Použití derivací

V této části budou uvedena některá použití derivací.

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO POČÍTÁNÍ LIMIT

Tvrzení je uvedeno pro jednostrannou limitu zprava. Samozřejmě obdobné tvrzení platí pro limitu zleva nebo pro oboustrannou limitu.

VĚTA. (l'Hospital) Nechť funkce f, g mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existuje.

Jestliže platí

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_+} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to a_+} |f(x)| = \lim_{x \to a_+} |g(x)| = +\infty\,,$$

pak

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

PRŮBĚH FUNKCE

Stanovit průběh funkce znamená zjistit intervaly, kde je funkce monotónní, konvexní či konkávní, zjistit její hodnoty nebo limity v různých potřebných bodech, asymptotické chování v některých bodech, maximální a minimální hodnoty, popř. další vhodné vlastnosti.

511

Při zjišťování těchto vlastností pomáhá znalost derivace funkce.

Monotónie

Zda je funkce rostoucí nebo klesající lze u složitějších funkcí těžko zjišťovat z definice těchto vlastností. Následující kritérium může ověření monotónie značně zjednodušit.

VĚTA. Nechť má funkce f na intervalu J derivaci.

1. Funkce f je na J neklesající právě když je $f' \geq 0$.
2. Funkce f je na J nerostoucí právě když je $f' \leq 0$.
3. Funkce f je na J rostoucí, je-li $f' > 0$.
4. Funkce f je na J klesající, je-li $f' < 0$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Konvexita

Podobně jako u monotonie, lze i konvexitu a konkávitu zjišťovat pomocí derivace a nikoli podle definice těchto vlastností.

VĚTA. Nechť má funkce f na intervalu J derivaci.

1. Funkce f je na J konvexní právě když je f' neklesající.
2. Funkce f je na J konkávní právě když je f' nerostoucí.
3. Funkce f je na J ryze konvexní právě když je f' rostoucí.
4. Funkce f je na J ryze konkávní právě když je f' klesající.

Použije-li se v předchozí větě charakterizace monotónie pomocí derivací, dostane se tvrzení:

DŮSLEDEK. Nechť má funkce f na intervalu J druhou derivaci.

1. Funkce f je na J konvexní právě když je $f'' \geq 0$.
2. Funkce f je na J konkávní právě když je $f'' \leq 0$.
3. Je-li $f'' > 0$, je f na J ryze konvexní.
4. Je-li $f'' < 0$, je f na J ryze konkávní.

511

DEFINICE. Nechť funkce f je definována na intervalu J, c je vnitřní bod J, f je spojitá v c a existuje $f'(c)$.

Bod c se nazývá inflexní bod f, jestliže existuje okolí $(a, b) \subset J$ bodu c takové, že funkce f je ryze konvexní na jedné ze dvou částí $(a, c]$, $[c, b)$ a ryze konkávní na druhé části.

VĚTA. Nechť funkce f má druhou derivaci na nějakém okolí bodu c. Pak c je inflexním bodem funkce f, jestliže f'' mění v bodě c znaménko.

DŮSLEDEK. Funkce f definovaná na intervalu J může mít inflexní bod pouze v následujících bodech:

1. ve vnitřním bodě J, ve kterém f nemá druhou derivaci;
2. ve vnitřním bodě J, kde má f druhou derivaci rovnou 0.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Extrémy

Body, ve kterých funkce dosahuje maximálních nebo minimálních hodnot patří k nejdůležitějším bodům, které je vhodné o funkci znát. Jsou předmětem mnoha praktických úloh.

Je vhodné připomenout, že *maximální* (nebo *minimální*) hodnota znamená, že žádná jiná srovnávaná hodnota není větší (resp. menší), kdežto *největší* (nebo *nejmenší*) hodnota znamená, že každá jiná srovnávaná hodnota je menší (resp. větší).

DEFINICE. Funkce f má v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, nebo lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu c takové, že $f(c)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v c lokální extrém, jestliže má v c lokální maximum nebo lokální minimum.

Nahradí-li se v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší*, dostane se definice ostrých lokálních extrémů.

511

VĚTA. Funkce f definovaná na intervalu J může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v krajním bodě J, který patří do J;

2. ve vnitřním bodě J, ve kterém f nemá derivaci;
3. ve vnitřním bodě J, kde má f derivaci rovnou 0.

Dalším krokem po nalezení všech kritických bodů je zjistit, zda v nich lokální extrém nastane a zda jde o maximum nebo minimum. Následující tvrzení a jeho důsledek jsou obdobou tvrzení pro určení inflexního bodu. Důkaz vyplývá ihned z definice lokálních extrémů.

VĚTA. Nechť je $c \in \mathcal{D}(f)$ a (a,b) je okolí c.

1. Jestliže f je neklesající v jedné ze dvou částí $(a,c]$, $[c,b)$ a nerostoucí ve druhé, má f v c lokální extrém.
2. Jestliže f je rostoucí v jedné ze dvou částí $(a,c]$, $[c,b)$ a klesající ve druhé, má f v c ostrý lokální extrém.

DŮSLEDEK. Nechť je c vnitřním bodem definičního oboru funkce f a nechť f má derivaci v nějakém okolí bodu c. Jestliže f' mění v bodě c znaménko, má f v tomto bodě ostrý lokální extrém.

Předchozí tvrzení dávají návod nejen k nalezení lokálního extrému ale i ke zjištění, o jaký extrém se jedná. Je-li např. f klesající nalevo od c a rostoucí napravo od c, je v c ostré lokální minimum.

Následující tvrzení ukazuje jinou cestu pro ověření typu extrému.

VĚTA. Nechť funkce f má ve vnitřním bodě c svého definičního oboru lokální extrém. Je-li f v okolí bodu c konvexní (resp. konkávní), má v c lokální minimum (resp. lokální maximum).

DŮSLEDEK. Nechť funkce f má ve vnitřním bodě c svého definičního oboru druhou derivaci $f''(c)$.

1. Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$, má f v bodě c ostré lokální minimum.
2. Je-li $f'(c) = 0$ a $f''(c) < 0$, má f v bodě c ostré lokální maximum.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Asymptoty

Chování funkce „blízko" nevlastních bodů se dá zhruba popsat pomocí limit funkce a její derivace v těchto bodech.

Nejzajímavější je případ, kdy se graf funkce blíží k nějaké přímce, která se pak nazývá asymptotou.

511

DEFINICE. Přímka $y = ax + b$ se nazývá asymptotou funkce f v nevlastním bodě c, jestliže $\lim_{x\to c}(f(x) - (ax + b)) = 0$.

VĚTA. Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f v nevlastním bodě c právě když platí

$$a = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to c}(f(x) - ax).$$

Poznámky 5 Příklady 5 Otázky 5

Průběh funkce

Průběh funkce f znamená určit přinejmenším následující:

1. definiční obor;
2. spojitost;
3. lokální a absolutní extrémy;
4. asymptoty;
5. konvexita, konkávita, inflexní body;
6. nakreslit graf.

Nelze navrhnout postup, který je optimální pro všechny možné případy. Nicméně, následující postup bývá většinou vhodný.

1. Pokud není definiční obor dán, zjistí se běžným způsobem, tj. ověřením, kde má použitý předpis smysl. Je vhodné ověřit, zda je funkce lichá nebo sudá nebo periodická – v těchto případech je pak možné zkoumání funkce zúžit na menší množinu.
2. Vypočte se derivace a zjistí se její definiční obor – na tomto definičním oboru je původní funkce spojitá. Ve zbývajících bodech (nebo ve všech) se spojitost funkce většinou zjistí přímo z předpisu funkce pomocí základních vět o spojitosti funkcí.
3. Naleznou se všechny kritické body pro lokální extrémy a udělá se tabulka hodnot v těchto bodech (viz *Příklady* v lokálních extrémech), pro každý interval definičního oboru zvlášť.
4. Zjistí se asymptoty v nevlastních bodech, obvykle podle předchozí charakterizace.
5. Konvexita, konkávita a inflexní body se obvykle zjišťují pomocí druhé derivace nebo pomocí monotónie první derivace. To může být obtížné, a proto se někdy tato část vynechává a dodělává se až při kreslení grafu, ukáže-li se to potřebné.
6. Většinou je v této chvíli známo dost vlastností funkce pro hrubé nakreslení grafu. Je nutné si připomenout, že v intervalech definičního oboru funkce spojujících sousední kritické body musí funkce buď růst nebo klesat. Pokud nebyla zjišťována konvexita a konkávita, nemusí být jasné, jak v některých těchto intervalech graf funkce „ohnout".
7. V bodech, ve kterých derivace neexistuje, je vhodné vypočítat jednostranné derivace, pokud existují. Pomohou v grafu přesněji zakreslit „hroty" v těchto bodech.

Poznámky 6 Příklady 6 66

APROXIMACE FUNKCE POLYNOMY, TAYLORŮV POLYNOM

Zkoumání některých funkcí může být velmi složité, a proto se nahrazují funkcemi jednoduššími, které jsou v jistém smyslu velmi blízko dané funkci (danou funkci aproximují).

Slovo „blízko" může mít více významů. Např. v každém bodě budou hodnoty aproximující funkce blízko hodnotám dané funkce, ale v různých bodech různě blízko, nebo budou ve všech bodech hodnoty stejně blízko. Základem je tu bodová konvergence posloupnosti funkcí (tj., konvergence posloupnosti hodnot v každém bodě)

Uvažujme posloupnost funkcí $f_n(x) = x^2/n$. Jistě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,.$$

Tedy tato posloupnost aproximuje nulovou funkci na reálné ose (ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ různě rychle)

Uvažujme posloupnost funkcí $g_n(x) = 1/n$. Jistě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0\,.$$

Tedy tato posloupnost také aproximuje nulovou funkci na reálné ose (ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ stejně).

První případ se nazývá *bodová aproximace* (vlastně jiný termín pro bodovou konvergenci), druhý případ *stejnoměrná aproximace* (je to bodová konvergence s dalším požadavkem navíc). V prvním případě se n-tá funkce od limitní funkce u nekonečna velmi vzdaluje, v druhém případě je n-tá funkce docela blízko limitní vlastně všude najednou.

Jako aproximující funkce se často volí polynomy, se kterými se dobře pracuje a jejichž hodnoty se dobře počítají. V této části budou sestrojeny tzv. Taylorovy polynomy, které bodově (někde i stejnoměrně) aproximují mnoho funkcí.

Bude-li požadována vyšší přesnost, bude stačit k již sestrojeným polynomům přidat další členy vyšších stupňů.

VĚTA. Nechť funkce f má derivace v bodě a až do řádu n. Pak polynom

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

je jediný polynom nejvýše n-tého stupně takový, že $f^{(i)}(a) = T_n^{(i)}(a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$.

DEFINICE. Polynom $T_n(x)$ (přesněji $T_{f,a,n}(x)$) se nazývá Taylorův polynom stupně nejvýše n funkce f v bodě a. Je-li $a = 0$, nazývá se $T_n(x)$ též Maclaurinův polynom.

Následující věta usnadní výpočet Taylorových polynomů pro různé konstrukce funkcí.

VĚTA. Pro Taylorovy polynomy v bodě a platí (pro $p \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
T_{f+g,n} &= T_{f,n} + T_{g,n}\,,\\
T_{pf,n} &= pT_{f,n},\,,\\
T_{f\cdot g,n} &\doteq T_{f,n} \cdot T_{g,n}\,,\\
T_{\frac{f}{g},n} &\doteq \frac{T_{f,n}}{T_{g,n}}\,,\\
T_{f',n}(x) &= (T_{f,n+1}(x))'\,,\\
\text{pro } a = 0\,, \quad T_{f(px^k),kn}(x) &= T_{f(x),n}(px^k)\,.
\end{aligned}$$

Ve dvou případech je nad rovností tečka. U součinu funkcí znamená, že levá strana (polynom stupně nejvýše n) se rovná části pravé strany (polynom stupně až $2n$) po vynechání mocnin vyšších než n. U podílu se na pravé straně nedělí polynomy obvyklým způsobem, tj. nejvyšší mocnina čitatele nejvyšší mocninou jmenovatele, ale nejnižší mocnina čitatele nejnižší mocninou jmenovatele a skončí se u stupně n, jinak je postup dělení stejný (např. $(x + x^2) : (x - x^3) = 1 + x + x^2 + \ldots$, viz *Příklady*).

Pokud mají Taylorovy polynomy bodově aproximovat funkci f na nějaké množině M, musí podle definice bodové konvergence pro každé $x \in M$ platit $\lim T_n(x) = f(x)$, neboli $\lim(T_n(x) - f(x)) = 0$.

Kvůli stručnosti se rozdíl $f(x) - T_{f,a,n}(x)$ značí $R_{f,a,n}(x)$ (častěji jen $R_n(x)$) a nazývá se zbytek.

511

VĚTA. Nechť f má na uzavřeném intervalu s koncovými body a, x derivaci řádu $n+1$. Pak existují uvnitř tohoto intervalu body c, d tak, že

$$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a)\,.$$

První vyjádření zbytku se nazývá Lagrangeův tvaru zbytku a je jednoduchý pro zapamatování.

511

Druhé vyjádření se nazývá Cauchyův tvar zbytku.

Existují i jiné vzorce pro zbytek.

Speciálně tedy platí, že má-li f derivace až do řádu $n+1$ na intervalu J obsahujícím bod a, pak pro každé $x \in J$ existuje c_x ležící mezi a, x tak, že

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Pro $n = 0$ je předchozí rovnost totožná s rovností v Lagrangeově větě o střední hodnotě (totéž platí i při použití Cauchyova tvaru zbytku – ověřte).

VĚTA. Nechť f má v okolí bodu a derivace až do řádu n. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{f,a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

a $T_{f,a,n}$ je jediný polynom nejvýše n-tého stupně, pro který uvedená rovnost platí.

Skutečnost, že

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

se často vyjadřuje zápisem

$$g(x) = o(x-a)^n\ ,\ x \to a$$

a slovy *g je malá řádu aspoň $n+1$ v bodě a.*

Takže $R_{f,a,n}(x) = o(x-a)^n,\ x \to a$ a tento výraz pro zbytek se často nazývá Peanův tvar zbytku.

Tohoto zápisu se využívá tehdy, není-li třeba znát, o jakou funkci na levé straně se jedná. To je případ počítání limit pomocí Taylorových polynomů, kdy se jednotlivé funkce nahradí svými Taylorovými polynomy jistého stupně (předem odhadnutého) spolu se zbytky zapsanými právě pomocí malého „o".

Má-li se zjistit, že na určitém okolí bodu a Taylorovy polynomy bodově aproximují funkci f, je nutné dokázat, že v každém bodě x tohoto okolí konvergují hodnoty zbytku $R_n(x)$ (pro rostoucí n) k 0.

Protože se ve vyjádření zbytku vyskytují neznámá čísla c, d, je vhodné zbytky odhadnout seshora. Následující tvrzení plyne přímo z Lagrangeova tvaru zbytku.

VĚTA. Nechť f má derivace až do řádu $n+1$ na intervalu $(a-p, a+p)$. Pak platí pro $x \in (a-p, a+p)$:

$$|R_{(f,a,n)}(x)| \le \frac{M_{n+1}p^{n+1}}{(n+1)!}\,, \qquad \text{kde } M_{n+1} \ge \sup_{y\in(a-p,a+p)} |f^{(n+1)}(y)|\,.$$

DŮSLEDEK. Nechť f má všechny derivace na intervalu $(a-p, a+p)$. Je-li $p \le 1$ a f má všechny své derivace na $(a-p, a+p)$ omezené stejným číslem, aproximují její Taylorovy polynomy v bodě a bodově funkci f na $(a-p, a+p)$.

Poznámky 7 Příklady 7 Otázky 7 7