Aplikace

V této části budou uvedena některá použití probrané látky.

Jedná se hlavně o použití poznatků o průběhu funkce. Úlohy spočívají v hledání extrémů, popřípadě nulových bodů funkce.

Extrémy

Zkusíme metody hledání extrémů při řešení konkrétního problému.

Sněhulák

Budeme chtít postavit co nejvyššího sněhuláka ze sněhové koule o poloměru 1 metr.

Máme tedy $\frac{4}{3}\pi 1^3$ sněhu.

Hledáme kladná čísla x, y, z tak, aby

$$\frac{4}{3}\pi x^3 + \frac{4}{3}\pi y^3 + \frac{4}{3}\pi z^3 = \frac{4}{3}\pi 1^3$$

a aby (výška sněhuláka) $2x + 2y + 2z$ byla maximální.

Úloha se zjednoduší po vykrácení. Hledáme tedy kladná čísla x, y, z tak, aby

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

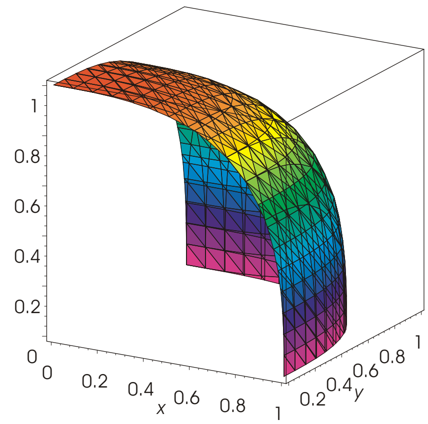
a aby $x + y + z$ bylo maximální.

Ze symetrie očekáváme, že nejspíše bude extrém pro $x = y = z$.

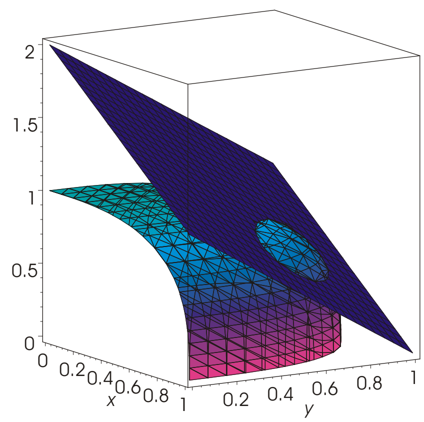
Podíváme se na body se souřadnicemi (x, y, z) v prostoru.

Leží na osmině jakési křivé koule $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ v prostoru. Na ní hledáme bod ležící na rovině $x + y + x = c$ s největší možnou konstantou c.

Křivá osminka křivé koule (odpovídá kladným souřadnicím x, y a z):



Křivá osminka s řezem odpovídajícím rovině $x + y + z = 2$.



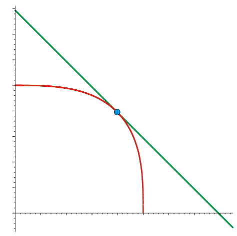
Je vidět, že již jsme blízko. Teď to musíme spočítat.

Pro pevné x budeme hledat y, z taková, aby $y^3 + z^3 = 1 - x^3$ a aby $y + z$ bylo maximální. Toto maximum (pokud existuje) označíme $m(x)$.

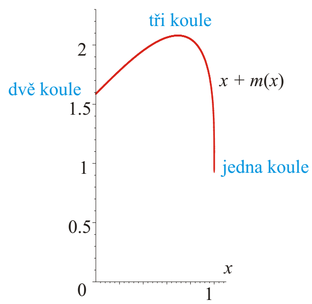
Pro $y \in [0, \sqrt[3]{1 - x^3}]$ je z určeno jednoznačně vzorečkem $\sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}$. Tento vzoreček určuje z jako konkávní funkci proměnné y (druhá derivace je záporná).

Graf této funkce je symetrický podle osy prvního kvadrantu, protože jde o „samoinverzní" funkci.

Nyní existuje právě jeden bod $(y, z) = (\sqrt[3]{(1 - x^3)/2}, \sqrt[3]{(1 - x^3)/2})$ na zkoumaném grafu, kde je derivace rovna -1 (tento bod existuje podle Lagrangeovy věty). Tedy tečna v tomto bodě odpovídá maximální hodnotě $y + z$. Tedy $m(x) = 2\sqrt[3]{(1 - x^3)/2}$.



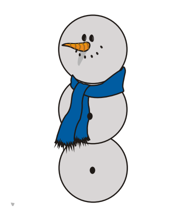
Funkce $m(x)$ je spojitá na $[0,1]$ a tedy funkce $x+m(x)$ nabývá na $[0,1]$ svého maxima.



Hodnota v tomto maximu je určena jednoznačně.

Pokud by se nabývalo maxima v jiném bodě než $x_0 = 1/\sqrt[3]{3}$, pak by v nejvyšším sněhulákovi nebyly všechny 3 koule stejně veliké a pro vhodnou dvojici různých koulí by existovalo vyšší řešení (víme, že úloha pro dvě koule má extrém pro stejné koule). To by byl spor.

Tedy nejvyšší sněhulák je sestaven ze tří stejně velkých koulí. Dosahuje přes 4 metry.



Derivace

Pro řešení některých problémů se s výhodou používá elementární tvrzení:

Pokud mají dvě funkce stejnou vlastní derivaci na intervalu, liší se na tomto intervalu o konstantu.

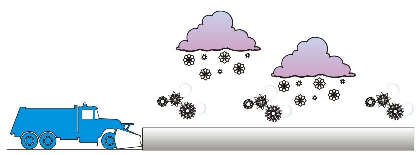
Když známe derivaci funkce f, lze někdy uhodnout funkci f „až na konstantu".

Zkusíme si to na příkladu.

Sněží

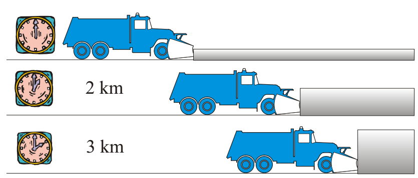
Před polednem začal padat sníh. Padá rovnoměrně a neslehává se. V poledne vyjel pluh s konstantním výkonem (rychlost x výška sněhu = konstanta).

Za hodinu ujel 2 km, za další hodinu ještě 1 km. V kolik hodin začal padat sníh.



Nechť vyjel pluh t_0 hodin před polednem. Výška sněhu v čase t je rovna (ve vhodných jednotkách) $t + t_0$. Dráha pluhu v čase t je popsána funkcí $x(t)$, $t \geq 0$.

Samozřejmě $x(0) = 0$, $x(1) = 2$, a $x(2) = 3$.



Rychlost je derivací dráhy podle času, tedy $x'(t)$. Konstantní výkon znamená rovnost

$$x'(t) \cdot (t + t_0) = c$$

pro vhodnou konstantu c.

Vydělením spočítáme

$$x'(t) = \frac{c}{t + t_0} \ ,$$

což nám umožní uhodnout funkci $x(t)$ až na neznámou konstantu d ve tvaru

$$x(t) = c \log(t + t_0) + d \ .$$

Máme tři počáteční podmínky svazující konstanty c, d a t_0. Jde o vztahy v čase $t = 0$, $t = 1$ a $t = 2$. Postupně dostaneme

$$0 = c \log(t + t_0) + d \ ; \ d = -c \log t_0 \ ; \ x(t) = c \log \frac{t + t_0}{t_0} \ .$$

$$2 = c \log \frac{1+t_0}{t_0} \ , \ 3 = c \log \frac{2+t_0}{t_0} \ .$$

Vydělíme a zbavíme se protivné konstanty c:

$$\frac{2}{3} = \frac{\log \frac{1+t_0}{t_0}}{\log \frac{2+t_0}{t_0}} \ .$$

Dostaneme rovnici

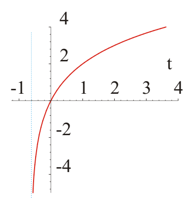
$$\log \left(\frac{2+t_0}{t_0} \right)^2 = \log \left(\frac{1+t_0}{t_0} \right)^3 \ .$$

Použijeme exponenciálu a spočítáme

$$t_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ = 0,618 \ ,$$

tedy sníh začal padat přibližně v 11:22:55.

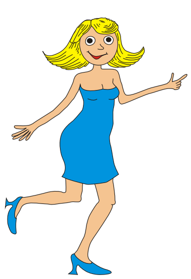
V podstatě šlo o to proložit body $[0, 0]$, $[1, 2]$ a $[2, 3]$ křivku $x(t) = c \log(at + b)$.



Pluh jede logaritmicky. Hle hle hle.

Řešení rovnic

Pro řešení rovnice $f(x) = 0$ použijeme s výhodou tvrzení, že spojitý obraz intervalu je interval.



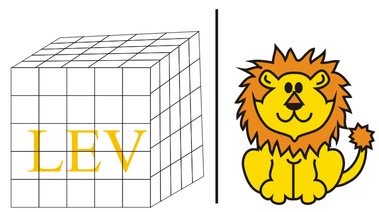
Když funkce nabývá kladných i záporných hodnot, tak existuje i nulový bod.

Metoda půlení intervalů

Známá anekdota popisuje způsob, jak chytit lva na Sahaře.

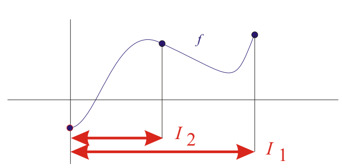
Rozdělíme Saharu na dvě poloviny. Alespoň v jedné polovině bude LEV. Tu opět rozdělíme na poloviny a postup opakujeme.

Až dosáhneme oblasti menší než klec, dáme tam klec a LEV (pokud se do klece vejde) je v kleci.



Na stejném principu funguje metoda půlení intervalů.

Metoda. Je-li f spojitá na intervalu $I_1 = [0, 1]$ a má v krajních budech opačná znaménka, rozpůlíme interval I_1 na dvě poloviny a označíme I_2 tu, na které mají koncové body opačná znaménka (pokud by v půlícím bodě hodnota nulová, jsme hotovi). Průnik intervalů I_n je jednobodový podle Cantorovy věty a funkční hodnota v tomto bodě je rovna nule.



Newtonova metoda numerického řešení rovnic

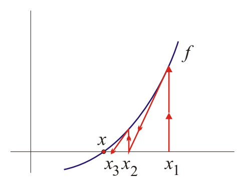
Newtonova metoda je jednoduchý postup pro přibližný výpočet řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu J pro funkci f, která má derivaci všude v J.

Budeme řešit rovnici chytrým aproximováním řešení.

Metoda tečen:

Zvolí se nějaký bod $x_1 \in J$ a v bodě $(x_1, f(x_1))$ se sestrojí tečna ke grafu funkce f.

Tato tečna protne osu x v bodě, který se označí x_2 a postup se opakuje pro tento nový bod.

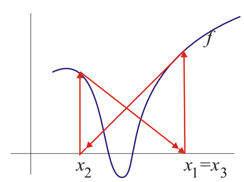


Pomocí rovnice tečny lze postupně body $x_2, x_3, \ldots$ spočítat a dostane se rekurentní vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Viděli jsme situaci, kdy posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nulovému bodu funkce.

Mohou ovšem nastat případy, že posloupnost $\{x_n\}$ nekonverguje nebo konverguje k nevhodnému bodu.



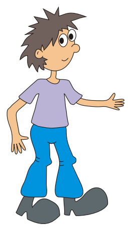
Existují podmínky, za kterých body x_n (při vhodné nebo dokonce libovolné volbě x_1) konvergují k řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu J, samozřejmě, pokud na J takové řešení existuje.

Např., pokud f' a f'' na J existují a obě jsou nenulové nebo platí jedna z následujících dvou podmínek (d je délka intervalu J):

$$\left|\frac{d \cdot f''(x)}{2f'(x)}\right| < 1\,, \qquad \left|\frac{f''(x)f(x)}{f'^2(x)}\right| < 1\,.$$

Jsou to podmínky, které zajišťují konvergenci posloupnosti vytvořené metodou tečen.

To jsem sám nevěděl.



To se nebudu učit.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 Cvičení 1 Učení 1

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Uvedená metoda patří do přibližných metod, protože obecně nevede po konečném počtu kroků k řešení, jen řešení může aproximovat s libovolnou přesností.

Přibližných metod je hodně a mnoho dalších používá derivace. Newtonova metoda je nejjednodušší. Dá se použít i pro hledání řešení v komplexních číslech. S tím úzce souvisí ony krásné fraktální množiny.

Newtonova metoda konverguje dosti rychle. Při vhodné volbě prvního členu se počet přesných desetinných míst po každém kroku zhruba zdvojnásobuje. Více se dozvíte v numerické matematice.

Konec poznámek 1.

PŘÍKLADY

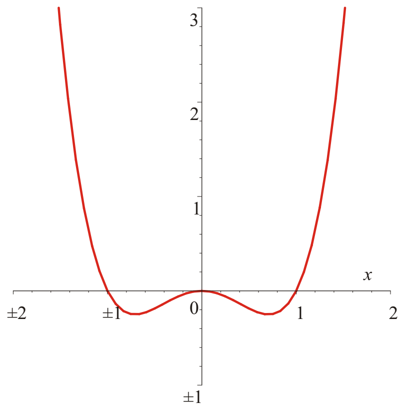
Příklady 1:

Funkce $x^2 - 2$ má samozřejmě jeden kořen $\sqrt{2}$, který je iracionálním číslem. Položte $x_1 = 1$ a sestrojte příslušný rekurentní vzorec pro Newtonovu metodu.

Vypočtěte x_2 a x_3 a uvědomte si jak rychle se zmenšuje rozdíl mezi těmito členy posloupnosti a $\sqrt{2}$.

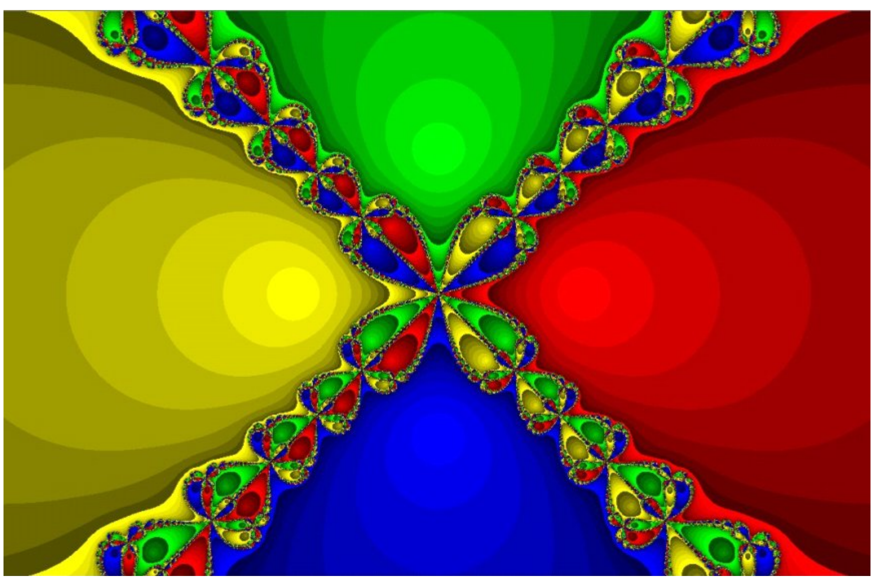
Zopakujte předchozí příklad pro funkci $x^3 + 4$.

Pro funkci $x^2(x^2 - 1)$ sestrojte příslušné fraktální množiny: bod $a \in \mathbb{R}$ bude červený nebo modrý nebo zelený podle toho, zda při volbě $x_1 = a$ bude Newtonova metoda konvergovat ke kořeni -1, resp. 0, resp. 1. $\mathbb{R}$ se rozloží na barevné intervaly.



HA. To jsou věci.

V rovině to může vypadat takto:



Konec příkladů 1.

OTÁZKY

Otázky 1:

Ukažte, že příslušná posloupnost v Newtonově metodě konverguje k řešení rovnice $f(x) = 0$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ při současném splnění tří následujících předpokladů:

f má na (a, b) druhou derivaci;

f' a f'' nemění na (a, b) znaménko;

$f(a) \cdot f(b) < 0$.

Jako první bod x_1 se zvolí bod, v němž má f stejné znaménko jako má f'.

Konec otázek 1.

CVIČENÍ

Cvičení 1:

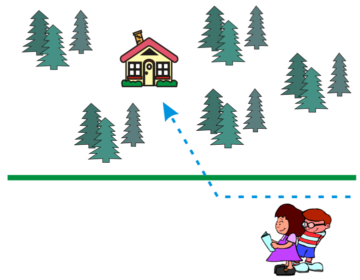
V této části budeme řešit obtížné pěkné úlohy.

Kdo neumí derivovat, je ztracen.

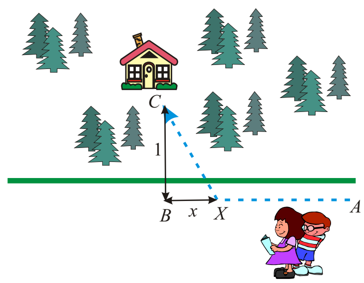
Kdo umí jenom derivovat, je ztracen.

Cesta lesem

Zkusíme se co nejrychleji dostat do perníkové chaloupky. Lesem jdeme dvakrát pomaleji než podél lesa. Kdy máme zabočit do lesa?



Kdybychom zabočili v bodě B, který je nejblíže chaloupce, nebyla by naše cesta nejrychlejší. Označíme x vzdálenost místa vstupu do lesa X k bodu B. Nechť $AB = 10$ km, $BC = 1$ km.



Pak hledáme extrémy funkce

$$10 - x + 2\sqrt{1 + x^2}$$

na intervalu $[0, 10]$.

S pomocí derivace

$$-1 + 2\,\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

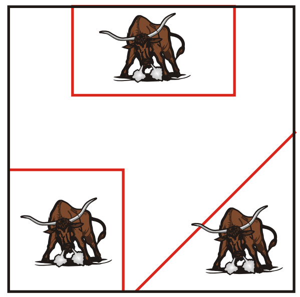
zjistíme, že se extrému nabývá v $x = 1/\sqrt{3}$.

Tedy musíme zahnout pod úhlem 60 stupňů.

Vyřešili 4 z 10.

Jak udělat býkovi výběh

Budeme chtít na pozemku oplotit výběh pro divokého býka co nejlevněji. Chceme použít 100 metrů plotu a udělat co největší výběh.



Nabízí se udělat v rohu pozemku výběh ve tvaru trojúhelníku nebo obdélníku. Další možnost je podél jedné strany pozemku ve tvaru obdélníku.

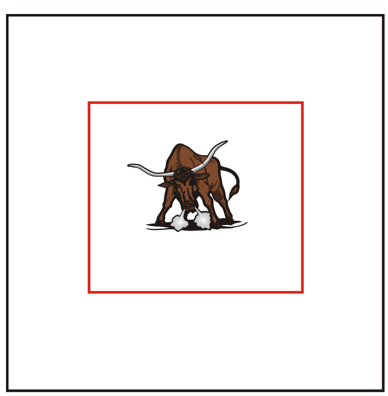
Chceme mít rovné strany plotu, nepřípouštíme (optimální) „čtvrtkruh" v rohu.

Obdélník podél jedné strany pozemku vede na extrém xy pro strany x, y splňující $x + 2y = 100$.
Řešením je obdélník se stranami 25 a 50 metrů. Výběh by byl 1250 m^2.

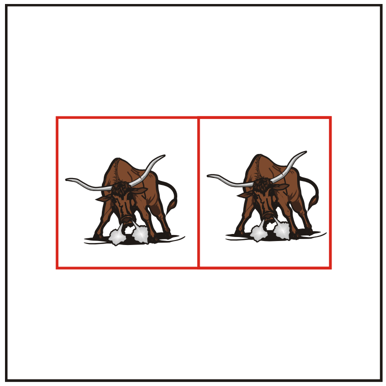
Trojúhelník v rohu vede na extrém $xy/2$ pro strany x, y splňující $x^2 + y^2 = 100^2$.
Řešením je rovnoramenný trojúhelník se odvěsnami $50\sqrt{2}$ metrů. Výběh by byl 2500 m^2.

Obdélník v rohu vede na extrém xy pro strany x, y splňující $x + y = 100$.
Řešením je čtverec se stranami 50 metrů. Výběh by byl 2500 m^2.

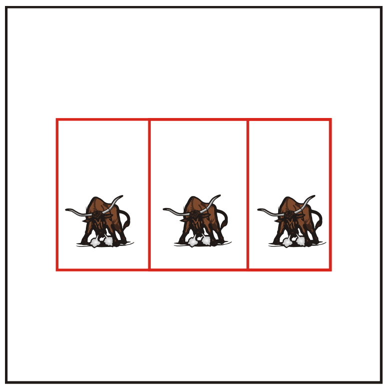
Pokud by sousedé nedovolili býka u hranice pozemku, hledali bychom výběh tvaru obdélníka uprostřed pozemku. Extrémem xy pro strany x, y splňující $2x+2y = 100$ by byl čtverec se stranami 25 metrů, výběh by byl 625 m^2.



Pokud chceme dva výběhy pro dva býky uprostřed pozemku, hledáme extrém $2xy$ s podmínkou $4x + 3y = 100$, což vede na extrém $x = 25/2$ a $y = 50/3$ (zde x a y jsou rozměry jednoho výběhu).



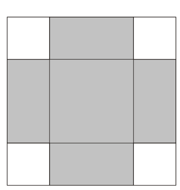
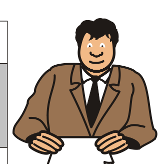
Pokud chceme dva výběhy pro tři býky uprostřed pozemku, hledáme extrém $3xy$ s podmínkou $6x + 4y = 100$, což vede na extrém $x = 25/2$ a $y = 25/3$ (zde x a y jsou rozměry jednoho výběhu).



Vyřešilo 6 z 10.

Krabička

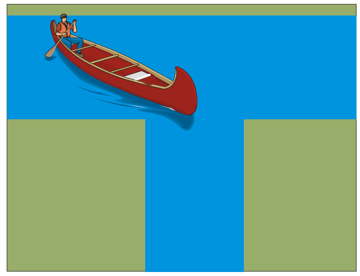
Chceme ze čtvercového papíru odstřihnout rohy tak, aby šla složit krabička bez víka s co největším objemem.

Pro čtvercový papír o straně 30 cm jsou rozměry odstřihnutých čtverečků rovny 5 cm.

Lod'

Chceme z kanálu o šířce A zahnout do kolmého kanálu o šířce B. Jak dlouhou můžeme mít lod'?



Extrém funkce

$$\frac{B}{\sin\varphi} + \frac{A}{\cos\varphi}$$

nastane pro úhel φ (odchylka od směru kanálu o šířce B) pro

$$\varphi = \arctan \sqrt[3]{\frac{B}{A}}$$

.

Největší délka je rovna

$$\left(A^{\frac{2}{3}} + B^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

To koukám.

Konec cvičení 1.

UČENÍ

Učení 1:

Na začátku semestru začala přednáška dávat informace rovnoměrně rostoucím tempem, první týden 1xA4/týden, třináctý týden 13xA4 za týden. V polovině semestru jsem se začal učit. Jakou (jak rostoucí?) rychlost mám nasadit, abych na konci semestru uměl všechno?

Dobrá rada drahá. Máš ji mít: Už je pozdě.

Konec učení 1.