Aplikace

V této části budou uvedena některá použití probrané látky.

Extrémy

Zkusíme metody hledání extrémů při řešení konkrétního problému.

Sněhulák

Budeme chtít postavit co nejvyššího sněhuláka ze sněhové koule o poloměru 1 metr.

Máme tedy $\frac{4}{3}\pi 1^3$ sněhu.

Hledáme kladná čísla x, y, z tak, aby

$$\frac{4}{3}\pi x^3 \;+\; \frac{4}{3}\pi y^3 \;+\; \frac{4}{3}\pi z^3 \;=\; \frac{4}{3}\pi 1^3$$

a aby (výška sněhuláka) $2x + 2y + 2z$ byla maximální.

Úloha se zjednoduší po vykrácení. Hledáme tedy kladná čísla x, y, z tak, aby

$$x^3 \;+\; y^3 \;+\; z^3 \;=\; 1$$

a aby $x + y + z$ bylo maximální.

Podíváme se na body se souřadnicemi (x, y, z) v prostoru.

Leží na osmině jakési křivé koule $x^3 \;+\; y^3 \;+\; z^3 \;=\; 1$ v prostoru. Na ní hledáme bod ležící na rovině $x + y + x = c$ s největší možnou konstantou c.

Křivá osminka křivé koule (odpovídá kladným souřadnicím x, y a z):

Křivá osminka s řezem odpovídajícím rovině $x + y + z = 2$.

Pro pevné x budeme hledat y, z taková, aby $y^3 + z^3 = 1 - x^3$ a aby $y + z$ bylo maximální. Toto maximum (pokud existuje) označíme $m(x)$.

Pro $y \in [0, \sqrt[3]{1 - x^3}]$ je z určeno jednoznačně vzorečkem $\sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}$. Tento vzoreček určuje z jako konkávní funkci proměnné y (druhá derivace je záporná).

Graf této funkce je symetrický podle osy prvního kvadrantu, protože jde o „samoinverzní" funkci.

Nyní existuje právě jeden bod $(y, z) = (\sqrt[3]{(1 - x^3)/2}, \sqrt[3]{(1 - x^3)/2})$ na zkoumaném grafu, kde je derivace rovna -1 (tento bod existuje podle Lagrangeovy věty). Tedy tečna v tomto bodě odpovídá maximální hodnotě $y + z$. Tedy $m(x) = 2\sqrt[3]{(1 - x^3)/2}$.

Funkce $m(x)$ je spojitá na $[0, 1]$ a tedy funkce $x + m(x)$ nabývá na $[0, 1]$ svého maxima.

Hodnota v tomto maximu je určena jednoznačně.

Pokud by se nabývalo maxima v jiném bodě než $x_0 = 1/\sqrt[3]{3}$, pak by v nejvyšším sněhulákovi nebyly všechny 3 koule stejně veliké a pro vhodnou dvojici různých koulí by existovalo vyšší řešení (víme, že úloha pro dvě koule má extrém pro stejné koule). To by byl spor.

Derivace

Pro řešení některých problémů se s výhodou používá elementární tvrzení:

Pokud mají dvě funkce stejnou vlastní derivaci na intervalu, liší se na tomto intervalu o konstantu.

Zkusíme si to na příkladu.

Sněží

Před polednem začal padat sníh. Padá rovnoměrně a neslehává se. V poledne vyjel pluh s konstantním výkonem (rychlost x výška sněhu = konstanta).

Za hodinu ujel 2 km, za další hodinu ještě 1 km. V kolik hodin začal padat sníh.

Nechť vyjel pluh t_0 hodin před polednem. Výška sněhu v čase t je rovna (ve vhodných jednotkách) $t + t_0$. Dráha pluhu v čase t je popsána funkcí $x(t)$, $t \geq 0$.

Samozřejmě $x(0) = 0$, $x(1) = 2$, a $x(2) = 3$.

Rychlost je derivací dráhy podle času, tedy $x'(t)$. Konstantní výkon znamená rovnost

$$x'(t) \cdot (t + t_0) = c$$

pro vhodnou konstantu c.

Vydělením spočítáme

$$x'(t) = \frac{c}{t + t_0} \ ,$$

což nám umožní uhodnout funkci $x(t)$ až na neznámou konstantu d ve tvaru

$$x(t) = c \log(t + t_0) + d \ .$$

Máme tři počáteční podmínky svazující konstanty c, d a t_0. Jde o vztahy v čase $t = 0$, $t = 1$ a $t = 2$. Postupně dostaneme

$$0 = c \log(t + t_0) + d \ ; \ d = -c \log t_0 \ ; \ x(t) = c \log \frac{t + t_0}{t_0} \ .$$

$$2 = c \log \frac{1 + t_0}{t_0} \ , \ 3 = c \log \frac{2 + t_0}{t_0} \ .$$

Vydělíme a zbavíme se protivné konstanty c:

$$\frac{2}{3} = \frac{\log \frac{1+t_0}{t_0}}{\log \frac{2+t_0}{t_0}} \ .$$

Dostaneme rovnici

$$\log \left(\frac{2 + t_0}{t_0} \right)^2 = \log \left(\frac{1 + t_0}{t_0} \right)^3 \ .$$

Použijeme exponenciálu a spočítáme

$$t_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \ = \ 0,618 \ ,$$

tedy sníh začal padat přibližně v 11:22:55.

V podstatě šlo o to proložit body $[0, 0]$, $[1, 2]$ a $[2, 3]$ křivku $x(t) = c \log(at + b)$.

Řešení rovnic

Pro řešení rovnice $f(x) = 0$ použijeme s výhodou tvrzení, že spojitý obraz intervalu je interval.

Metoda půlení intervalů

Známá anekdota popisuje způsob, jak chytit lva na Sahaře.

Rozdělíme Saharu na dvě poloviny. Alespoň v jedné polovině bude LEV. Tu opět rozdělíme na poloviny a postup opakujeme.

Metoda. Je-li f spojitá na intervalu $I_1 = [0, 1]$ a má v krajních budech opačná znaménka, rozpůlíme interval I_1 na dvě poloviny a označíme I_2 tu, na které mají koncové body opačná znaménka (pokud by v půlícím bodě hodnota nulová, jsme hotovi). Průnik intervalů I_n je jednobodový podle Cantorovy věty a funkční hodnota v tomto bodě je rovna nule.

Newtonova metoda numerického řešení rovnic

Newtonova metoda je jednoduchý postup pro přibližný výpočet řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu J pro funkci f, která má derivaci všude v J.

Metoda tečen:

Zvolí se nějaký bod $x_1 \in J$ a v bodě $(x_1, f(x_1))$ se sestrojí tečna ke grafu funkce f.

Tato tečna protne osu x v bodě, který se označí x_2 a postup se opakuje pro tento nový bod.

Pomocí rovnice tečny lze postupně body $x_2, x_3, \ldots$ spočítat a dostane se rekurentní vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Viděli jsme situaci, kdy posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nulovému bodu funkce.

Mohou ovšem nastat případy, že posloupnost $\{x_n\}$ nekonverguje nebo konverguje k nevhodnému bodu.

Existují podmínky, za kterých body x_n (při vhodné nebo dokonce libovolné volbě x_1) konvergují k řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu J, samozřejmě, pokud na J takové řešení existuje.

Např., pokud f' a f'' na J existují a obě jsou nenulové nebo platí jedna z následujících dvou podmínek (d je délka intervalu J):

$$\Big|\frac{d \cdot f''(x)}{2f'(x)}\Big| < 1 , \quad \Big|\frac{f''(x) f(x)}{f'^2(x)}\Big| < 1 .$$

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1 1