

Řady

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY ČÍSEL



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY ČÍSEL



Zatím byly probrány dva
druhy operací s posloup-
nostmi:

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY ČÍSEL



Zatím byly probrány dva
druhy operací s posloup-
nostmi:



1. limita posloupnosti (operace založená na vzdálenosti bodů)



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl. na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY ČÍSEL



Zatím byly probrány dva druhy operací s posloupnostmi:



1. limita posloupnosti (operace založená na vzdálenosti bodů)



2. supremum nebo infimum posloupnosti (operace založená na uspořádání bodů).



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z hlavních struktur reálných čísel zbývá použít aritmetické operace. V následující části bude probrán součet posloupnosti.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z hlavních struktur reálných čísel zbývá použít aritmetické operace. V následující části bude probrán součet posloupnosti.



Budeme sčítat všechny členy posloupnosti!



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z hlavních struktur reálných čísel zbývá použít aritmetické operace. V následující části bude probrán součet posloupnosti.



Budeme sčítat všechny členy posloupnosti!



Součin posloupnosti se nepoužívá často a jeho teorii lze vyvodit z teorie o součtu.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl.na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, značí symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ její **součet**, tj. limitu **částečných součtů** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n)$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, značí symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ její **součet**, tj. limitu **částečných součtů** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n)$.



Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se standardně užívá v obecnějším smyslu pro posloupnost $\{a_n\}$, která se má sečíst, a to i v případě, kdy její součet neznáme nebo součet neexistuje. Příslušná posloupnost částečných součtů se často značí $\{s_n\}$, tj. $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, značí symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ její **součet**, tj. limitu **částečných součtů** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n)$.



Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se standardně užívá v obecnějším smyslu pro posloupnost $\{a_n\}$, která se má sečíst, a to i v případě, kdy její součet neznáme nebo součet neexistuje. Příslušná posloupnost částečných součtů se často značí $\{s_n\}$, tj. $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.



Součet řady je definován jediným možným rozumným způsobem.



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$



konverguje, je-li její součet reálné číslo



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$



konverguje, je-li její součet reálné číslo



diverguje, jestliže její součet neexistuje (pak řada osciluje), nebo



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$



konverguje, je-li její součet reálné číslo



diverguje, jestliže její součet neexistuje (pak řada osciluje), nebo



diverguje, jestliže je její součet nevlastní (pak též říkáme, že řada konverguje k $+\infty$ nebo $-\infty$).

[Poznámky 1](#) [Příklady 1](#) [Otázky 1](#) [Cvičení 1](#)

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Protože součet řady je limitou speciální posloupnosti, vyplynou některé následující vlastnosti součtů řad z vět o limitách posloupností.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Protože součet řady je limitou speciální posloupnosti, vyplynou některé následující vlastnosti součtů řad z vět o limitách posloupností.



VĚTA. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > m > k$ je

$$|a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Protože součet řady je limitou speciální posloupnosti, vyplynou některé následující vlastnosti součtů řad z vět o limitách posloupností.



VĚTA. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > m > k$ je

$$|a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon.$$



Důkaz. Tvrzení je přepisem **Bolzanovy-Cauchyovy podmínky** pro konvergenci posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$. ◇



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl.na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující rovnosti platí, pokud mají smysl pravé strany:

$$\begin{aligned}\sum (a_n + b_n) &= \sum a_n + \sum b_n, \\ \sum (k \cdot a_n) &= k \cdot \sum a_n.\end{aligned}$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Následující rovnosti platí, pokud mají smysl pravé strany:

$$\begin{aligned}\sum (a_n + b_n) &= \sum a_n + \sum b_n, \\ \sum (k \cdot a_n) &= k \cdot \sum a_n.\end{aligned}$$



Důkaz. Tvrzení plyne ihned z [vět o limitě součtu a násobku posloupností](#).



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl. na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

VĚTA. Následující rovnosti platí, pokud mají smysl pravé strany:

$$\begin{aligned}\sum (a_n + b_n) &= \sum a_n + \sum b_n, \\ \sum (k \cdot a_n) &= k \cdot \sum a_n.\end{aligned}$$

↓
Důkaz. Tvrzení plyne ihned z vět o limitě součtu a násobku posloupností.



Pro násobení a dělení nekonečných řad neexistuje jednoduchý vzorec.



LEKCE10-RAD

- řady
- sočet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9





Následující tvrzení udává velmi důležitou **nutnou** podmínku pro konvergenci (pozor, **není to ekvivalence!**):

VĚTA. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující tvrzení udává velmi důležitou **nutnou** podmínku pro konvergenci (pozor, **není to ekvivalence!**):

VĚTA. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.



Důkaz. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro $n > 1$, je $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$, neboť limita částečných součtů $\lim s_n = \lim s_{n-1}$ je vlastní. \diamond



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tvrzení se většinou používá v obráceném znění, tj.,
jestliže není $\lim a_n = 0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ nekonverguje.}$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tvrzení se většinou používá v obráceném znění, tj.,
jestliže není $\lim a_n = 0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ nekonverguje.}$$



Jó, tohle jsem mockrát popletl ...

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s kladnými (či zápornými) členy



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s kladnými (či zápornými) členy



V mnoha případech se sčítají posloupnosti kladných čísel. V takovém případě (a v případě trochu obecnějším) je situace značně jednodušší:



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d'Alembert-krit
 - d'Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s kladnými (či zápornými) členy



V mnoha případech se sčítají posloupnosti kladných čísel. V takovém případě (a v případě trochu obecnějším) je situace značně jednodušší:



VĚTA. Jestliže v řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemění její členy od určitého indexu znaménko, řada vždy konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s kladnými (či zápornými) členy



V mnoha případech se sčítají posloupnosti kladných čísel. V takovém případě (a v případě trochu obecnějším) je situace značně jednodušší:



VĚTA. Jestliže v řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemění její členy od určitého indexu znaménko, řada vždy konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.



Důkaz. Uvedená vlastnost posloupnosti znamená, že posloupnost částečných součtů je od určitého členu monotónní a tedy **má vlastní nebo nevlastní limitu.** \diamond

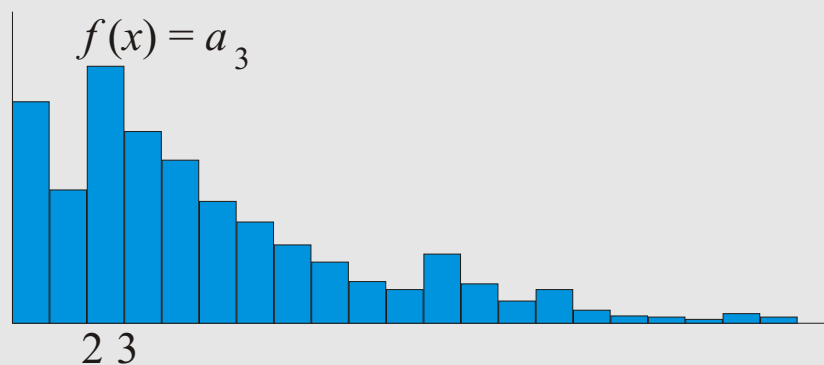


LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde o konečnost plochy pod grafem po částech konstantní funkce na následujícím obrázku



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.

neabsolutní konv.
řada funkcí

Taylorova rada
exp

gon
log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro řady z předchozího tvrzení zbývá najít kritéria, která umožní zjistit, zda řada konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro řady z předchozího tvrzení zbývá najít kritéria, která umožní zjistit, zda řada konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.



Je zřejmé, že se stačí omezit na řady s nezápornými nebo kladnými členy.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro řady z předchozího tvrzení zbývá najít kritéria, která umožní zjistit, zda řada konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.



Je zřejmé, že se stačí omezit na řady s nezápornými nebo kladnými členy.



Budeme hledat kouzelná
pravidla pro konečnost
součtu.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Srovnávací kritérium) Necht' $0 \leq a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Srovnávací kritérium) Necht' $0 \leq a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Srovnávací kritérium) Necht' $0 \leq a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



2. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Srovnávací kritérium) Necht' $0 \leq a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



2. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.



Důkaz. Protože změna konečně mnoha členů řady neovlivní konvergenci, lze předpokládat, že $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Srovnávací kritérium) Necht' $0 \leq a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



2. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.



Důkaz. Protože změna konečně mnoha členů řady neovlivní konvergenci, lze předpokládat, že $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



Jsou-li $\{s_n\}, \{t_n\}$ posloupnosti částečných součtů posloupností $\{a_n\}$, resp. $\{b_n\}$, pak $s_n \leq t_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a tedy $\lim s_n \leq \lim t_n$. Z věty o zachovávání uspořádání limitami plynou ihned obě tvrzení. \diamond



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl. na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže existují kladná čísla k, K tak, že $kb_n \leq a_n \leq Kb_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže existují kladná čísla k, K tak, že $kb_n \leq a_n \leq Kb_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.



2. Jestliže existuje kladná vlastní limita $\lim \frac{a_n}{b_n}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže existují kladná čísla k, K tak, že $kb_n \leq a_n \leq Kb_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.



2. Jestliže existuje kladná vlastní limita $\lim \frac{a_n}{b_n}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.



Důkaz. Tvrzení 1 vyplývá ze srovnávacího kritéria a z jednoduchého faktu, že pro kladné číslo p konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} px_n$.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



1. Jestliže existují kladná čísla k, K tak, že $kb_n \leq a_n \leq Kb_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.



2. Jestliže existuje kladná vlastní limita $\lim \frac{a_n}{b_n}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.



Důkaz. Tvrzení 1 vyplývá ze srovnávacího kritéria a z jednoduchého faktu, že pro kladné číslo p konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} px_n$.



Jestliže v tvrzení 2 je $\lim(a_n/b_n) = r > 0$, pak pro skoro všechna n je $(r/2)b_n \leq a_n \leq (2r)b_n$ a jsou splněny podmínky tvrzení 1.



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení 2 se nazývá limitní tvar tvrzení 1 a snadno z něho vyplývá.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení 2 se nazývá limitní tvar tvrzení 1 a snadno z něho vyplývá.



Tvrzení 1 je však obecnější, protože se může stát, že jeho podmínky jsou splněny, ale $\lim(a_n/b_n)$ neexistuje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení 2 se nazývá limitní tvar tvrzení 1 a snadno z něho vyplývá.



Tvrzení 1 je však obecnější, protože se může stát, že jeho podmínky jsou splněny, ale $\lim(a_n/b_n)$ neexistuje.



Ověření podmínky tvrzení 2
bývá však jednodušší.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně je tomu v následujících kritériích.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně je tomu v následujících kritériích.



Limitní tvary budou uváděny bez důkazů, neboť jsou obdobné předchozímu důkazu.

Příklady 2a

VĚTA. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně je tomu v následujících kritériích.



Limitní tvary budou uváděny bez důkazů, neboť jsou obdobné předchozímu důkazu.

Příklady 2a

VĚTA. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon

log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně je tomu v následujících kritériích.



Limitní tvary budou uváděny bez důkazů, neboť jsou obdobné předchozímu důkazu.

Příklady 2a

VĚTA. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



(b) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně je tomu v následujících kritériích.



Limitní tvary budou uváděny bez důkazů, neboť jsou obdobné předchozímu důkazu.

Příklady 2a

VĚTA. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



(b) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



Důkaz. První část tvrzení vyplývá ze srovnávacího kritéria srovnáním s geometrickou řadou $\{q^n\}$, která konverguje právě pro $|q| < 1$. Podmínka druhé části znamená, že nemůže být $\lim a_n = 0$. ◇



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



(b) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



(b) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



Jde o to, kdy je řada „menší“ než geometrická. V těch případech „funguje“ odmocninové kritérium.

LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9





Myslí se to doopravdy. Pokud řada není „menší“ než geometrická, nemůže odmocninové kritérium fungovat.



Ustupuji hrubému násilí.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

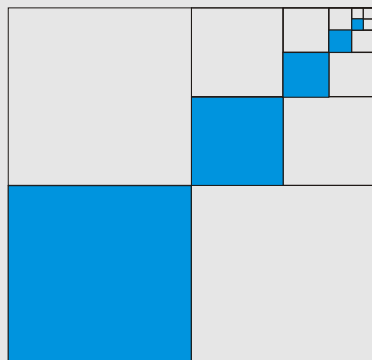
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující obrázek ukazuje, jak pěkně konverguje geometrická řada.



$$\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání
srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

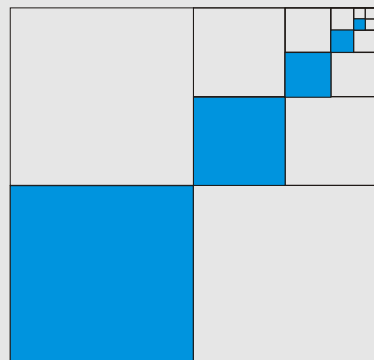
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující obrázek ukazuje, jak pěkně konverguje geometrická řada.



$$\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$



Takhle konverguje každá geometrická řada.

LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (d'Alembertovo podílové kritérium) Necht' $a_n > 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (d'Alembertovo podílové kritérium) Necht' $a_n > 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (d'Alembertovo podílové kritérium) Necht' $a_n > 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



(b) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Lze předpokládat, že podmínky tvrzení platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak z podmínky v prvním tvrzení vyplývá nerovnost $a_{n+1} \leq q^n a_1$ pro všechna n a tvrzení vyplývá ze srovnání s geometrickou řadou $\{q^n\}$, která konverguje právě pro $|q| < 1$. Podmínka druhé části znamená, že nemůže být $\lim a_n = 0$. \diamond



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d'Alembert-krit
d'Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



(a) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.



(b) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zase opakuji. Pokud řada není „menší“ než geometrická, nemůže podílové kritérium fungovat.



Může nemůže, tak teda nemůže. Jsem tvárný objekt.



Předchozí věty mají následující jednoduchý ale důležitý důsledek pro limity posloupností:

Příklady 2c



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zase opakuji. Pokud řada není „menší“ než geometrická, nemůže podílové kritérium fungovat.



Může nemůže, tak teda nemůže. Jsem tvárný objekt.



Předchozí věty mají následující jednoduchý ale důležitý důsledek pro limity posloupností:

Příklady 2c



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

(a) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$).



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

DŮSLEDEK.

(a) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$).



(b) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$).

Příklady 2d

Následující jednoduché kritérium se používá pro některé důležité řady, pro které nelze použít podílové nebo odmocninové kritérium.



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

DŮSLEDEK.

(a) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$).



(b) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$).

Příklady 2d

Následující jednoduché kritérium se používá pro některé důležité řady, pro které nelze použít podílové nebo odmocninové kritérium.



Pro většinu těchto řad lze výhodněji použít tzv. integrální kritérium, které však v tuto chvíli nemůže být k dispozici.

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



VĚTA. (Kondenzační kritérium) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Kondenzační kritérium) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní.



Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Kondenzační kritérium) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní.



Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.



Důkaz. Necht' $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ pro všechna n . Porovnávají se řady

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & + & (a_2 + a_3) & + & (a_4 + \cdots + a_7) & + & (a_8 + \cdots + a_{15}) & + \cdots \\ a_1 & + & (a_2 + a_2) & + & (a_4 + \cdots + a_4) & + & (a_8 + \cdots + a_8) & + \cdots \end{array}$$

a je zřejmé, že první řada má všechny součty v závorkách nejvýše rovny příslušným součtům druhé řady.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl.na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Kondenzační kritérium) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní.



Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.



Důkaz. Necht' $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ pro všechna n . Porovnávají se řady

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + (a_8 + \dots + a_{15}) + \dots \\ a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + \dots + a_4) + (a_8 + \dots + a_8) + \dots \end{aligned}$$

a je zřejmé, že první řada má všechny součty v závorkách nejvýše rovny příslušným součtům druhé řady.



Pro opačnou nerovnost se porovnají řady

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + (a_8 + \dots + a_{15}) + \dots \\ a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + \dots + a_8) + (a_{16} + \dots + a_{16}) + \dots, \end{aligned}$$

kde druhá řada vznikne z $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ vynecháním prvního členu a vydělením řady dvěma.

Je opět zřejmé, že druhá řada má všechny součty v závorkách nejvýše rovny příslušným součtům první řady. Ze **srovnávacího kritéria** nyní plyne dokazované tvrzení. \diamond



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.

neabsolutní konv.
řada funkcí

Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kritérium asi vymyslel pan
Harmon na harmonickou
řadu.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 Cvičení 2

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova řada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s proměnnými znaménky



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s proměnnými znaménky



Jestliže se mění v řadě znaménka, bývá těžší rozhodnout o konvergenci.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s proměnnými znaménky



Jestliže se mění v řadě znaménka, bývá těžší rozhodnout o konvergenci.



Nejjednodušší případ je ten, kde se znaménka mění pravidelně po každé změně indexu.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s proměnnými znaménky



Jestliže se mění v řadě znaménka, bývá těžší rozhodnout o konvergenci.



Nejjednodušší případ je ten, kde se znaménka mění pravidelně po každé změně indexu.



Ale ani v tomto případě to nemusí být jednoduché, kromě následující situace:

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



VĚTA. (Leibniz) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní a $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d'Alembert-krit
 - d'Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Leibniz) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní a $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.



Důkaz. Necht' $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ pro všechna n . Podposloupnosti částečných součtů $\{s_{2n}\}, \{s_{2n-1}\}$ jsou monotónní (první je neklesající a druhá nerostoucí) a mají tedy limity s , resp. t . Pak $s - t = \lim(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim a_{2n} = 0$. \diamond



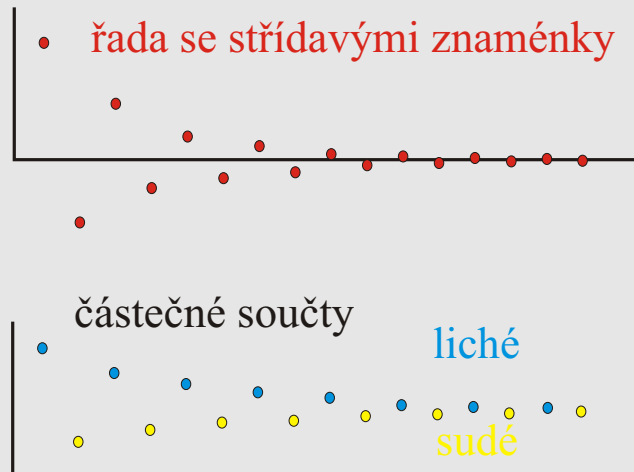
LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Leibniz) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní a $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.



Důkaz. Necht' $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ pro všechna n . Podposloupnosti částečných součtů $\{s_{2n}\}, \{s_{2n-1}\}$ jsou monotónní (první je neklesající a druhá nerostoucí) a mají tedy limity s , resp. t . Pak $s - t = \lim(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim a_{2n} = 0$. ◇



Příklady 3a

Jediná jednodušší kritéria pro obecnější případ jsou Dirichletovo kritérium a Abelovo kritérium.

LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jde o jakási součinnová kritéria.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jestliže $\{a_n\}$ je monotónní a buď



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jestliže $\{a_n\}$ je monotónní a buď



(a) $\lim a_n = 0$, $\{b_n\}$ má omezené částečné součty (**Dirichlet**)



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jestliže $\{a_n\}$ je monotónní a buď



(a) $\lim a_n = 0$, $\{b_n\}$ má omezené částečné součty (**Dirichlet**)



nebo

(b) $\{a_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (**Abel**),



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

VĚTA. Necht' $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jestliže $\{a_n\}$ je monotónní a buď



(a) $\lim a_n = 0$, $\{b_n\}$ má omezené částečné součty (**Dirichlet**)



nebo

(b) $\{a_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (**Abel**),



Kdo zapomene na monotónii, bude za šaška

LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důkaz. K důkazu se použije **Bolzanova–Cauchyova podmínka**, tj., je nutné odhadnout $|a_n b_n + \dots + a_m b_m|$. Lze předpokládat, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Částečné součty posloupností $\{b_n\}$ budou označeny t_n . Necht' n je pevně zvoleno a $m > n$ je libovolné. Pro $k \geq n$ se označí $t'_k = t_k - t_{n-1}$ ($= b_n + \dots + b_k$), $t'_{n-1} = 0$. Lze psát

$$\begin{aligned} a_n b_n + \dots + a_m b_m &= a_n(t_n - t_{n-1}) + a_{n+1}(t_{n+1} - t_{n+2}) + \dots + a_m(t_m - t_{m-1}) \\ &= -a_n t_{n-1} + (a_n - a_{n+1})t_n + \dots + (a_{m-1} - a_m)t_{m-1} + a_m t_m. \end{aligned}$$

Je-li posloupnost $\{|t_n|\}$ omezená číslem K , leží poslední výraz v intervalu $[-2a_n K, 2a_n K]$ (neboť rozdíly v závorkách jsou nezáporné), takže se blíží k 0 s rostoucím n , jestliže $\lim a_n = 0$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. K důkazu se použije **Bolzanova–Cauchyova podmínka**, tj., je nutné odhadnout $|a_n b_n + \dots + a_m b_m|$. Lze předpokládat, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Částečné součty posloupností $\{b_n\}$ budou označeny t_n . Necht' n je pevně zvoleno a $m > n$ je libovolné. Pro $k \geq n$ se označí $t'_k = t_k - t_{n-1}$ ($= b_n + \dots + b_k$), $t'_{n-1} = 0$. Lze psát

$$\begin{aligned} a_n b_n + \dots + a_m b_m &= a_n(t_n - t_{n-1}) + a_{n+1}(t_{n+1} - t_{n+2}) + \dots + a_m(t_m - t_{m-1}) \\ &= -a_n t_{n-1} + (a_n - a_{n+1})t_n + \dots + (a_{m-1} - a_m)t_{m-1} + a_m t_m. \end{aligned}$$

Je-li posloupnost $\{|t_n|\}$ omezená číslem K , leží poslední výraz v intervalu $[-2a_n K, 2a_n K]$ (neboť rozdíly v závorkách jsou nezáporné), takže se blíží k 0 s rostoucím n , jestliže $\lim a_n = 0$.



Místo t_i lze všude v uvedených rovnostech psát t'_i . V případě (b) je nyní posloupnost $\{|a_n|\}$ omezená nějakým číslem K a čísla t'_i jsou libovolně malá s rostoucím n , protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Proto leží opět poslední výraz v libovolně malém okolí 0. \diamond



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Používá se ďábelský trik,
kterému se říká Abelova
parciální sumace.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Používá se ďábelský trik,
kterému se říká Abelova
parciální sumace.



Mohu mít jednoduchý do-
taz: Ta věta platí?

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 Cvičení 3

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Absolutní konvergence



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Absolutní konvergence



DEFINICE. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Absolutní konvergence



DEFINICE. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$



Jestliže řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl.na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Absolutní konvergence



DEFINICE. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$



Jestliže řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**.



Co znamená nekonverguje neabsolutně?

Příklady 4

LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl.na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak název napovídá, absolutní konvergence by měla znamenat více než jen konvergence. To potvrzuje tvrzení:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak název napovídá, absolutní konvergence by měla znamenat více než jen konvergence. To potvrzuje tvrzení:



VĚTA. Absolutně konvergentní řada konverguje. Navíc konverguje ke stejnému číslu i po libovolném přerovnání.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože pro každé n je $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, plyne z konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ a (odečtením) i konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože pro každé n je $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, plyne z konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ a (odečtením) i konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.



Necht' ϕ je nějaká permutace množiny \mathbb{N} .



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Protože pro každé n je $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, plyne z konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ a (odečtením) i konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.



Nechť ϕ je nějaká permutace množiny \mathbb{N} .



Budeme přerovnávat.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$.



Dále existuje $n_1 \geq n_0$ takové, že je-li $1 \leq n \leq n_0$, existuje $1 \leq i \leq n_1$ s vlastností $\phi(i) = n$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$.



Dále existuje $n_1 \geq n_0$ takové, že je-li $1 \leq n \leq n_0$, existuje $1 \leq i \leq n_1$ s vlastností $\phi(i) = n$.



Potom je pro každé $k > n_1$

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^k a_{\phi(n)} \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon,$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon

log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$.



Dále existuje $n_1 \geq n_0$ takové, že je-li $1 \leq n \leq n_0$, existuje $1 \leq i \leq n_1$ s vlastností $\phi(i) = n$.



Potom je pro každé $k > n_1$

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^k a_{\phi(n)} \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon,$$



což implikuje rovnost $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti

kondenzační krit.
řada s obecnými členy

Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon

log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je řada s neměnicími se znaménky, pro absolutní konvergenci

řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ platí všechna kritéria uvedená v části o řadách s neměnicími znaménky, jen je nutné místo a_n psát $|a_n|$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je řada s neměnicími se znaménky, pro absolutní konvergenci

řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ platí všechna kritéria uvedená v části o řadách s neměnicími znaménky, jen je nutné místo a_n psát $|a_n|$.



Tedy např., jestliže existuje $q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d'Alembert-krit
 - d'Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je řada s neměnicími se znaménky, pro absolutní konvergenci

řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ platí všechna kritéria uvedená v části o řadách s neměnicími znaménky, jen je nutné místo a_n psát $|a_n|$.



Tedy např., jestliže existuje $q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.



Jde o myšlenku, znění věty se pak vynoří samo.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Druhá část v předchozím tvrzení charakterizuje absolutní konvergenci:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Druhá část v předchozím tvrzení charakterizuje absolutní konvergenci:



Jestliže řada konverguje i po libovolném přerovnání (není nutné požadovat, že ke stejnému číslu), pak řada konverguje absolutně.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Druhá část v předchozím tvrzení charakterizuje absolutní konvergenci:



Jestliže řada konverguje i po libovolném přerovnání (není nutné požadovat, že ke stejnému číslu), pak řada konverguje absolutně.



Platí totiž následující tvrzení, jehož důkaz bude jen naznačen pro speciální řadu (obecné podrobnosti jsou v Otázkách).

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



VĚTA. Necht' řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.



Pak pro každé $p \in \mathbb{R}^*$ existuje prosté zobrazení φ množiny \mathbb{N} na \mathbb{N} takové, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = p$ a existuje takové φ , že přerovnaná řada osciluje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.



Pak pro každé $p \in \mathbb{R}^*$ existuje prosté zobrazení φ množiny \mathbb{N} na \mathbb{N} takové, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = p$ a existuje takové φ , že přerovnaná řada osciluje.



Když konverguje neabsolutně, tak kladná část má nekonečný součet, záporná také, ale dohromady se tyto součty „skoro ruší“. Tak jde brát nějakou dobu jenom kladné členy, pak jenom záporné, a tak dále až z té řady uděláme pokorného služebníčka.

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důkaz. Důkaz bude proveden pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Důkaz bude proveden pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.



Z divergence **harmonické řady** vyplývá, že obě řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$ konvergují k $+\infty$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Důkaz bude proveden pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.



Z divergence **harmonické řady** vyplývá, že obě řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$ konvergují k $+\infty$.



Ted' si začneme s tou řadou hrát:

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání
srovnání-ekv

Cauchy-krit
Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Necht' $p \in \mathbb{R}$. Existuje nejmenší index k_1 takový, že součet $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_2 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) < p$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $p \in \mathbb{R}$. Existuje nejmenší index k_1 takový, že součet $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_2 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) < p$.



Opět lze najít nejmenší index k_3 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_4 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) - \sum_{i=k_2+1}^{k_4} 1/(2n) < p$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $p \in \mathbb{R}$. Existuje nejmenší index k_1 takový, že součet $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_2 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) < p$.



Opět lze najít nejmenší index k_3 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_4 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) - \sum_{i=k_2+1}^{k_4} 1/(2n) < p$.



Tyto indexy existují z důvodu divergence řad $\sum 1/(2n)$ a $\sum 1/(2n-1)$ k $+\infty$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' $p \in \mathbb{R}$. Existuje nejmenší index k_1 takový, že součet $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_2 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) < p$.



Opět lze najít nejmenší index k_3 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_4 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) - \sum_{i=k_2+1}^{k_4} 1/(2n) < p$.



Tyto indexy existují z důvodu divergence řad $\sum 1/(2n)$ a $\sum 1/(2n-1)$ k $+\infty$.



Takto lze pokračovat dále.



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozdíly součtů od čísla p se budou stále zmenšovat (protože $\lim a_n = 0$) a výsledná následující řada (kde x_i je buď $1/(2i)$ nebo $1/(2i - 1)$ podle toho, je-li m sudé či liché a $k_0 = 0$) má tedy součet p :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\sum_{i=k_m+1}^{k_{m+1}} x_i \right) = p.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozdíly součtů od čísla p se budou stále zmenšovat (protože $\lim a_n = 0$) a výsledná následující řada (kde x_i je buď $1/(2i)$ nebo $1/(2i - 1)$ podle toho, je-li m sudé či liché a $k_0 = 0$) má tedy součet p :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\sum_{i=k_m+1}^{k_{m+1}} x_i \right) = p.$$



Tato řada vznikla z původní přeházením pořadí indexů, tj., zobrazení ϕ z tvrzení je dáno následovně:

$$\phi(n) = 2n - 1 \text{ pro } 1 \leq n \leq k_1,$$

$$\phi(n) = 2(n - k_1) \text{ pro } k_1 + 1 \leq n \leq k_1 + k_2,$$

$$\phi(n) = 2(n - k_2) - 1 \text{ pro } k_1 + k_2 + 1 \leq n \leq k_1 + k_2 + k_3,$$

$$\phi(n) = 2(n - k_1 - k_3) \text{ pro } k_1 + k_2 + k_3 + 1 \leq n \leq k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

a podobně dále.



LEKCE10-RAD
řady
součet
 divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
 srovnání
 srovnání-ekv
 Cauchy-krit
 Cauchy-limitní
 d' Alembert-krit
 d' Alembert-limitní
 apl. na posloupnosti
 kondenzační krit.
řada s obecnými členy
 Leibniz-krit.
 Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
 neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
 exp
 gon
 log
 bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Už jenom kousek:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Už jenom kousek:



Pro $p = +\infty$ stačí nacházet nejmenší indexy k_n tak, že příslušné výše uvedené součty místo větší nebo menší než dřívější číslo p budou větší než n pro lichá n a menší než n pro sudá n .



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Už jenom kousek:



Pro $p = +\infty$ stačí nacházet nejmenší indexy k_n tak, že příslušné výše uvedené součty místo větší nebo menší než dřívější číslo p budou větší než n pro lichá n a menší než n pro sudá n .



Aby výsledná řada oscillovala, stačí nacházet nejmenší indexy k_n tak, aby příslušné výše uvedené součty místo větší nebo menší než dřívější číslo p byly větší než 1 pro lichá n a menší než -1 pro sudá n . \diamond



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dovedete větu dokázat ,
,beze slov"?



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

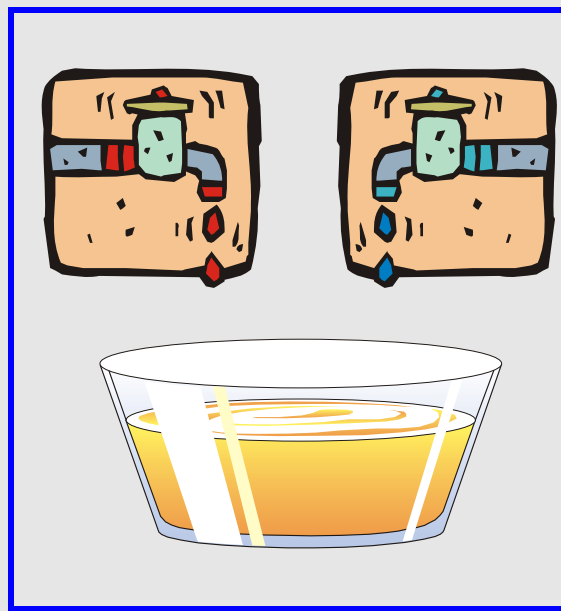
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dovedete větu dokázat ,
'beze slov"?



Otázky 4 Cvičení 4 Učení 4

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY FUNKCÍ



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY FUNKCÍ



Před definicí obecné mocniny byla definována **bodová konvergence posloupnosti funkcí** a podobně lze definovat součet řady funkcí:

DEFINICE. Říkáme, že **řada funkcí** $\sum f_n$ **konverguje** (bodově) na množině $A \subset \mathbb{R}$ k funkci f , jestliže pro každé $x \in A$ konverguje řada čísel $\sum f_n(x)$ k číslu $f(x)$ (symbol $\sum f_n = f$).



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Speciálním případem řady funkcí jsou tzv. mocninné řady (funkce f_n je násobek n -té mocniny, tj. $f_n(x) = a_n x^n$).



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Speciálním případem řady funkcí jsou tzv. mocninné řady (funkce f_n je násobek n -té mocniny, tj. $f_n(x) = a_n x^n$).



Teorie těchto řad bude probírána později, ale je vhodné se nyní zabývat nejdůležitějším speciálním případem mocninných řad, a to jsou Taylorovy řady.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Speciálním případem řady funkcí jsou tzv. mocninné řady (funkce f_n je násobek n -té mocniny, tj. $f_n(x) = a_n x^n$).



Teorie těchto řad bude probírána později, ale je vhodné se nyní zabývat nejdůležitějším speciálním případem mocninných řad, a to jsou Taylorovy řady.



Taylorovy řady vznikají z Taylorových polynomů prodloužením jejich stupňů až do nekonečna.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Taylorova řada funkce f v bodě a je řada funkcí (mocnin)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n .$$



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d'Alembert-krit
 - d'Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
 - neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Taylorova řada funkce f v bodě a je řada funkcí (mocnin)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n .$$



Ten vzoreček se mi moc líbí.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Taylorova řada funkce f v bodě a je řada funkcí (mocnin)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n .$$



Ten vzoreček se mi moc líbí.



AHA.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Taylorovy polynomy funkce $e^{-x^{-2}}$ v bodě 0 jsou nulové a tedy konvergují k 0 na \mathbb{R} (viz *Příklady 7* v kapitole o použití derivací); tato limita nemá s původní funkcí vlastně nic společného.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Taylorovy polynomy funkce $e^{-x^{-2}}$ v bodě 0 jsou nulové a tedy konvergují k 0 na \mathbb{R} (viz *Příklady 7* v kapitole o použití derivací); tato limita nemá s původní funkcí vlastně nic společného.



Žádoucí tedy není pouhá konvergence Taylorových řad, ale jejich konvergence ke zdrojové funkci.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro důkaz následujícího tvrzení si stačí uvědomit definici Taylorova zbytku a definici konvergence řad.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro důkaz následujícího tvrzení si stačí uvědomit definici Taylorova zbytku a definici konvergence řad.



VĚTA. Taylorova řada funkce f konverguje k f v bodě x právě když $\lim_n R_n(x) = 0$, kde $R_n(x)$ je příslušný n -tý zbytek Taylorova polynomu funkce f v bodě a .



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl.na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Předcházející věta bude nyní použita na několik základních funkcí.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Předcházející věta bude nyní použita na několik základních funkcí.



Taylorovy polynomy následujících funkcí spolu s určením příslušného zbytku byly probrány v *Příkladech 7* v kapitole o použití derivací.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Předcházející věta bude nyní použita na několik základních funkcí.



Taylorovy polynomy následujících funkcí spolu s určením příslušného zbytku byly probrány v *Příkladech 7* v kapitole o použití derivací.



Nejdříve je vždy uveden rozklad funkce na její Taylorův polynom a zbytek a potom je uvedeno tvrzení, pro které body zbytek konverguje k 0 a tedy pro které body Taylorova řada konverguje k dané funkci.

Taylorovy řady budou sestrojovány v bodě 0, takže slova „v bodě a “ budou vynechána.



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
rovnání
rovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exponenciální funkce



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exponenciální funkce



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké c mezi 0 a x .



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce e^x konverguje k e^x na \mathbb{R} a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce e^x konverguje k e^x na \mathbb{R} a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Důkaz. Z důsledku podílového kritéria pro limity posloupností plyne, že pro všechna x je $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{c_n} x^{n+1} / (n+2)! = 0$, protože

$$0 \leq \frac{e^{c_{n+1}} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{e^{c_n} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \leq \frac{K}{n+2},$$

kde K je větší než všechna čísla $x \cdot e^{c_{n+1}-c_n}$ a tedy např. číslo $x \cdot e^{2|x|}$. ◇

Poznámky 5

Goniometrické funkce



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
- divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl. na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce e^x konverguje k e^x na \mathbb{R} a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Důkaz. Z důsledku podílového kritéria pro limity posloupností plyne, že pro všechna x je $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{c_n} x^{n+1} / (n+2)! = 0$, protože

$$0 \leq \frac{e^{c_{n+1}} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{e^{c_n} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \leq \frac{K}{n+2},$$

kde K je větší než všechna čísla $x \cdot e^{c_{n+1}-c_n}$ a tedy např. číslo $x \cdot e^{2|x|}$. ◇

Poznámky 5

Goniometrické funkce



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl. na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce e^x konverguje k e^x na \mathbb{R} a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Důkaz. Z důsledku podílového kritéria pro limity posloupností plyne, že pro všechna x je $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{c_n} x^{n+1} / (n+2)! = 0$, protože

$$0 \leq \frac{e^{c_{n+1}} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{e^{c_n} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \leq \frac{K}{n+2},$$

kde K je větší než všechna čísla $x \cdot e^{c_{n+1}-c_n}$ a tedy např. číslo $x \cdot e^{2|x|}$. ◇

Poznámky 5

Goniometrické funkce



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .



VĚTA. Taylorovy řady funkcí $\sin x$, $\cos x$ konvergují na \mathbb{R} k těmto funkcím a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní

d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.

neabsolutní konv.
řada funkcí

Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .



VĚTA. Taylorovy řady funkcí $\sin x$, $\cos x$ konvergují na \mathbb{R} k těmto funkcím a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Důkaz. Postup důkazu je stejný jako u exponenciální funkce.



Poznámky 6

Logaritmická funkce



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
- divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl. na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .



VĚTA. Taylorovy řady funkcí $\sin x$, $\cos x$ konvergují na \mathbb{R} k těmto funkcím a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Důkaz. Postup důkazu je stejný jako u exponenciální funkce.



Poznámky 6

Logaritmická funkce



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
- divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl. na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\lg(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \left(\text{popř. } (-1)^n \frac{x(x-c)^n}{(1+c)^{n+1}} \right)$$

pro nějaké c mezi 0 a x , kde $x > -1$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce $\lg(x + 1)$ konverguje k $\lg(x + 1)$ na $(-1, 1]$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} = \lg(x + 1), \quad x \in (-1, 1].$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce $\lg(x + 1)$ konverguje k $\lg(x + 1)$ na $(-1, 1]$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} = \lg(x + 1), \quad x \in (-1, 1].$$



Důkaz. Je zřejmé, že musí být $x + 1 > 0$ a že pro $x > 1$ řada diverguje. Pro $0 \leq x \leq 1$ lze snadno shora odhadnout absolutní hodnotu **Langrangeova tvaru zbytku** číslem $1/(n + 1)$ a tedy pro tato x rovnost v tvrzení platí. Pro $-1 < x < 0$ je výhodnější použít **důsledek odmocninového kritéria pro limity funkcí** a **Cauchyova tvaru zbytku**:

$$\sqrt[n]{\frac{|x(x - c_n)^n|}{(1 + c_n)^{n+1}}} \leq \sqrt[n]{|x|} \frac{c_n - x}{1 + c_n} \leq |x| \sqrt[n]{|x|} < |x| < 1.$$



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Binomický rozvoj



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Binomický rozvoj



$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} x^k + p(p-1)\dots(p-n)(1+c)^{p-n-1} \frac{x(x-c)^n}{n!},$$

pro $x > -1$, c mezi 0 a x (kde $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$).



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce $(1 + x)^p$, kde $p \in \mathbb{R}$, konverguje k $(1 + x)^p$ na intervalu $(-1, 1)$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = (1 + x)^p, \quad x \in (-1, 1).$$



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce $(1 + x)^p$, kde $p \in \mathbb{R}$, konverguje k $(1 + x)^p$ na intervalu $(-1, 1)$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = (1 + x)^p, \quad x \in (-1, 1).$$



Důkaz. Necht' $|x| < 1$. Uvedený zbytek lze přepsat do tvaru $\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} (1+c)^{p-1} x^{n+1} \left(\frac{1-c}{1+c} \right)^n$. Protože funkce t^{p-1} proměnné t je monotónní, je $(1+c)^{p-1}$ omezená číslem $\max(1, (1+c)^{p-1})$. Zlomek $\frac{1-c}{1+c}$ leží v intervalu $(0, 1)$ (dokažte). Odtud vyplývá odhad

$$|R_n(x)| \leq \max(1, (1+x)^{p-1}) \cdot |x|^{n+1} \left| \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} \right|$$

a pomocí **důsledku podílového kritéria pro limity funkcí** konverguje pravá strana k 0 (podíly a_{n+1}/a_n konvergují k $|x|$). ◇



LEKCE10-RAD

- řada
- divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl. na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Speciálně pro $p = 1/2$ a $p = -1/2$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Speciálně pro $p = 1/2$ a $p = -1/2$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$



$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Speciálně pro $p = 1/2$ a $p = -1/2$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$



$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$



První tři členy nebo NIC!

Poznámky 7 Příklady 7

LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



POZNÁMKY

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Podobně jako u posloupností nemusí ani řady začínat od indexu 1, ale např. od 13 nebo -7.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Podobně jako u posloupností nemusí ani řady začínat od indexu 1, ale např. od 13 nebo -7.



Na rozdíl od limity posloupnosti a od sčítání konečně mnoha čísel ale u sčítání nekonečných posloupností záleží na pořadí i na uzávorkování (viz Otázky).



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přeházení řady (neboli změna pořadí sčítání, neboli permutace řady) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nová

řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$, kde ϕ je prosté zobrazení množiny \mathbb{N} na sebe (tj., permutace \mathbb{N}).



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přeházení řady (neboli změna pořadí sčítání, neboli permutace řady) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nová

řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$, kde ϕ je prosté zobrazení množiny \mathbb{N} na sebe (tj., permutace \mathbb{N}).



Posloupnost částečných součtů této nové řady nemá mnoho společného s posloupností částečných součtů původní řady.



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d'Alembert-krit
d'Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uzávorkování (neboli seskupení) řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ znamená přeměnu na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde

každé b_n je součet konečně mnoha po sobě jdoucích prvků a_i a každé a_i se vyskytne jen jednou, tj. existuje rostoucí posloupnost $\{k_n\}$ přirozených čísel začínající s $k_1 = 1$ a pak $b_n = a_{k_n} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uzávorkování (neboli seskupení) řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ znamená přeměnu na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde

každé b_n je součet konečně mnoha po sobě jdoucích prvků a_i a každé a_i se vyskytne jen jednou, tj. existuje rostoucí posloupnost $\{k_n\}$ přirozených čísel začínající s $k_1 = 1$ a pak $b_n = a_{k_n} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$.



Je snadno vidět, že posloupnost částečných součtů této nové řady je podposloupností posloupnosti částečných součtů původní řady.



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci řad lze používat vlastnosti, které platí skoro všude, protože konvergence řady se nezmění, jestliže se změní, vynechá nebo přidá konečně mnoho členů řady (součet řady se samozřejmě přitom změní).

Konec poznámek 1.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova řada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Nerovnosti posloupností lze někdy ověřovat pomocí hledání extrémů funkcí.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Nerovnosti posloupností lze někdy ověřovat pomocí hledání extrémů funkcí.



Má-li se ukázat, že $f(n) \leq g(n)$ pro skoro všechna n , stačí ukázat, že minimum funkce $g - f$ je nezáporné na nějakém okolí $+\infty$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je nutné si uvědomit, že ani odmocninové ani podílové kritérium není ekvivalence.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limitní tvary kritérií jsou slabší než jejich nelimitní formulace nejen proto, že uvedené limity nemusí existovat.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limitní tvary odmocninového a podílového kritéria neříkají nic o případě, kdy se limita rovná 1. Mohou nastat všechny možné případy.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podílové kritérium je slabší než odmocninové, tj., je-li možné použít podílové kritérium, je možné použít i odmocninové kritérium (opačně to neplatí).



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podílové kritérium je slabší než odmocninové, tj., je-li možné použít podílové kritérium, je možné použít i odmocninové kritérium (opačně to neplatí).



Přesto se podílové kritérium často používá, protože bývá v některých případech jednodušší (např. obsahují-li výrazy faktoriály).



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existují i jiná kritéria. Jsou většinou šikovným přeformulováním srovnávacího kritéria. Povím trochu o trochu zajímavosti:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existují i jiná kritéria. Jsou většinou šikovným přeformulováním srovnávacího kritéria. Povím trochu o trochu zajímavosti:



* Jak se nové kritérium vymýšlí? Jednoduše. Vezmete si libovolnou pěknou (šílenou) konvergentní řadu s nezápornými znaménky a vyjádříte srovnávací kritérium spočívající ve srovnání neznámé řady se zvolenou pěknou. Tak dostanete nové kritérium.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existují i jiná kritéria. Jsou většinou šikovným přeformulováním srovnávacího kritéria. Povím trochu o trochu zajímavosti:



* Jak se nové kritérium vymýšlí? Jednoduše. Vezmete si libovolnou pěknou (šílenou) konvergentní řadu s nezápornými znaménky a vyjádříte srovnávací kritérium spočívající ve srovnání neznámé řady se zvolenou pěknou. Tak dostanete nové kritérium.



Jedním z nejznámějších je kriterium Raabeho.



To si sami někde najdete. Když se sem napíše, tak se jenom definitivně popletete. Ono je opravdu jako stvořené k popletení všeho ;-)

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel

srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



* Super-kritérium



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

* Super-kritérium



Nechť pro řadu kladných čísel x_n existují konstanty a, b , omezená posloupnost c_n a kladné ε tak, že platí

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

kde $|c_n| \leq c, \varepsilon > 0$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

* Super-kritérium



Nechť pro řadu kladných čísel x_n existují konstanty a, b , omezená posloupnost c_n a kladné ε tak, že platí

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

kde $|c_n| \leq c, \varepsilon > 0$.



Pak

- Pokud $a > 1$ řada konverguje.
- Pokud $a < 1$ řada diverguje.
- Pokud $a = 1$ & $b > 1$ řada konverguje.
- Pokud $a = 1$ & $b \leq 1$ řada diverguje.



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vymyslel to pan Gauss
a je to silnější než
D'Alembertovo i Raa-
beho kritérium. Musela
jsem to vyslepičit ...

Konec poznámek 2.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

U Leibnizova kritéria (i Dirichletova a Abelova) se nesmí zapomenout ověřit monotonnost (viz předpoklady).



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

U Leibnizova kritéria (i Dirichletova a Abelova) se nesmí zapomenout ověřit monotónnost (viz předpoklady).



Dirichletovo kritérium se výhodně používá u řad, jejichž n -člen obsahuje násobek $\sin(nx)$.

Konec poznámek 3.

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

Konec poznámek 4.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

V některých učebnicích se exponenciální funkce e^x definuje pomocí právě sestrojené řady. Pak je nutné pomocí této definice udělat průběh této funkce. K tomu je potřeba některých dalších tvrzení o spojitosti součtu mocninné řady a o její derivaci.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

V některých učebnicích se exponenciální funkce e^x definuje pomocí právě sestrojené řady. Pak je nutné pomocí této definice udělat průběh této funkce. K tomu je potřeba některých dalších tvrzení o spojitosti součtu mocninné řady a o její derivaci.



Obdobně, jako v tomto textu, se definuje přirozený logaritmus (inverzní funkce k e^x) a poté obecná mocnina vzorcem $a^x = e^{x \lg a}$.



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d'Alembert-krit
d'Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exponenciální funkci lze definovat i pomocí funkcionálních rovnic:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exponenciální funkci lze definovat i pomocí funkcionálních rovnic:



Exponenciála je jediná funkce f na \mathbb{R} , pro kterou platí $f(x + y) = f(x)f(y)$ a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exponenciální funkci lze definovat i pomocí funkcionálních rovnic:



Exponenciála je jediná funkce f na \mathbb{R} , pro kterou platí $f(x + y) = f(x)f(y)$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.



Jednoznačnost se dokáže snadno, zbývá ukázat existenci: funkce definovaná jako součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ má uvedené vlastnosti.

Konec poznámek 5.

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 6 :

Na tomto místě lze uvést podobnou poznámku jako u exponenciální funkce. Funkci $\sin x$ lze definovat na \mathbb{R} součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 6 :

Na tomto místě lze uvést podobnou poznámku jako u exponenciální funkce. Funkci $\sin x$ lze definovat na \mathbb{R} součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$.



Tato funkce řeší funkcionální rovnosti, pomocí kterých se někdy funkce sinus definuje.

Konec poznámek 6.

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 7 :

V krajních bodech intervalu konvergence $-1, 1$ může i nemusí pro některá p uvedená Taylorova řada k mocnině konvergovat.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 7 :

V krajních bodech intervalu konvergence $-1, 1$ může i nemusí pro některá p uvedená Taylorova řada k mocnině konvergovat.



V případě $p = 1/2$ řada k $\sqrt{x+1}$ konverguje i v krajních bodech, pro $p = -1/2$ konverguje v pravém bodě 1 a nekonverguje v levém bodě -1 .

Konec poznámek 7.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 8 :

Konec poznámek 8.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

PŘÍKLADY

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Řada $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, kde $q \in \mathbb{R}$, se nazývá *geometrická řada*.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Řada $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, kde $q \in \mathbb{R}$, se nazývá *geometrická řada*.



Její částečné součty jsou

$$\sum_{n=0}^k q^n = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \text{ pro } q \neq 1, \quad \sum_{n=1}^k q^n = n \text{ pro } q = 1.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Řada $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, kde $q \in \mathbb{R}$, se nazývá *geometrická řada*.



Její částečné součty jsou

$$\sum_{n=0}^k q^n = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \text{ pro } q \neq 1, \quad \sum_{n=1}^k q^n = k \text{ pro } q = 1.$$



Z toho vyplývá, že geometrická řada konverguje právě když $|q| < 1$ a její součet je pak roven $1/(q - 1)$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Řada $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, kde $q \in \mathbb{R}$, se nazývá *geometrická řada*.



Její částečné součty jsou

$$\sum_{n=0}^k q^n = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \text{ pro } q \neq 1, \quad \sum_{n=1}^k q^n = n \text{ pro } q = 1.$$



Z toho vyplývá, že geometrická řada konverguje právě když $|q| < 1$ a její součet je pak roven $1/(q - 1)$.



Je-li $q \geq 1$, tak geometrická řada konverguje k $+\infty$, je-li $q \leq -1$, řada osciluje.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V řadě $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ lze její členy rozložit, takže částečné součty lze spočítat:

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

takže tato řada konverguje k součtu 1.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

rovnání
rovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d'Alembert-krit
d'Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova řada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

V řadě $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ lze její členy rozložit, takže částečné součty lze spočítat:

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

takže tato řada konverguje k součtu 1.



Viděli jste to? Tomu se říká
teleskopická hračka.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum_{n=1}^k (-1)^n$ osciluje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá *harmonická řada*. Její součet je $+\infty$, neboť

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá *harmonická řada*. Její součet je $+\infty$, neboť

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$



Z toho vyplývá, že podposloupnost $\{s_{2^n}\}$ posloupnosti částečných součtů konverguje k $+\infty$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá *harmonická řada*. Její součet je $+\infty$, neboť

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$



Z toho vyplývá, že podposloupnost $\{s_{2^n}\}$ posloupnosti částečných součtů konverguje k $+\infty$.



Protože s_{n+1} vznikne z s_n přidáním kladného čísla $1/(n+1)$, je posloupnost částečných součtů rostoucí a má stejnou limitu jako její libovolná podposloupnost, tedy $+\infty$.

Konec příkladů 1.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.

neabsolutní konv.
řada funkcí

Taylorova rada
exp

gon
log

bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2a :

Protože $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ pro všechna přirozená n a řada prvků na pravé straně konverguje (k 1), konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (k číslu menšímu než 2).



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2a :

Protože $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ pro všechna přirozená n a řada prvků na pravé straně konverguje (k 1), konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (k číslu menšímu než 2).



Klidně si to zapamatujte.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2a :

Protože $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ pro všechna přirozená n a řada prvků na pravé straně konverguje (k 1), konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (k číslu menšímu než 2).



Klidně si to zapamatujte.



Jo.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro $p \in \mathbb{R}, p \geq 2$ je $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje pro $p \geq 2$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ diverguje protože harmonická řada diverguje a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}} = 1.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{n^3}$ konverguje, protože $\frac{\lg n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ pro skoro všechna n .

Konec příkladů 2a.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2b :

Řada $\sum \frac{n}{(2-1/n)^n}$ konverguje,



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2b :

Řada $\sum \frac{n}{(2-1/n)^n}$ konverguje,



protože má nezáporné členy a

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n}{(2-1/n)^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl. na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řady $\sum \frac{1}{(1-1/n^2)^n}$ selhává limitní varianta odmocninového kritéria (limita je rovna 1),



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řady $\sum \frac{1}{(1-1/n^2)^n}$ selhává limitní varianta odmocninového kritéria (limita je rovna 1),



ale

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(1 - \frac{1}{n^2})^n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} \geq 1$$

pro všechna n a tedy řada diverguje.

Konec příkladů 2b.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

rovnání

rovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2c :

U následujících dvou příkladů by bylo použití odmocninového kritéria složité, ale podílové kritérium se dá použít snadno.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2c :

U následujících dvou příkladů by bylo použití odmocninového kritéria složité, ale podílové kritérium se dá použít snadno.



Necht' $a > 0$. Řada $\sum_n \frac{a^n}{n!}$ konverguje, protože



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2c :

U následujících dvou příkladů by bylo použití odmocninového kritéria složité, ale podílové kritérium se dá použít snadno.



Nechť $a > 0$. Řada $\sum_n \frac{a^n}{n!}$ konverguje, protože



$$\lim_n \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_n \frac{a}{n+1} = 0.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum \frac{n!}{n^n}$ konverguje,



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řada $\sum \frac{n!}{n^n}$ konverguje,



protože

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_n \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_n \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Konec příkladů 2c.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2d :

Dokažte pomocí důsledků odmocninového a podílového kritéria následující limity:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2d :

Dokažte pomocí důsledků odmocninového a podílového kritéria následující limity:



$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty, \quad \lim_n \frac{n}{(2 - 1/n)^n} = 0.$$

Konec příkladů 2d.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

Ověřte, že odmocninové (a tedy i podílové) kritérium neřekne nic o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ pro } p > 0.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

Ověřte, že odmocninové (a tedy i podílové) kritérium neřekne nic o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ pro } p > 0.$$



Kondenzační kritérium však
hledaný výsledek dá:



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

Ověřte, že odmocninové (a tedy i podílové) kritérium neřekne nic o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ pro } p > 0.$$



Kondenzační kritérium však
hledaný výsledek dá:



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$, tj. geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-p)}$
a ta konverguje právě když $2^{1-p} < 1$, tedy právě když $p > 1$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte pomocí kondenzačního kritéria, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \lg n}$ diverguje.

Konec příkladů 2.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ konverguje pro libovolné reálné x a $p > 0$.



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ konverguje pro libovolné reálné x a $p > 0$.



Návod: použijte Dirichle-
tovo kritérium.

Konec příkladů 3.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3a :

Ukažte, že lze použít Leibnizovo kritérium na řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ pro $p > 0$ a výsledkem je konvergence.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3a :

Ukažte, že lze použít Leibnizovo kritérium na řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ pro $p > 0$ a výsledkem je konvergence.



Jaká je situace pro ostatní hodnoty p ?



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání
srovnání-ekv

Cauchy-krit
Cauchy-limitní

d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že lze použít Leibnizovo kritérium na řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ pro $p > 0$ a výsledkem je konvergence.

Konec příkladů 3a.

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d'Alembert-krit
d'Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje neabsolutně, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje absolutně.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje neabsolutně, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje absolutně.



Pro která reálná p konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ absolutně a pro která neabsolutně?

Konec příkladů 4.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

Konec příkladů 5.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 6 :

Konec příkladů 6.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 7 :

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro cyklometrické funkce:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 7 :

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro cyklometrické funkce:



$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1)$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 7 :

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro cyklometrické funkce:



$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1)$$



$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 7 :

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro cyklometrické funkce:



$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1)$$



$$\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$



Dá se ukázat, že uvedené konvergence platí v uzavřeném intervalu $[-1, 1]$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože $\arctg 1 = \pi/4$, lze spočítat číslo π jako součet řady $4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože $\arctg 1 = \pi/4$, lze spočítat číslo π jako součet řady $4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.



Tato řada však konverguje pomalu.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože $\arctg 1 = \pi/4$, lze spočítat číslo π jako součet řady $4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.



Tato řada však konverguje pomalu.



Lepší konvergence se získá z rovnice $\pi/6 = \arctg(1/\sqrt{3})$, kde navíc není nutné použít krajní bod intervalu konvergence.



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro hyperbolické funkce.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro hyperbolické funkce.



Hyperbolický sinus $\sinh x$ je definován jako $(e^x - e^{-x})/2$ a hyperbolický kosinus $\cosh x$ jako $(e^x + e^{-x})/2$.

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Konec příkladů 7.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 8 :

Konec příkladů 8.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OTÁZKY

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

Ukažte, že změna konečně mnoho členů řady nemá vliv na konvergenci řady (ale samozřejmě může mít vliv na součet řady).



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když $\lim_k \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte, že seskupíme-li jakkoli konvergentní řadu, bude výsledná řada mít stejný součet jako původní řada. Může se předpokládat, že původní řada konverguje k nevlastnímu číslu?



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte příklad řady, která osciluje a po nějakém uzávorkování konverguje k vlastnímu (nevlastnímu) číslu.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte příklad konvergentní řady po jejímž přerovnění nová řada osciluje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvědomte si příklady divergentních řad, jejichž členy konvergují k 0.

Konec otázek 1.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

Ukažte, že řadu, jejíž prvky mají skoro stejná znaménka, lze libovolně přeházet nebo seskupit (uzávorkovat) aniž se změní její konvergence a součet.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte příklad konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro níž neexistuje $q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Najděte příklad konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro níž $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A teď trochu kritériové alchymie:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A teď trochu kritériové alchymie:



* Dokažte, že podílové kritérium je slabší než odmocninové kritérium. To znamená, že pokud něco konverguje díky podílovému kritériu, pak konverguje i podle odmocninového.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A teď trochu kritériové alchymie:



* Dokažte, že podílové kritérium je slabší než odmocninové kritérium. To znamená, že pokud něco konverguje díky podílovému kritériu, pak konverguje i podle odmocninového.



To je velmi podstatná informace!!!



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A teď trochu kritériové alchymie:



* Dokažte, že podílové kritérium je slabší než odmocninové kritérium. To znamená, že pokud něco konverguje díky podílovému kritériu, pak konverguje i podle odmocninového.



To je velmi podstatná informace!!!



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existuje nějaké nejsilnější?
Asi ne ...



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Existuje nějaké nejsilnější?
Asi ne ...



Nikdy neříkej všechno, co
znáš. BTW, je důležitější to
vědět, nebo na to přijít?

Konec otázek 2.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

Ukažte, že Leibnizovo kritérium je speciální případ Dirichletova kritéria.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Leibnizovo kritérium může mít následující formulaci: Je-li $\{a_n\}$ monotónní posloupnost, pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje právě když $\lim a_n = 0$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokažte, že je-li $\{a_n\}$ monotónní omezená posloupnost s nenulovou limitou, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Konec otázek 3.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :



A teď pro zájemce jedna
stěžejní myšlenka:



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :



A teď pro zájemce jedna stěžejní myšlenka:

↓
* Ukažte, že jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :



A teď pro zájemce jedna stěžejní myšlenka:



* Ukažte, že jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- =$

$+\infty$.



Na základě předchozího tvrzení dokažte poslední větu, že neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat tak, aby konvergovala k libovolnému danému číslu nebo aby oscillovala.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel

rovnání

rovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 4 :



A teď pro zájemce jedna stěžejní myšlenka:



* Ukažte, že jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- =$

$+\infty$.



Na základě předchozího tvrzení dokažte poslední větu, že neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat tak, aby konvergovala k libovolnému danému číslu nebo aby oscillovala.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel

rovnání

rovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Že jsem jenom tak nemlu-
vila do větru? Já su chytrá :-
)

Konec otázek 4.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :

Konec otázek 5.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 6 :

Konec otázek 6.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 7 :

Konec otázek 7.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 8 :

Konec otázek 8.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

CVIČENÍ

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :



Řady jsou v podstatě nekonečné součty uvažované ve smyslu limit.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :



Řady jsou v podstatě nekonečné součty uvažované ve smyslu limit.



Sčítáme-li prvky nějaké posloupnosti, musí její prvky konvergovat k nule, aby měla řada rozumný konečný součet.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :



Řady jsou v podstatě nekonečné součty uvažované ve smyslu limit.



Sčítáme-li prvky nějaké posloupnosti, musí její prvky konvergovat k nule, aby měla řada rozumný konečný součet.



Ani to však nestačí.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limitu u posloupnosti vidíme z jejího grafu zpravidla na první pohled. Zpravidla stačí člen s indexem 100. U řady jsme v koncích (není snadné sečíst prvních 100 členů, a ani pak si nejsme jisti, co bude dál).



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d'Alembert-krit
 - d'Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
 - neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Limitu u posloupnosti vidíme z jejího grafu zpravidla na první pohled. Zpravidla stačí člen s indexem 100. U řady jsme v koncích (není snadné sečíst prvních 100 členů, a ani pak si nejsme jisti, co bude dál).



U řady jsou sčítance maličká čísílka. Na nich není nic ke koukání.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řad s kladnými členy se vyplatí následující zjednodušující pohled:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řad s kladnými členy se vyplatí následující zjednodušující pohled:



Řada má sčítance



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řad s kladnými členy se vyplatí následující zjednodušující pohled:



Řada má sčítance



- nesmyslně obrovské (například $1 + 1 + 1 + \dots$). Takové řady divergují.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řad s kladnými členy se vyplatí následující zjednodušující pohled:



Řada má sčítance



- nesmyslně obrovské (například $1 + 1 + 1 + \dots$). Takové řady divergují.



- veliké (například $1/1 + 1/2 + 1/3 + \dots$). Takové řady divergují.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d'Alembert-krit
d'Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řad s kladnými členy se vyplatí následující zjednodušující pohled:



Řada má sčítance



- nesmyslně obrovské (například $1 + 1 + 1 + \dots$). Takové řady divergují.



- veliké (například $1/1 + 1/2 + 1/3 + \dots$). Takové řady divergují.



- akorát (například $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$). Takové řady konvergují.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U řad s kladnými členy se vyplatí následující zjednodušující pohled:



Řada má sčítance



- nesmyslně obrovské (například $1 + 1 + 1 + \dots$). Takové řady divergují.



- veliké (například $1/1 + 1/2 + 1/3 + \dots$). Takové řady divergují.



- akorát (například $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$). Takové řady konvergují.



- prťavé (například $1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \dots$). Takové řady rychle konvergují.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :



Na nesmyslně obrovské řady se používá takzvaná „nutná podmínka konvergence“.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :



Na nesmyslně obrovské řady se používá takzvaná „nutná podmínka konvergence“.



Například

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \implies \sum_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \infty .$$



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vyřešilo 8 z 10.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta „nutná podmínka konvergence“ není na první pohled podezřelá.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta „nutná podmínka konvergence“ není na první pohled podezřelá.



Například

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = 1 \implies \sum_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \infty .$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta „nutná podmínka konvergence“ není na první pohled podezřelá.



Například

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = 1 \implies \sum_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \infty .$$



Při počítání limity jsme po úpravě použili

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \leq \sqrt[n]{e} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty .$$

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.

neabsolutní konv.
řada funkcí

Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Vyřešili 2 z 10.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na většinu dalších řad funguje srovnávací kritérium: „větší řada má větší součet“.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na většinu dalších řad funguje srovnávací kritérium: „větší řada má větší součet“.



Nejčastěji při zkoumání $\sum a_n$ spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

pro šikovou (známou) řadu $\sum b_n$ a máme vyhráno.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon

log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na většinu dalších řad funguje srovnávací kritérium: „větší řada má větší součet“.



Nejčastěji při zkoumání $\sum a_n$ spočítáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

pro šikovnou (známou) řadu $\sum b_n$ a máme vyhráno.



Tak je užitečné „znát“ co nejvíce řad. Dovolte abych je představil:

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



$$\sum \frac{1}{n} = \infty, \sum \frac{1}{n+5} = \infty, \sum \frac{1}{3n-1} = \infty, \sum \frac{n}{n^2+2} = \infty.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum \frac{1}{n} = \infty, \sum \frac{1}{n+5} = \infty, \sum \frac{1}{3n-1} = \infty, \sum \frac{n}{n^2+2} = \infty.$$



$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty, \sum \frac{1}{n^2+5} < \infty, \sum \frac{1}{3n^2-1} < \infty, \sum \frac{n}{n^3+2} < \infty.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum \frac{1}{n} = \infty, \sum \frac{1}{n+5} = \infty, \sum \frac{1}{3n-1} = \infty, \sum \frac{n}{n^2+2} = \infty.$$



$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty, \sum \frac{1}{n^2+5} < \infty, \sum \frac{1}{3n^2-1} < \infty, \sum \frac{n}{n^3+2} < \infty.$$



$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty, \sum \frac{1}{\sqrt{n}+5} = \infty, \sum \frac{1}{3\sqrt{n}-1} = \infty, \sum \frac{\sqrt{n}}{n+2} = \infty.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum \frac{1}{n} = \infty, \sum \frac{1}{n+5} = \infty, \sum \frac{1}{3n-1} = \infty, \sum \frac{n}{n^2+2} = \infty.$$



$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty, \sum \frac{1}{n^2+5} < \infty, \sum \frac{1}{3n^2-1} < \infty, \sum \frac{n}{n^3+2} < \infty.$$



$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty, \sum \frac{1}{\sqrt{n}+5} = \infty, \sum \frac{1}{3\sqrt{n}-1} = \infty, \sum \frac{\sqrt{n}}{n+2} = \infty.$$



Nikdy nezapomeňte, že $\sum 1/n^\alpha$ konverguje právě když $\alpha > 1$.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti

kondenzační krit.
řada s obecnými členy

Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon

log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Spočtete, pro které hodnoty kladných parametrů a, b konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^b(n+b)^a}.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtete, pro které hodnoty kladných parametrů a, b konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^b(n+b)^a}.$$



Jde o srovnání s $\sum 1/n^{a+b}$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vyřešili 3 z 10.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro konvergenci řady s prvky se s výhodou použije podílové nebo odmocninové kritérium.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro konvergenci řady s prvými členy se s výhodou použije podílové nebo odmocninové kritérium.



Dokažte, že konverguje

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n(n-1)}$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro konvergenci řady s pr-
t'avými členy se s výhodou
použije podílové nebo od-
mocninové kritérium.



Dokažte, že konverguje

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n(n-1)}$$



Zde použijeme odmocninové kritérium.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vyřešili 4 z 10.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud odmocninové či podílové kritérium dá v limitě 1, nejde o prť avou řadu a nic nevíme.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud odmocninové či podílové kritérium dá v limitě 1, nejde o prť avou řadu a nic nevíme.



Pro $\sum 1/n$ například dostaneme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

a (jak již víme) divergentní $\sum 1/n$ není prť avá. Stejnou jedničku dostaneme pro konvergentní $\sum 1/n^2$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud odmocninové či podílové kritérium dá v limitě 1, nejde o prť avou řadu a nic nevíme.



Pro $\sum 1/n$ například dostaneme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

a (jak již víme) divergentní $\sum 1/n$ není prť avá. Stejnou jedničku dostaneme pro konvergentní $\sum 1/n^2$.



Kdo čte důkazy, ví, že podílové i odmocninové kritérium potřebuje majorantní geometrickou řadu $\sum q^n$ s pevným q .

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když z principu řada není menší než $\sum q^n$, je použitelné podílové či odmocninové kritérium pouze pro „divergenci“.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Když z principu řada není menší než $\sum q^n$, je použitelné podílové či odmocninové kritérium pouze pro „divergenci“.



Ještě jednou: $\sqrt[n]{a_n} < 1$ ani $a_{n+1}/a_n < 1$ nestačí.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V písemce použije špatně
podílové či odmocninové
kritérium 30% populace.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Pro řady, které nemají pouze kladné členy zkoumáme někdy řadu absolutních hodnot. Pokud tato konverguje, pak konverguje původní řada také.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Pro řady, které nemají pouze kladné členy zkoumáme někdy řadu absolutních hodnot. Pokud tato konverguje, pak konverguje původní řada také.



Například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ konverguje .}$$



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Pro řady, které nemají pouze kladné členy zkoumáme někdy řadu absolutních hodnot. Pokud tato konverguje, pak konverguje původní řada také.



Například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ konverguje .}$$



Často však zkoumáme konvergenzi řady, kde kladná část i záporná část diverguje. V tom případě nejde o absolutní konvergenzi a máme s tím dost práce.



LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
rovnání	
rovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejjednodušší jsou řady se střídavými znaménky a klesající absolutní hodnotou členů.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konverguje podle Leibnitzova kritéria.}$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejjednodušší jsou řady se střídavými znaménky a klesající absolutní hodnotou členů.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konverguje podle Leibnitzova kritéria.}$$



Je třeba ověřit monotonii, tedy $1/(n+1) < 1/n$, což v tomto případě bylo snadné. Jindy s tím může být problém.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na řadu řad s kladnými i
zápornými členy lze použít
Dirichletovo kritérium.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na řadu řad s kladnými i zápornými členy lze použít Dirichletovo kritérium.



Potřebujeme znát, které řady mají „omezenou posloupnost částečných součtů“.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující řady mají omezené posloupnosti částečných součtů



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující řady mají omezené posloupnosti částečných součtů



$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^N \sin nx \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^N \cos nx, \text{ pokud nejde o řadu jedniček} \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \sin^2 n, \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \cos^2 n, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^N \sin n \sin n^2. \tag{6}$$

LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl. na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	





Dokáže se indukci pomocí
„součtových vzorečků" pro
funkce sinus a kosinus.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}.$$



Řešení. Použijeme vzoreček $\sin^2 n = (1 - \cos 2n)/2$ a dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}.$$



Řešení. Použijeme vzoreček $\sin^2 n = (1 - \cos 2n)/2$ a dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}.$$



Zde je na pravé straně součet divergentní a konvergentní řady, tedy řada vlevo není konvergentní podle věty o součtu řad.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Spočetli 2 z 10.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důležitým a velmi užitečným kritériem je Abelovo kritérium.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důležitým a velmi užitečným kritériem je Abelovo kritérium.



Konvergentní krát monotónní omezená je konvergentní, co jiného si přát.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důležitým a velmi užitečným kritériem je Abelovo kritérium.



Konvergentní krát monotónní omezená je konvergentní, co jiného si přát.



Tedy potřebujeme vědět, co je monotónní.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+5}, 1 + \frac{1}{n+5}, \frac{n+6}{n+5}, \frac{n+5}{n+6}$$

$$2 + \frac{1}{n+5}, \frac{2n+11}{n+5}$$

$$n - \frac{1}{n+5}, \frac{n^2+5n-1}{n+5}$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+5}, 1 + \frac{1}{n+5}, \frac{n+6}{n+5}, \frac{n+5}{n+6}$$

$$2 + \frac{1}{n+5}, \frac{2n+11}{n+5}$$

$$n - \frac{1}{n+5}, \frac{n^2+5n-1}{n+5}$$



Při opakovaném použití
Abelova kritéria stačí, aby
byly jednotlivé faktory
monotónní (a omezené),
což je šikovné:

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+5}, 1 + \frac{1}{n+5}, \frac{n+6}{n+5}, \frac{n+5}{n+6}$$

$$2 + \frac{1}{n+5}, \frac{2n+11}{n+5}$$

$$n - \frac{1}{n+5}, \frac{n^2+5n-1}{n+5}$$



Při opakovaném použití
Abelova kritéria stačí, aby
byly jednotlivé faktory
monotónní (a omezené),
což je šikovné:



$$\frac{3n+2}{2n+3} = \frac{3n+2}{3n} \frac{2n}{2n+3} \frac{3}{2}$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{2 + e^{-n}}{3 + \sin(1/n)} \frac{2 - e^{-n}}{3 - \sin(1/n)} \frac{2 + \cos(1/n)}{2 - \cos(1/n)}$$

konverguje díky monotonii a omezenosti jednotlivých činitelů vpravo od prvního zlomku.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{2 + e^{-n}}{3 + \sin(1/n)} \frac{2 - e^{-n}}{3 - \sin(1/n)} \frac{2 + \cos(1/n)}{2 - \cos(1/n)}$$

konverguje díky monotonii a omezenosti jednotlivých činitelů vpravo od prvního zlomku.



Monotonii někdy získáme známým odmocninovým trikem

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$



LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zjistěte konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zjistěte konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$



Řešení. Trikové řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n(n + (-1)^n)}.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zjistěte konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$



Řešení. Trikové řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n(n + (-1)^n)}.$$



Naše řada se od konvergentní liší o konvergentní, tedy konverguje. Zkusíme i klasickou úpravu:

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Zjistěte opět konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} .$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zjistěte opět konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$



Řešení. Klasické řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \cdot \frac{n - (-1)^n}{n - (-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n - (-1)^n (-1)^n}{n^2 - 1}.$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zjistěte opět konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$



Řešení. Klasické řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \cdot \frac{n - (-1)^n}{n - (-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n - (-1)^n (-1)^n}{n^2 - 1}.$$



Vpravo jsou dvě konvergentní řady.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní
d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Spočetl 1 z 10.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Dokažte tvrzení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty .$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Dokažte tvrzení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty .$$



Řešení. Víme, že

$$|2xy| \leq x^2 + y^2 ,$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 2 \frac{a_n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{n^2} .$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Dokažte tvrzení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty .$$



Řešení. Víme, že

$$|2xy| \leq x^2 + y^2 ,$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 2 \frac{a_n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{n^2} .$$



Vpravo jsou dvě konvergentní řady, což stačí.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Dokažte, že pro kladná čísla a_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Dokažte, že pro kladná čísla a_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$



Když se to dokáže, je z toho vidět, zda je silnější podílové nebo odmocninové kritérium. Které?



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - rovnání
 - rovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Dokažte, že pro kladná čísla a_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$



Když se to dokáže, je z toho vidět, zda je silnější podílové nebo odmocninové kritérium. Které?



Když dá podílové například $1/2$, dá to taky odmocninové. Ale může se stát, že odmocninové dá $1/2$ a podílové nic. Tedy silnější (mocnější) je odmocninové.

LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - rovnání
 - rovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řešení. Píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} \stackrel{V}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

kde $\stackrel{V}{=}$ plyne z nerovnosti mezi harmonickým, geometrickým a aritmetickým průměrem.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} \stackrel{V}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

kde $\stackrel{V}{=}$ plyne z nerovnosti mezi harmonickým, geometrickým a aritmetickým průměrem.



Je též možné použít něco jako ε a n_0 .



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Některé situace vedou na počítání řad. Následující příklady jsou pro pobavení.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

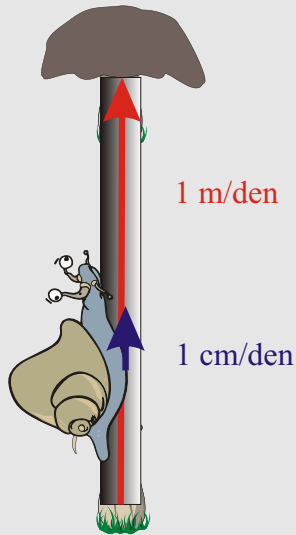
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Představme si pomalého šneka, který leze po rychle rostoucí houbě. Doleze na vršek?



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řešení. Jestli houba roste 100 krát rychleji než šnek leze, tak první den šnek popoleze o jednu setinu výšky houby. Druhý den o jednu dvousetinu a tak dál. Celkem takto sbírá části odpovídající harmonické řadě, která diverguje. Když součet těchto částí překročí jedničku, dosáhne na vršek houby.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Jestli houba roste 100 krát rychleji než šnek leze, tak první den šnek popoleze o jednu setinu výšky houby. Druhý den o jednu dvousetinu a tak dál. Celkem takto sbírá části odpovídající harmonické řadě, která diverguje. Když součet těchto částí překročí jedničku, dosáhne na vršek houby.



Dobrý hospodský trik.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Jestli houba roste 100 krát rychleji než šnek leze, tak první den šnek popoleze o jednu setinu výšky houby. Druhý den o jednu dvousetinu a tak dál. Celkem takto sbírá části odpovídající harmonické řadě, která diverguje. Když součet těchto částí překročí jedničku, dosáhne na vršek houby.



Dobrý hospodský trik.



Dík.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Králíci se potřebují dostat přes řeku. Na břehu jsou na sobě postaveny cihly (tvoří vysoký komín s podstavou jedné cihly).



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

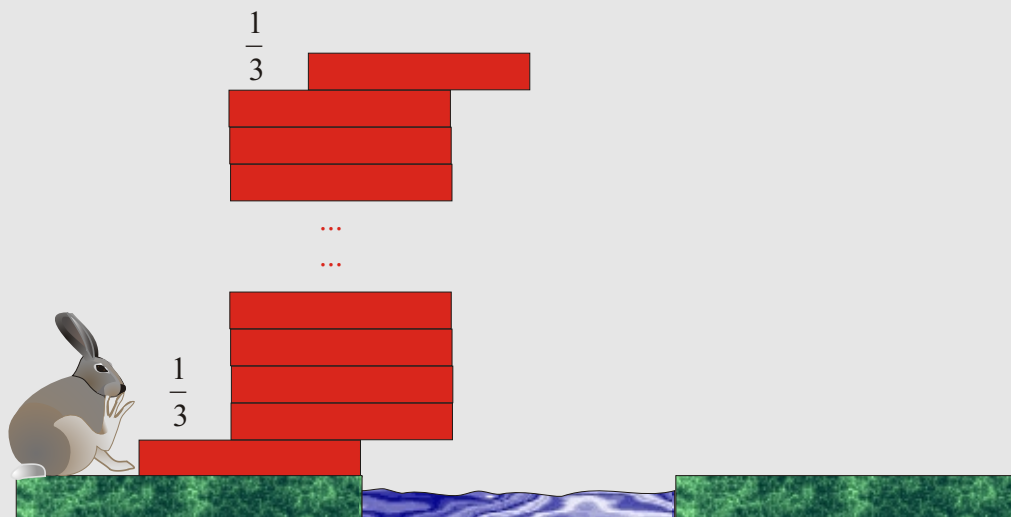
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Králíci se potřebují dostat přes řeku. Na břehu jsou na sobě postaveny cihly (tvoří vysoký komín s podstavou jedné cihly).



Šikovní králík do každé z nich trochu strčil, vylezl nahoru a spustil se po provaze na druhou stranu řeky. Je to možné? ANO. Vysvětlete, jak to udělal.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Nejvyšší cihla se posune o $1/3$, pak se dalších 1000 cihel nechá bez posunu, až „horních“ 1001 cihel má těžiště „téměř“ uprostřed 1001-ní cihly odshora. Pak cihlu 1002-hou posuneme o $1/3$. Nyní necháme milion cihel bez posunu



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Nejvyšší cihla se posune o $1/3$, pak se dalších 1000 cihel nechá bez posunu, až „horních“ 1001 cihel má těžiště „téměř“ uprostřed 1001-ní cihly odshora. Pak cihlu 1002-hou posuneme o $1/3$. Nyní necháme milion cihel bez posunu



Dobrý hospodský trik s kartama.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- rovnání
- rovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl.na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pečlivé počítání „vyvážené vratké stavby“ stavěné „odshora“ dá harmonickou řadu. Podobně se chovají ozdobné předměty (rybičky, motýlci a pod.) zavěšené u stropu ve „vyváženém stavu“.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

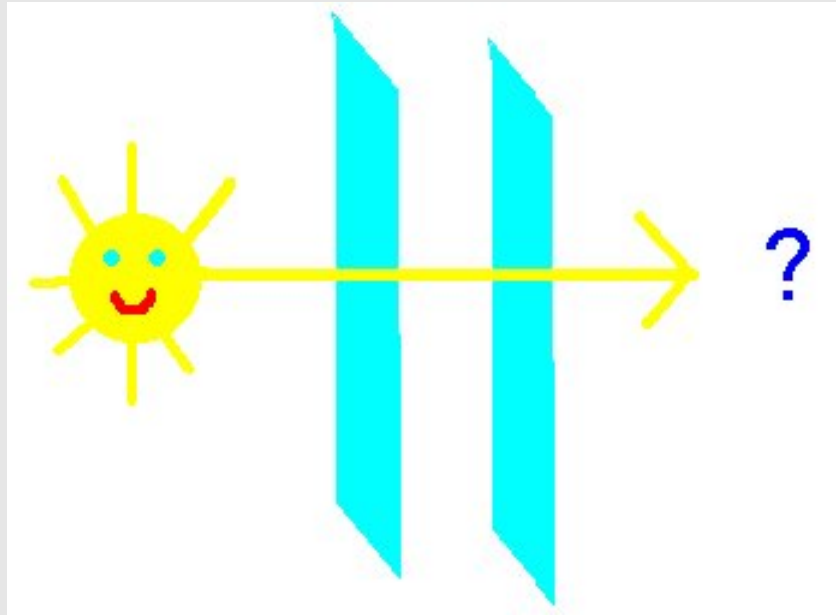
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Sluneční paprsky se na špinavém skle rozdělí na třetiny. Jedna projde skrz, druhá se ve skle ztratí a třetí se odrazí. Kolik světla projde přes dvojité (popřípadě trojitě či n -ité) okno?



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Při pečlivém počítání vyjde pro dvojitě okno $1/8$, pro trojitě okno $1/21$ = dost málo. Pro trojitě okno jde s výhodou použít výsledku pro dvojitě okno na získání rekurentního vztahu.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní prozradím pro otrlé pár kouzel a drobných podvodů.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní prozradím pro otrlé pár kouzel a drobných podvodů.



Vstup jen na vlastní nebezpečí. Je lepší kouzlit sám bez pomoci.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady $\sum \sin nx$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady $\sum \sin nx$.



Řešení. Pro $x = k\pi$ je jasná konvergence. Necht' konverguje pro nějaké $x \neq k\pi$, k celé. Pak platí nutná podmínka $\lim \sin nx = 0$, tedy i $\lim \sin(n+1)x = 0$. Pak podle součtových vzorečků i $\lim(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$, tedy i $\lim \cos nx = 0$ a $\lim(\sin^2 nx + \cos^2 nx) = 0$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady $\sum \sin nx$.



Řešení. Pro $x = k\pi$ je jasná konvergence. Necht' konverguje pro nějaké $x \neq k\pi$, k celé. Pak platí nutná podmínka $\lim \sin nx = 0$, tedy i $\lim \sin(n+1)x = 0$. Pak podle součtových vzorečků i $\lim(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$, tedy i $\lim \cos nx = 0$ a $\lim(\sin^2 nx + \cos^2 nx) = 0$.



To je ovšem spor s $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady $\sum \sin nx$.



Řešení. Pro $x = k\pi$ je jasná konvergence. Necht' konverguje pro nějaké $x \neq k\pi$, k celé. Pak platí nutná podmínka $\lim \sin nx = 0$, tedy i $\lim \sin(n+1)x = 0$. Pak podle součtových vzorečků i $\lim(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$, tedy i $\lim \cos nx = 0$ a $\lim(\sin^2 nx + \cos^2 nx) = 0$.



To je ovšem spor s $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



Podobně pro $\sum \sin n^2$



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní jedna obecná zajímavost:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní jedna obecná zajímavost:



Posloupnost x_n lze přepsat do tvaru

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1 .$$

Tak jde limitu posloupnosti zkoumat pomocí konvergence řady.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní

d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní jedna obecná zajímavost:



Posloupnost x_n lze přepsat do tvaru

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1 .$$

Tak jde limitu posloupnosti zkoumat pomocí konvergence řady.



Například

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2} .$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nyní jedna obecná zajímavost:



Posloupnost x_n lze přepsat do tvaru

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1 .$$

Tak jde limitu posloupnosti zkoumat pomocí konvergence řady.



Například

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2} .$$



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řada konverguje, tedy posloupnost také.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Další hezký trik:



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Další hezký trik:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + k^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2 + k^2} - n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2 + k^2} + n},$$

což konverguje podle Leibnitzova kritéria.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zatím jsme nepoužili poznatky z kapitol o limitách funkcí, o derivaci a rozvoji funkcí.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zatím jsme nepoužili poznatky z kapitol o limitách funkcí, o derivaci a rozvoji funkcí.

↓
Pro výklad metod a postupů nebyly tyto věci zapotřebí.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zatím jsme nepoužili poznatky z kapitol o limitách funkcí, o derivaci a rozvoji funkcí.

↓
Pro výklad metod a postupů nebyly tyto věci zapotřebí.



V početní praxi však to s výhodou použijeme.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
 - neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Monotonii posloupnosti budeme zkoumat pomocí zkoumání příslušné funkce. Tedy například místo zkoumání posloupnosti $\log n/n$ zkoumáme funkci $\log x/x$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Monotonii posloupnosti budeme zkoumat pomocí zkoumání příslušné funkce. Tedy například místo zkoumání posloupnosti $\log n/n$ zkoumáme funkci $\log x/x$.



Podobně při ověřování podmínek kritérií konvergence budeme pracovat s limitami funkcí místo limit posloupností (pokud to půjde).



LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Monotonii posloupnosti budeme zkoumat pomocí zkoumání příslušné funkce. Tedy například místo zkoumání posloupnosti $\log n/n$ zkoumáme funkci $\log x/x$.



Podobně při ověřování podmínek kritérií konvergence budeme pracovat s limitami funkcí místo limit posloupností (pokud to půjde).



Pro srovnávací kritérium použijeme s výhodou Taylorových polynomů.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl.na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Například pomocí Taylorových polynomů při rozvoji $(1 + x)^\alpha$ dostaneme rozvoj

$$\frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{1+p}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Například pomocí Taylorových polynomů při rozvoji $(1 + x)^\alpha$ dostaneme rozvoj

$$\frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{1+p}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$



Nyní vidíme, jak se řada chová a kdy konverguje.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Například pomocí Taylorových polynomů při rozvoji $(1 + x)^\alpha$ dostaneme rozvoj

$$\frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{1+p}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$



Nyní vidíme, jak se řada chová a kdy konverguje.



Tedy jde zkoumat pohodlně
konvergenci mnohých řad.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 7 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 7.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 8 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 8.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

UČENÍ

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 1 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 1.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 2 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 2.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 3 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 3.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 4 :

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (0, \infty)$$



implikuje konvergenci
 $\sum a_n$.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 4 :

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (0, \infty)$$



implikuje konvergenci
 $\sum a_n$.



Cesty do pekla jsou dlážděny dobrými úmysly.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \Rightarrow a_n < 1 \stackrel{?}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$



Na to jsem přišel sám.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \Rightarrow a_n < 1 \stackrel{?}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$



Na to jsem přišel sám.



No comment.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \stackrel{?}{\iff} \sum a_n \text{ konverguje}$$



Odmocninové kritérium je super.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

rovnání

rovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \stackrel{?}{\iff} \sum a_n \text{ konverguje}$$



Odmocninové kritérium je super.



Kdo neumí, neumí.



LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řada absolutně konverguje,
pokud střídá znaménka a
 $|a_n| > |a_{n+1}|$.



LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řada absolutně konverguje,
pokud střídá znaménka a
 $|a_n| > |a_{n+1}|$.



10 minut za hrubost.



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum_{n=1}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \sum_{n=1}^N \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \dots$$



Částečný součet nevidím ...



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv
Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\sum_{n=1}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \sum_{n=1}^N \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \dots$$



Částečný součet nevidím ...



Zkusil jsi teleskop, námoř-
níčku?

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



$$(-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \stackrel{?}{<} (-1)^n \frac{1}{n}$$



... a můžeme použít Leibniz!



LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$(-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \stackrel{?}{<} (-1)^n \frac{1}{n}$$



... a můžeme použít Leibni-
tze!



Bud' to piš nebo myslí, ni-
řada zároveň.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 4.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 5 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 5.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 6 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 6.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 7 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 7.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 8 :

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 8.

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d'Alembert-krit

d'Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9