

Řady

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY ČÍSEL

511

1. limita posloupnosti (operace založená na vzdálenosti bodů)
2. supremum nebo infimum posloupnosti (operace založená na uspořádání bodů).

Z hlavních struktur reálných čísel zbývá použít aritmetické operace. V následující části bude probrán součet posloupnosti.

Součin posloupnosti se nepoužívá často a jeho teorii lze vyvodit z teorie o součtu.

DEFINICE. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, značí symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ její **součet**, tj.

limitu **částečných součtů** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n)$.

Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se standardně užívá v obecnějším smyslu pro posloupnost $\{a_n\}$, která se má sečíst, a to i v případě, kdy její součet neznáme nebo součet neexistuje. Příslušná posloupnost částečných součtů se často značí $\{s_n\}$, tj. $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

511

konverguje, je-li její součet reálné číslo

diverguje, jestliže její součet neexistuje (pak řada **osciluje**), nebo

diverguje, jestliže je její součet nevlastní (pak též říkáme, že řada konverguje k $+\infty$ nebo $-\infty$).

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > m > k$ je

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

VĚTA. Následující rovnosti platí, pokud mají smysl pravé strany:

$$\begin{aligned} \sum (a_n + b_n) &= \sum a_n + \sum b_n, \\ \sum (k \cdot a_n) &= k \cdot \sum a_n. \end{aligned}$$

VĚTA. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.

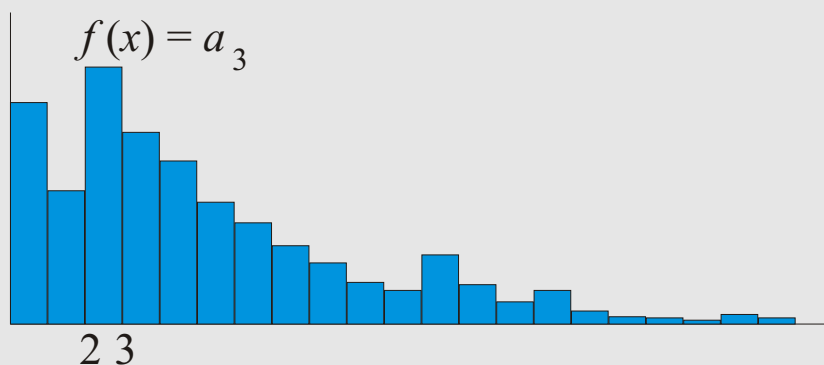
LEKCE10-RADřady
součetdivergence
Bolzano-Cauchy
aritmetikařada kladných čísel
srovnánísrovnání-ekv
Cauchy-kritCauchy-limitní
d' Alembert-kritd' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.řada s obecnými členy
Leibniz-krit.Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.neabsolutní konv.
řada funkcíTaylorova rada
expgon
logbin
Poznámky1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s kladnými (či zápornými) členy

511

VĚTA. Jestliže v řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemění její členy od určitého indexu znaménko, řada vždy konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.



Pro řady z předchozího tvrzení zbývá najít kritéria, která umožní zjistit, zda řada konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.

Je zřejmé, že se stačí omezit na řady s nezápornými nebo kladnými členy.

VĚTA. (Srovnávací kritérium) Necht' $0 \leq a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Necht' $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže existují kladná čísla k, K tak, že $kb_n \leq a_n \leq Kb_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

2. Jestliže existuje kladná vlastní limita $\lim \frac{a_n}{b_n}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Tvrzení 2 se nazývá limitní tvar tvrzení 1 a snadno z něho vyplývá.

Tvrzení 1 je však obecnější, protože se může stát, že jeho podmínky jsou splněny, ale $\lim(a_n/b_n)$ neexistuje.

Podobně je tomu v následujících kritériích.

Limitní tvary budou uváděny bez důkazů, neboť jsou obdobné předchozímu důkazu.

Příklady 2a

VĚTA. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

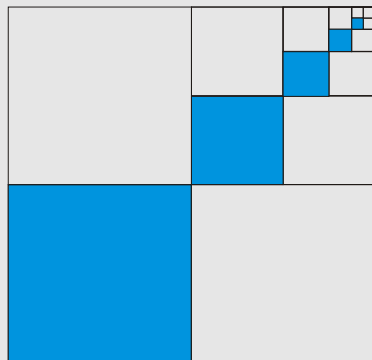
LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n \geq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



$$\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$

Příklady 2b

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (d'Alembertovo podílové kritérium) Necht' $a_n > 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro skoro všechna n , pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Necht' $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklady 2c

511

DŮSLEDEK.

(a) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$).

(b) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$).

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání
srovnání-ekv

Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d'Alembert-krit
d'Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy
Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.
neabsolutní konv.

řada funkcí
Taylorova rada

exp
gon
log
bin

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2d

Následující jednoduché kritérium se používá pro některé důležité řady, pro které nelze použít podílové nebo odmocninové kritérium.

VĚTA. (Kondenzační kritérium) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní.

Pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.

[Poznámky 2](#) [Příklady 2](#) [Otázky 2](#) 2

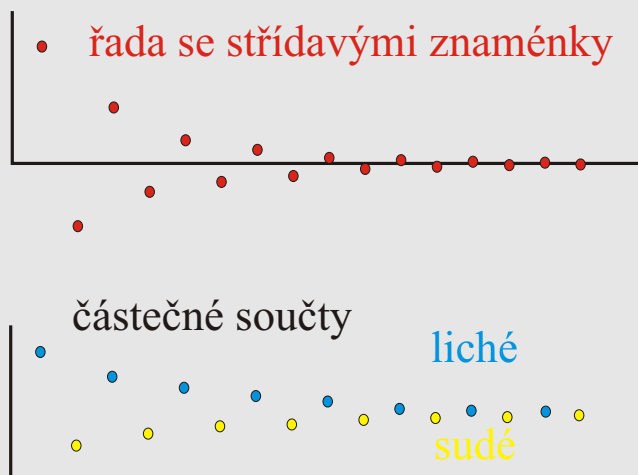
LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konvergence řad s proměnnými znaménky

Nejjednodušší případ je ten, kde se znaménka mění pravidelně po každé změně indexu.

VĚTA. (Leibniz) Necht' $\{a_n\}$ je monotónní a $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.



Příklady 3a

Jediná jednodušší kritéria pro obecnější případ jsou Dirichletovo kritérium a Abelovo kritérium.

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jestliže $\{a_n\}$ je monotónní a buď

(a) $\lim a_n = 0$, $\{b_n\}$ má omezené částečné součty (**Dirichlet**)
nebo

(b) $\{a_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (**Abel**),

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

LEKCE10-RAD

řady	
součet	
divergence	
Bolzano-Cauchy	
aritmetika	
řada kladných čísel	
srovnání	
srovnání-ekv	
Cauchy-krit	
Cauchy-limitní	
d' Alembert-krit	
d' Alembert-limitní	
apl.na posloupnosti	
kondenzační krit.	
řada s obecnými členy	
Leibniz-krit.	
Dirichet-Abel-krit.	
absolutní konv.	
neabsolutní konv.	
řada funkcí	
Taylorova rada	
exp	
gon	
log	
bin	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

Absolutní konvergence

DEFINICE. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**.

Příklady 4

VĚTA. Absolutně konvergentní řada konverguje. Navíc konverguje ke stejnému číslu i po libovolném přerovnání.

Protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je řada s neměnicími se znaménky, pro absolutní konvergenci

řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ platí všechna kritéria uvedená v části o řadách s neměnicími znaménky, jen je nutné místo a_n psát $|a_n|$.

Tedy např., jestliže existuje $q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.

LEKCE10-RAD

- řady
- součet
 - divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
 - srovnání
 - srovnání-ekv
 - Cauchy-krit
 - Cauchy-limitní
 - d' Alembert-krit
 - d' Alembert-limitní
 - apl. na posloupnosti
 - kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
 - Leibniz-krit.
 - Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
 - exp
 - gon
 - log
 - bin
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže řada konverguje i po libovolném přerovnání (není nutné požadovat, že ke stejnému číslu), pak řada konverguje absolutně.

511

VĚTA. Necht' řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.

Pak pro každé $p \in \mathbb{R}^*$ existuje prosté zobrazení φ množiny \mathbb{N} na \mathbb{N} takové, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = p$ a existuje takové φ , že přerovnaná řada osciluje.

Otázky 4 4 4

LEKCE10-RAD
řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl.na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

ŘADY FUNKCÍ

Před definicí obecné mocniny byla definována **bodová konvergence posloupnosti funkcí** a podobně lze definovat součet řady funkcí:

DEFINICE. Říkáme, že řada funkcí $\sum f_n$ konverguje (bodově) na množině $A \subset \mathbb{R}$ k funkci f , jestliže pro každé $x \in A$ konverguje řada čísel $\sum f_n(x)$ k číslu $f(x)$ (symbol $\sum f_n = f$).

Speciálním případem řady funkcí jsou tzv. mocninné řady (funkce f_n je násobek n -té mocniny, tj. $f_n(x) = a_n x^n$).

Teorie těchto řad bude probírána později, ale je vhodné se nyní zabývat nejdůležitějším speciálním případem mocninných řad, a to jsou Taylorovy řady.

DEFINICE. Taylorova řada funkce f v bodě a je řada funkcí (mocnin)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n .$$

Taylorovy polynomy funkce $e^{-x^{-2}}$ v bodě 0 jsou nulové a tedy konvergují k 0 na \mathbb{R} (viz *Příklady 7* v kapitole o použití derivací); tato limita nemá s původní funkcí vlastně nic společného.

511

VĚTA. Taylorova řada funkce f konverguje k f v bodě x právě když $\lim_n R_n(x) = 0$, kde $R_n(x)$ je příslušný n -tý zbytek Taylorova polynomu funkce f v bodě a .

LEKCE10-RAD

řady
součet
divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika
řada kladných čísel
srovnání
srovnání-ekv
Cauchy-krit
Cauchy-limitní
d' Alembert-krit
d' Alembert-limitní
apl. na posloupnosti
kondenzační krit.
řada s obecnými členy
Leibniz-krit.
Dirichet-Abel-krit.
absolutní konv.
neabsolutní konv.
řada funkcí
Taylorova rada
exp
gon
log
bin
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Taylorovy polynomy následujících funkcí spolu s určením příslušného zbytku byly probrány v *Příkladech 7* v kapitole o použití derivací.

Nejdříve je vždy uveden rozklad funkce na její Taylorův polynom a zbytek a potom je uvedeno tvrzení, pro které body zbytek konverguje k 0 a tedy pro které body Taylorova řada konverguje k dané funkci.

Taylorovy řady budou sestrojovány v bodě 0, takže slova „v bodě a “ budou vynechána.

Exponenciální funkce

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké c mezi 0 a x .

VĚTA. Taylorova řada funkce e^x konverguje k e^x na \mathbb{R} a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámky 5

Goniometrické funkce

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel
srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x .

VĚTA. Taylorovy řady funkcí $\sin x$, $\cos x$ konvergují na \mathbb{R} k těmto funkcím a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámky 6

Logaritmická funkce

$$\begin{aligned} \lg(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \left(\text{popř. } (-1)^n \frac{x(x-c)^n}{(1+c)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

pro nějaké c mezi 0 a x , kde $x > -1$.

LEKCE10-RAD

- řady
- sočet
- divergence
- Bolzano-Cauchy
- aritmetika
- řada kladných čísel
- srovnání
- srovnání-ekv
- Cauchy-krit
- Cauchy-limitní
- d' Alembert-krit
- d' Alembert-limitní
- apl. na posloupnosti
- kondenzační krit.
- řada s obecnými členy
- Leibniz-krit.
- Dirichet-Abel-krit.
- absolutní konv.
- neabsolutní konv.
- řada funkcí
- Taylorova rada
- exp
- gon
- log
- bin
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Taylorova řada funkce $\lg(x + 1)$ konverguje k $\lg(x + 1)$ na $(-1, 1]$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} = \lg(x + 1), \quad x \in (-1, 1].$$

Binomický rozvoj

$$\begin{aligned} (1 + x)^p &= \\ 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + R_n(x) &= \\ \sum_{k=0}^n \binom{p}{k}x^k + p(p-1)\dots(p-n)(1+x)^{p-n-1}\frac{x(x-c)^n}{n!}, & \end{aligned}$$

pro $x > -1$, c mezi 0 a x (kde $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$).

VĚTA. Taylorova řada funkce $(1 + x)^p$, kde $p \in \mathbb{R}$, konverguje k $(1 + x)^p$ na intervalu $(-1, 1)$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k}x^k = (1 + x)^p, \quad x \in (-1, 1).$$

Speciálně pro $p = 1/2$ a $p = -1/2$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

LEKCE10-RAD

řady
součet

divergence
Bolzano-Cauchy
aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl. na posloupnosti
kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

Poznámky 7 Příklady 7

LEKCE10-RAD

řady

součet

divergence

Bolzano-Cauchy

aritmetika

řada kladných čísel

srovnání

srovnání-ekv

Cauchy-krit

Cauchy-limitní

d' Alembert-krit

d' Alembert-limitní

apl.na posloupnosti

kondenzační krit.

řada s obecnými členy

Leibniz-krit.

Dirichet-Abel-krit.

absolutní konv.

neabsolutní konv.

řada funkcí

Taylorova rada

exp

gon

log

bin

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9