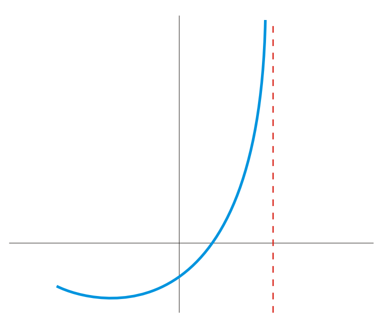
Podobně jako u monotónie v bodě, jsou i lokální extrémy příkladem lokálních vlastností funkce. Slovo „lokální" tu znamená, že vlastnost platí v nějakém okolí bodu, nikoli na celém definičním oboru nebo větším intervalu.

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

Podle l'Hospitalova pravidla je první limita rovna $\lim_{x \to c} f'(x)$, pokud tato limita existuje. To se dá chápat tak, že směrnice asymptoty je vlastně derivace v nevlastním bodě c, nebo-li směrnice tečny grafu f v bodě c.

Někdy se uvažují i asymptoty ve vlastních bodech c, což mohou být jen přímky kolmé na osu x, tj. mající rovnici $x = c$. Je to případ, kdy aspoň jedna jednostranná limita funkce v c je nevlastní.



Konec poznámek 5.

Poznámky 6:

Tabulka hodnot se většinou dělá jedna pro celý definiční obor funkce, i když je složen z několika disjunktních intervalů.

V případě, že spolu takové dva intervaly sousedí, např. krajním bodem c, musí se c napsat do tabulky dvakrát, přičemž první hodnota bude limita funkce v c zleva, druhá hodnota limita zprava. Mezi těmito hodnotami se samozřejmě neurčuje monotónie.

Konec poznámek 6.

Poznámky 7:

Z geometrického hlediska je zřejmé, že jediná přímka, která nejlépe aproximuje f v okolí bodu a, je tečna ke grafu f v $(a, f(a))$. Tato tečna je grafem lineární funkce $f(a) + f'(a)(x - a)$, což je Taylorův polynom stupně 1.

Bude-li se hledat kvadratická funkce, která nejlépe aproximuje f v okolí a (má v bodě a stejnou „křivost" jako f), dostane se opět Taylorův polynom (stupně 2). Takto lze pokračovat dále: grafy funkce f a jejího Taylorova polynomu stupně n mají styk řádu aspoň n.

Jestliže je funkce f polynomem stupně k, jsou její derivace řádu aspoň $k + 1$ všude rovny 0, takže i zbytek řádu aspoň $k+1$ je nulový a $f = T_{(f,a,k)}$ na celém $\mathbb{R}$. Uvedený Taylorův polynom je v tomto případě rozvoj polynomu f podle mocnin $x - a$. Někdy se může i hodit aproximovat polynom velikého stupně (např. 50) polynomem menšího stupně (např. 4).

Někdy je vhodnější vyjádřit x jako $a + h$ a potom lze psát (za příslušných předpokladů)

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\eta h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

kde $\eta \in (0, 1)$.

V důkazu pro vyjádření zbytku se dá postupovat matematicky elegantněji a společně pro oba tvary zbytku (i pro jiné tvary zbytku), ale do důkazu není moc vidět. Uvedený důkaz je sice delší, ale možná srozumitelnější. Oba tvary zbytku budou potřeba při aproximaci speciálních funkcí.

Konec poznámek 7.

Poznámky 8:

Konec poznámek 8.

Poznámky 9:

Konec poznámek 9.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

Použití l'Hospitalova pravidla je podobné, jako použití vět o limitě součtu apod.

Např. pro $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ se formálně napíše rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$$

a teprve po ověření smyslu a existence druhé limity (=1) se zpětně rovnost potvrdí.

Spočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\cos x - 1}.$$

Spočtěte následující limity převodem na vhodný typ a potom pomocí l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{tg} x \cos x, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Ukažte nevhodnost l'Hospitalova pravidla pro limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 \sin\frac{1}{x}}{2x + \sin x}, \quad \lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 2}).$$

(První limita existuje (spočtěte ji), ale limita podílu derivací neexistuje. U druhé limity jsou podíly derivací stále složitější.)

Použijete-li l'Hospitalovo pravidlo na limitu $\lim_{x\to 0} \frac{3x-1}{x}$, dostanete 3, což je špatný výsledek – proč?

Konec příkladů 1.

Příklady 2:

Hledání intervalů, na nichž je daná funkce ryze monotónní lze jednoduše provést následujícím způsobem (pokud existuje derivace).

Nechť je na intervalu J dána spojitá funkce f. Vyřeší se (na J) rovnice $f'(x) = 0$.

Nechť $a < b$ z J jsou body, ve kterých buď derivace neexistuje nebo je rovna 0 a nechť mezi nimi není žádný další takový bod.

Pak f' na celém (a, b) existuje a je buď kladná nebo záporná (proč?).

Zda je kladná nebo záporná, není nutné zjišťovat z derivace (může to být složité). Stačí porovnat hodnoty $f(a)$, $f(b)$. Je-li $f(a) < f(b)$, je funkce f na (a, b) rostoucí, při opačné nerovnosti je klesající (rovnost $f(a) = f(b)$ nemůže nastat – proč?). Také lze spočítat f' v jednom bodě intervalu (a, b).

Může se stát, že f bude rostoucí v intervalu (a, b) i v následujícím intervalu (b, c). Pak je f zřejmě rostoucí v (a, c) (proč?).

Podle předchozího postupu najděte maximální intervaly, kde jsou následující funkce ryze monotónní:

$$\sin^3 x + \cos^3 x \text{ na } [0, 2\pi]\,, \qquad \frac{x^2(x-1)}{x+1)^2} \text{ na } \mathbb{R}\,.$$

V předchozím postupu se může stát, že je obtížné rozhodnout o nějakém bodě a, zda v něm derivace neexistuje nebo je nulová.

Přidá-li se a k výše uvedeným zkoumaným bodům, nic se na postupu nepokazí.

Například není zřejmé, zda pro funkci $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$ existují derivace v bodech $0, \pm 1$. Proto je vhodnější tyto body mezi kritické body přidat. Najděte pro tuto funkci intervaly monotónnosti.

Jestliže ve výše uvedeném postupu je a krajní bod intervalu J, který do J nepatří, hodnota $f(a)$ se nahradí limitou $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ – ukažte, že za daných podmínek tato limita vždy existuje.

Uvedeným postupem lze dokazovat i nerovnosti mezi funkcemi. Jestliže např. $f(0) \geq g(0)$ a funkce $f - g$ je rostoucí na $[0, +\infty)$, pak $f(x) > g(x)$ pro všechna kladná x.

Nerovnost $\sin x > x - x^3/6$ platí pro kladná x: pro $x = 0$ platí místo uvedené nerovnosti rovnost.

Derivace funkce $\sin x - x + x^3/6$ je funkce $g(x) = \cos x - 1 + x^2/2$.

Pro důkaz toho, že g je kladná pro kladná x je možné postup opakovat: $g(0) = 0$ a $g'(x) = -\sin x + x$, což je opravdu funkce kladná pro kladná x (dokažte to ještě jedním použitím uvedeného postupu).

TO je skvělé.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

Najděte intervaly, ve kterých je sinus ryze konvexní nebo ryze konkávní.

Ve kterých intervalech je funkce $\sin x \cos x$ konvexní?

Zkoumejte konvexitu funkce $|x^2 + x|$.

Najděte všechny inflexní body funkcí sinus, cosinus a tangens.

Má $|x|$ inflexní body?

Pro která $n \in \mathbb{N}$ má funkce x^n inflexní body?

Pro která $n \in \mathbb{N}$ má funkce $x^{n/3}$ inflexní body?

Konec příkladů 3.

Příklady 4:

Postup při hledání extrémů funkce na intervalu J s krajními body $a < b$.

Nejdříve se najdou všechny kritické body.

Pokud činí problém u některých bodů rozhodnout, zda jsou kritické, či nikoli, lze i tyto podezřelé body zahrnout mezi kritické.

Nechť je těchto kritických bodů konečně mnoho. Jestliže krajní bod nepatří do J, spočítá se v něm limita funkce, v ostatních bodech se spočítají hodnoty funkce.

Sestaví se tabulka hodnot funkce, seřazená podle velikosti kritických bodů. Postup uvedený u zjišťování monotónie funkce určí intervaly ryzí monotónie a tím, podle předchozí věty a poznámky, i lokální extrémy.

Příklad: *Najít všechny lokální extrémy funkce $-(x-1)^3 \sqrt[3]{x^2}$ na intervalu $\langle -0.5, 1.5 \rangle$.*

Derivace je

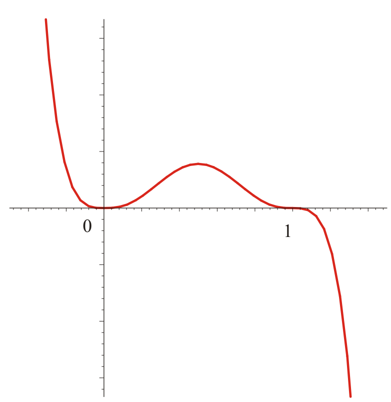
$$f'(x) = -3(x-1)^2 x^{2/3} - \frac{2}{3}(x-1)^3 x^{-1/3} = \frac{(x-1)^2(2-11x)}{3x^{1/3}}\,.$$

Derivace v daném intervalu neexistuje v bodě 0 a rovná se 0 v bodě 1 a 2/11. Tedy všechny kritické body jsou -0.5, 0, 2/11, 1, 1.5. Tabulka hodnot:

x	-0.5	0	2/11	1	1.5
$f(x)$	2.12	0	0.18	0	-0.14

Funkce klesá z hodnoty 2.12 k hodnotě 0 (takže v krajním bodě -0.5 je lokální maximum), pak stoupá k hodnotě 0.18 (takže v bodě 0 je lokální minimum), pak klesá k hodnotě 0 (takže v bodě 2/11 je lokální maximum) a pak zase klesá k hodnotě -0.14 (takže v bodě 1 není lokální extrém a v krajním bodě 1.5 je lokální minimum). Podle srovnání hodnot je absolutní maximum v bodě -0.5 a absolutní minimum v bodě 1.5.

Pokud je předchozí funkce definovaná na intervalu $(-0.5, 1.5\rangle$, jsou kritické body i tabulka hodnot stejné. Jediný rozdíl bude nyní v tom, že v krajním bodě -0.5 není ani lokální maximum ani maximum funkce, protože tento bod nepatří do definičního oboru dané funkce. Z toho vyplývá, že funkce nenabývá maxima na svém definičním oboru.



Konec příkladů 4.

Příklady 5:

Najděte asymptoty, pokud existují, pro funkce:

$$\frac{x^2-3}{2x-4}, \quad \sin x, \quad (x+2)^{(2/3)} - (x-2)^{(2/3)}.$$

Konec příkladů 5.

Příklady 6:

Vzorový příklad na průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x+1)^2}.$$

1. Jedná se o racionální funkci, jejíž definiční obor je celé $\mathbb{R}$ bez bodu -1, tedy $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Funkce není ani lichá ani sudá či periodická. Je spojitá všude na svém definičním oboru.

2. $f' = x(x^2+3x-4)(x+1)^{-3}$ a tedy definiční obor derivace je shodný s definičním oborem naší funkce (což platí vždy pro racionální funkce). Odtud opět plyne spojitost funkce.

3. $f'(x) = 0$ pro $x = 0, x = 1, x = -4$. Kritické body jsou tedy $-\infty, -4, -1_-, -1_+, 0, 1, +\infty$ (krajní bod -1 se bere dvakrát a je vhodné ho rozlišit indexy -,+).

Určí se příslušné hodnoty, v krajních bodech definičního oboru se spočítají limity. Tabulka hodnot vypadá následovně:

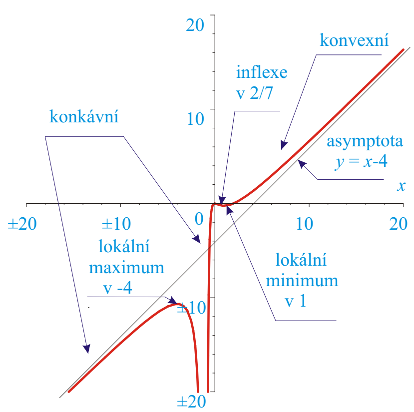
$-\infty$	-4	-1_-	-1_+	0	1	$+\infty$
$-\infty$	-32/3	$-\infty$	$-\infty$	0	-1/4	$+\infty$

Z tabulky je vidět, že graf funkce stoupá od $-\infty$ k hodnotě v bodě $x = -4$ a pak zase klesá do $-\infty$, jakmile se blíží zleva k bodu -1. Na pravé straně tohoto bodu zase stoupá od $-\infty$ k hodnotě 0 v bodě $x = 0$ a pak opět klesá k hodnotě v bodě $x = 1$; od této hodnoty pak stále roste k $+\infty$. Můžeme tedy usoudit, že f má lokální maxima v bodech $x = -4$ a $x = 0$, lokální minimum v bodě $x = 1$ a nemá absolutní extrémy.

4. Podle příslušných vzorců popsaných po definici asymptot je $a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$ a $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = -4$. Funkce tedy má společnou asymptotu $y = x - 4$ v $+\infty$ i v $-\infty$.

5. Zhruba lze nakreslit graf. Lze z něj zjistit, že funkce asi bude konkávní v $(-\infty, -1)$ a v intervalu $(-1, c)$ pro nějaké kladné $c < 1$, a konvexní v $(c, +\infty)$ (bod c tedy bude inflexní). Vyřešit tuto situaci lze v daném případě poměrně lehce. $f'' = 2(7x-2)/(x+1)^4$ a tedy bod c je roven 2/7, protože $f'' < 0$ pro $x < 2/7, x \neq -1$ a $f'' > 0$ pro $x > 2/7$. Uvědomte si, že f není konkávní pro $x < 2/7$ – proč?

6. Nyní lze nakreslit poměrně přesně graf funkce:



Podle předchozího postupu udělejte průběh funkcí:

$$x\sqrt[3]{2-x^2}, \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}, \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

V posledním příkladu jsou „hroty" a je vhodné v nich spočítat jednostranné derivace.

Konec příkladů 6.

Příklady 7:

Napište polynom x^3+1 jako polynom v mocninách $x-1$, tj. ve tvaru $a_3(x-1)^3+a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+a_0$.

Najděte Taylorův polynom stupně 2 pro funkci $1/(1-x)$ v bodě 0 a odhadněte numericky zbytek na intervalu $(-1/10, 1/10)$.

Najděte Taylorovy polynomy stupně n funkcí sinus a cosinus v bodě 0. Odhadněte zbytky na intervalu $(-p, p)$. Budou zbytky na tomto intervalu konvergovat k 0 (pro libovolné dané p)?

Najděte p takové, že $|R_{(\cos x,0,4)}(x)| \le 10^{-3}$ pro $x \in (-p, p)$.

Najděte nejmenší přirozené číslo n tak, že $|R_{(\sin x,0,n)}(x)| \le 10^{-5}$ pro $x \in (-2, 2)$.

Dělení Taylorových polynomů. Má se zjistit Taylorův polynom 3.stupně funkce tg v bodě 0 dělením Taylorových polynomů funkcí sinus a cosinus.

Taylorovy polynomy 3. stupně funkcí sinus a cosinus jsou $x - x^3/3!$, resp. $1 - x^2/2!$.

1. Vydělí se nejmenší stupeň u $x - x^3/3!$ nejmenším stupněm u $1 - x^2/2!$ a dostane se x.
2. Výsledkem se vynásobí dělitel (dostane se $x - x^3/2!$) a odečte se od dělence – dostane se $x^3/3$.
3. U dosaženého výsledku se opět vydělí nejmenší stupeň (tj. $x^3/3$) nejmenším stupněm dělitele (tj. 1) a dostane se $x^3/3$, což je v daném případě konečný výsledek.

Spočítejte uvedeným způsobem Taylorův polynom 5. stupně funkce tg v bodě 0.

Spočítejte Taylorův polynom stupně 3 funkce $\frac{\cos x}{x-1}$ v bodě 0. Použijte jak postup z definice Taylorova polynomu, tak dělení Taylorových polynomů použitých funkcí.

Spočtěte Taylorovy polynomy funkce cosinus pomocí derivace Taylorových polynomů funkce sinus.

Ukažte, že všechny Taylorovy polynomy v bodě 0 následující funkce f jsou nulové (a tedy konvergují k f pouze v bodě 0):

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{pro } x \neq 0; \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Počítání limit pomocí Taylorových polynomů

Budeme počítat limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}\,.$$

Jmenovatel i čitatel se nahradí příslušnými Taylorovými polynomy (zde na příslušných místech stupně 4 a stupně 2)

$$\frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{2(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)) - 2 + x^2}{x^2(x + o(x^2))^2} = \frac{x^4/12 + o(x^5)}{x^4 + o(x^5)}\,.$$

Pro poslední rovnost bylo použito několika jednoduchých úprav pro práci s $o(x^n)$:

$$a \cdot o(x^n) + b \cdot o(x^n) = o(x^n)\,,\, x^k o(x^n) = o(x^{k+n})\,,\, o(x^k) \cdot o(x^n) = o(x^{k+n})\,.$$

Dále platí rovnost $f(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$ pro každou funkci f spojitou v 0 (stačí dokonce, aby f byla omezená v okolí 0).

Pokračování příkladu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4/12 + o(x^5)}{x^4 + o(x^5)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{12} + \frac{o(x^5)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^5)}{x^4}} = \frac{1}{12}\,.$$

Exponenciální funkce

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

Funkce sinus

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

…a musím se přiznat, že jsem ještě nikdy nemusela psát ten n-tý člen a následující zbytek.

Já ho už musel psát mockrát, ale nikdy jsem se netrefil.

Funkce kosinus

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

…nicméně ten zbytek za n-tým členem je v absolutní hodnotě nanejvýš roven $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, taková jsem vynalézavá.

Binomický rozvoj

Protože funkci x^p nelze pro libovolná p zkoumat v bodě $x = 0$, posouvá se obvykle o 1 doleva:

$$(1+x)^p = 1 + px + \tfrac{p(p-1)}{2}x^2 + \cdots \tfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + R_n(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{p}{k} x^k + p(p-1)...(p-n)(1+c)^{p-n-1}\tfrac{x(x-c)^n}{n!}\ , \text{ kde } \tbinom{p}{k} = \tfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

pro $x > -1$ a nějaké c mezi 0 a x. Byl použit zbytek v Cauchyově tvaru – důvodem je snadnější důkaz toho, že pro velká n je zbytek velmi malý pro $x < 1$ (viz další kapitola o řadách).

Speciálně pro $p = 1/2$ a $p = -1/2$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + R_n(x)\,, x > -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots (-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + R_n(x)\,, x > -1$$

Logaritmická funkce

Ze stejných důvodů jako u binomického rozvoje se musí logaritmická funkce pro Taylorovu řadu v bodě 0 posumout:

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

$$\left(\text{popř. } + (-1)^n \frac{x(x-d)^n}{(1+d)^{n+1}}\right)$$

pro nějaká c, d mezi 0 a x, kde $x > -1$.

Cyklometrické funkce

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}x^{2k+1} + R_n(x)\,,\ \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + R_n(x)\,.$$

Konec příkladů 7.

Příklady 8:

Konec příkladů 8.

Příklady 9:

Konec příkladů 9.

OTÁZKY

Otázky 1:

L'Hospitalovo pravidlo bylo dokázáno trochu obecněji:

při předpokladu $\lim_{x\to a_+} |g(x)| = +\infty$ se nikde nepoužil předpoklad $\lim_{x\to a_+} |f(x)| = +\infty$.

Uvědomte si ale, že v případě $\lim_{x\to a_+} |f(x)| \neq +\infty$ je použití l'Hospitalova pravidla zbytečné nebo marné, kromě jednoho případu.

Někdy je vhodné převést daný neurčitý výraz na neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$. Uveďte způsoby, jakými se to provede.

Konec otázek 1.

Otázky 2:

Funkce f se nazývá *rostoucí v bodě* a, jestliže existuje okolí U bodu a tak, že pro $x \in U \cap \mathcal{D}(f), x < a$, je $f(x) < f(a)$ a pro pro $x \in U \cap \mathcal{D}(f), x > a$, je $f(x) > f(a)$.

Zřejmým způsobem se definují pojmy *klesající v bodě, nerostoucí v bodě, neklesající v bodě* – napište si definice.

Ukažte, že f je neklesající na intervalu J právě když je neklesající v každém bodě z J. Podobně pro funkce nerostoucí, klesající a rostoucí. (Návod: pro $x < y$ a $f(x) > f(y)$ vezměte supremum všech $z \in [x, y)$ takových, že $f(z) > f(y)$.)

Nechť je f definována na okolí bodu a a $f'(a)$ existuje. Ukažte, že f je klesající v a jestliže $f'(a) < 0$.

Zformulujte a dokažte příslušné tvrzení pro funkce rostoucí v bodě. Najděte příklad funkce klesající v nějakém bodě a, a přitom neplatí $f'(a) < 0$.

Ukažte, že neplatí obdoba předchozí věty pro funkce neklesající a nerostoucí v bodě.

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu J a má na J derivaci. Pro $p \in J$ označuje g_p rovnici tečny ke grafu f v bodě $(p, f(p)$. Ukažte, že f je na J konvexní právě když $f(x) \geq g_p(x)$ pro všechna $p, x \in J$. Jak se změní formulace pro charakterizaci ryzí konvexity?

Uvědomili jste si, že v předchozím případě musí být derivace vždy vlastní?

Bude předchozí upozornění platit i pro uzavřený interval?

Zformulujte předchozí charakterizaci konvexity pro uzavřený interval.

Je-li c vnitřní bod intervalu J a f je funkce na J, která má v c nevlastní derivaci, pak v jednoduchých příkladech bývá c inflexním bodem.

Ukažte příklad, že tomu tak nemusí být a najděte podmínky na f, které už implikují, že bod s nevlastní derivací je inflexní bod.

Konec otázek 3.

Otázky 4:

Najděte příklad spojité funkce na $(0, 1)$, která nemá žádný lokální extrém.

Najděte příklad spojité funkce na $(0, 1)$, která nemá žádné lokální minimum, ale má lokální maximum.

Najděte příklad spojité funkce na $(0, 1)$, která má lokální maximum (nekonečně mnoho lokálních maxim), ale nemá absolutní maximum.

Ukažte, že monotónní (i nespojitá) funkce na uzavřeném omezeném intervalu má vždy absolutní minimum i maximum.

Najděte příklad spojité funkce na otevřeném intervalu, která v nějakém vnitřním bodě má derivaci rovnou 0 a nemá v něm ani lokální extrém, ani inflexní bod.

Konec otázek 4.

Otázky 5:

Najděte příklady, že funkce má v obou nevlastních bodech asymptoty, a to buď různé (rovnoběžné i různoběžné) nebo stejné.

Najděte příklady funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, které nemají asymptoty ani v jednom nevlastním bodě, nebo jen v jednom nevlastním bodě.

Ukažte, že má-li f v nevlastním bodě c asymptotu, existuje $\lim\limits_{x \to c} f(x)$. Jakou má souvislost tato limita se směrnicí asymptoty?

Najděte příklad funkce na $(0, +\infty)$, pro kterou existuje vlastní $a = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/x$, ale neexistuje $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$. Jakou má souvislost tato situace s $\lim\limits_{x \to c} f(x)$?

Najděte příklad funkce f, která má asymptotu v $+\infty$, ale $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ neexistuje. $(\sin(x^2)/x)$

Konec otázek 5.

Otázky 6:

Konec otázek 6.

Otázky 7:

Dokažte vzorce pro Taylorovy polynomy součtu a násobku reálným číslem.

Dokažte vzorec pro derivaci Taylorova polynomu.

Ukažte, že je-li T Taylorův polynom 1. stupně funkce sinus v bodě 0, pak není pravda, že $T(x^2+1)$ je Taylorův polynom 2. stupně funkce $\sin(x^2+1)$ v žádném bodě (ani menšího stupně, vynechají-li se vyšší mocniny).

Konec otázek 7.

Otázky 8:

Konec otázek 8.

Otázky 9:

Konec otázek 9.

CVIČENÍ

Cvičení 1: Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} .$$

Řešení. Počítáme podle l'Hospitalova pravidla. Jde o případ ∞/∞. Ověření předpokladů (limita ve jmenovateli nevlastní) je v tomto případě triviální. Píšeme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0 .$$

Použili jsme $\overset{l'H}{=}$ ke sdělení, že se používá l'Hospitalovo pravidlo. Pokud to napíšeme, očekává se od nás, že někde ověříme předpoklady. Pokud se nakonec vpravo dopočítáme výsledku, bude $\overset{l'H}{=}$ znamenat rovnost.

To se zde po opakovaném použití „lopitala" povedlo.

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} .$$

Řešení. Píšeme společně s l'Hospitalem

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \quad &\overset{l'H}{=} \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} = \\
&= \quad e \lim_{x\to 0} \frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} \overset{l'H}{=} \\
&\overset{l'H}{=} \quad e \lim_{x\to 0} \frac{-\log(1+x)}{2x+3x^2} \overset{l'H}{=} \\
&\overset{l'H}{=} \quad e \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x} = -\frac{e}{2} .
\end{aligned}$$

Cestou se musí průběžně ověřovat předpoklady (jaké?).

Příklad. Nechť má funkce f druhou derivaci. Dokažte, že

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} .$$

Řešení. Píšeme podle l'Hospitala (podle h)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} &\overset{l'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) + f'(x) - f'(x-h)}{2h} = \\
&= f''(x) .
\end{aligned}$$

Koukám, že se asi nemohlo lopitalovat dvakrát. Hle hle hle.

Kdo ulopitaluje následující limity je asi hodně zvláštní týpek.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 0 \ ; \ \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = 1 .$$

Konec cvičení 1.

Cvičení 2:
Konec cvičení 2.

Cvičení 3:
Konec cvičení 3.

Cvičení 4:
Konec cvičení 4.

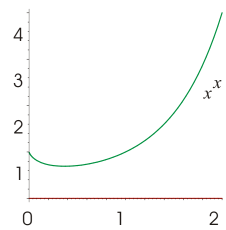
Cvičení 5:
Konec cvičení 5.

Cvičení 6: Příklad. Ověřte konvexitu funkce $f(x) = x^x$.

Řešení. Druhá derivace f je rovna

$$f''(x) \;=\; x^x\left((1+\log x)^2+\frac{1}{x}\right)\,.$$

Kladné znaménko druhé derivace zaručuje konvexitu.



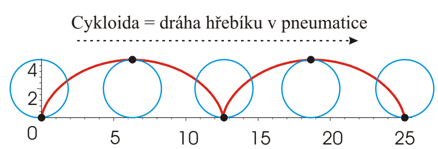
Příklad. Zjistěte konvexitu cykloidy

$$x=a(t-\sin t)\;\;,\;\;y=a(1-\cos t)\;\;,\;\;a>0\,.$$

Řešení. Druhá derivace implicitně zadané funkce $y=y(x)$ je rovna

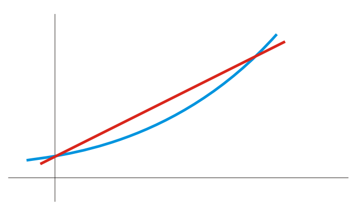
$$\frac{d^2y}{dx^2}\;=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}\,.$$

Záporné znaménko druhé derivace zaručuje konkavitu.



Příklad. Nechť je dvakrát derivovatelná funkce f konvexní na $\mathbb{R}$ a má v počátku kladnou drivaci. Dokažte, že není omezená.

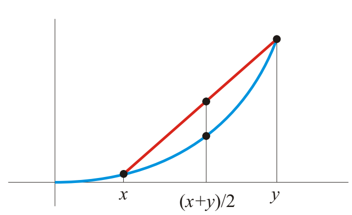
Řešení. Dvakrát derivovatelná funkce, která je konvexní, má první derivaci rostoucí. To pomocí Lagrangeovy věty vede na neomezenost funkce. Jiná možnost je použít vhodnou sečnu.



Příklad. Objasněte geometrický význam nerovnosti ($x>0$, $y>0$, $x\neq y$, $n\geq 1$)

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\;\leq\;\frac{x^n+y^n}{2}\,.$$

Řešení. Hodnota v „mezibodě" je u konvexní funkce pod sečnou.



Konec cvičení 6.

Cvičení 7:

Praktičtí lidé vymysleli óčko.

Pokud byla nějaká funkce v počátku řádově menší než x^2, psali o ní, že je $o(x^2), x \to 0$. S tímto zápisem se můžeme dobře bavit o malinkých funkcích.

Tato óčka jde sčítat, odčítat, násobit a někdy i dělit.

Zápisem

$$f(x) = o(g(x))\ ,\ x \to 0$$

rozumíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\ .$$

Také by byl možný zápis

$$f(x) = o_g(x)\ ,\ x \to 0\ ,$$

kde funkce o_g by byla jakási pomocná funkce, o které by bylo známo pouze to, že jakási limita $(o_g(x)/g(x) \to 0$ pro $x \to 0)$.

Často pracujeme s $o(x^n)$. Pokud

$$e^x = 1 + x + o(x)\ ,\ x \to 0$$

a

$$\sin x = x + o(x)\ ,\ x \to 0\ ,$$

jsou zde vlastně definované dvě pomocné funkce

$$o_1(x) = e^x - 1 - x\ ,\ o_2(x) = \sin x - x\ .$$

Součet $o_1(x) + o_2(x)$ má opět vlastnost $o(x)$, opravdu

$$\lim_{x\to 0} \frac{o_1(x) + o_2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x + \sin x - x}{x} = 0\ .$$

Tedy není nutno v praxi takové funkce, které jsou $o(x)$, indexovat a píšeme místo $o_1(x)$ rovnou $o(x)$.

Podobně i s vyššími mocninami a jinými operacemi než sčítání.

Příklad. Spočtěte
$$o(x) + o(x^2) + o(x^3)\ ,\ x \to 0\ .$$

Řešení. Výsledek je samozřejmě $o(x)$ pro $x \to 0$.

Funkce řádově menší než x^2 u nuly jsou řádově menší než x u nuly.

Příklad. Najděte Taylorův polynom řádu 2 pro funkci
$$f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}\ .$$

Řešení. Píšeme
$$f(x) = (1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60}\ .$$

Použijeme rozvoj $(1+x)^\alpha$ a dostaneme
$$(1+x)^{100} = 1 + 100x + 50 \cdot 99x^2 + o(x^2),\ x \to 0\ .$$

Podobně s ostatními činiteli. Po vynásobení a vynechání nepotřebných členů dostaneme
$$f(x) = 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2),\ x \to 0\ .$$

Například $xo(x^2) = o(x^2)$, $x \to 0$, což dělá škodolibým radost. Samozřejmě je to i $o(x^3)$, $x \to 0$.

Příklad. Spočtěte čtvrtou derivaci v počátku funkce
$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4),\ x \to 0\ .$$

Řešení. Podle Taylorovy věty víme, že
$$-2x^4 \ = \ \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4\ ,$$

tedy $f^{(iv)}(0) = -48$.

Příklad. Spočtěte rozvoj $\sin\sin x$ řádu 4 v počátku.

Řešení. Píšeme
$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^4 x)\ ,\ x \to 0\ .$$

Dosadíme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\ ,\ x \to 0\ .$$

Po úpravách dostaneme

$$\sin \sin x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\ ,\ x \to 0\ .$$

Vždy kontrolujeme, zda má lichá funkce pouze liché členy v Taylorově polynomu. Když ne, tak není lichá ;-)

Příklad. Spočtěte odhad chyby

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}\ ,\ |x| < \frac{1}{2}\ .$$

Řešení. Podle Lagrangeova tvaru zbytku píšeme

$$\sin x - x + \frac{x^3}{3!} \ = \ R_5(x)\ ,$$

tedy

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| = |R_5(x)| < \frac{|x^5|}{5!} \leq \frac{1}{3850}\ .$$

Příklad. Najděte rozvoj funkce tg řádu 5 v počátku.

Řešení. Poctivě derivujeme a sestavíme Taylorův polynom

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)\ ,\ x \to 0\ .$$

Je také možné vydělit Taylorův polynomy funkcí sinus a kosinus.

Příklad. Zjistěte Taylorův polynom funkce arkussinus v počátku.

Řešení. Máme dvě možnosti. Derivujeme arkussinus a dostaneme

$$\arcsin' x \ = \ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

a použijeme rozvoj obecné mocniny.

Druhá možnost je předpokládat rozvoj ve tvaru (jde o lichou funkci)

$$\arcsin x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^6)\ ,\ x \to 0\ .$$

Dosadíme $x = \sin y = y - y^3/5 + y^5/120 + o(y^6)$, $y \to 0$ a porovnáme levou a pravou stranu

$$y = \arcsin \sin y = \sin y + a(\sin y)^3 + b(\sin y)^5 + o(\sin^6 y)\ ,\ y \to 0\ .$$

Po dosazení rozvoje místo $\sin y$ spočítáme koeficienty a, b.
Výsledek je vždy

$$\arcsin x \ = \ x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6),\ x \to 0\ .$$

Konec cvičení 7.

Cvičení 8:
Konec cvičení 8.

Cvičení 9:
Konec cvičení 9.

UČENÍ

Učení 1:
Konec učení 1.

Učení 2:
Konec učení 2.

Učení 3:
Konec učení 3.

Učení 4:
Konec učení 4.

Učení 5:
Konec učení 5.

Učení 6:

Množina bodů nespojitosti nemůže být nekonečná.

Už jsi šel někdy po schodech?

Nerostoucí funkce je buď konstantní nebo klesající.

Když ty neposloucháš, já taky nebudu.

$$f \text{ nerostoucí } \overset{?}{=} f \text{ není rostoucí}$$

Tohle je jazykově zcela správně.

Omlouvám se, tohle se matematikům nepovedlo.
Máš pravdu, ale už to přede mnou nikdy neříkej.

Má-li funkce extrém, je tam nulová derivace.

Dluhy jsou vyrovnány. Tohle NIKDY neříkej.

Funkce $1/x$ má v počátku inflexní bod.

V inflexním budě plynule přecházíš z levotočivé do pravotočivé zatáčky nebo naopak. To je teda jízda!

Nerostoucí znamená, že je spojitá.

Víc jsem opravdu nečekal.

Konec učení 6.

Učení 7:
Konec učení 7.

Učení 8:
Konec učení 8.

Učení 9:
Konec učení 9.