Řady

ŘADY ČÍSEL

Zatím byly probrány dva druhy operací s posloupnostmi:

1. limita posloupnosti (operace založená na vzdálenosti bodů)
2. supremum nebo infimum posloupnosti (operace založená na uspořádání bodů).

Z hlavních struktur reálných čísel zbývá použít aritmetické operace. V následující části bude probrán součet posloupnosti.

Budeme sčítat všechny členy posloupnosti!

Součin posloupnosti se nepoužívá často a jeho teorii lze vyvodit z teorie o součtu.

DEFINICE. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, značí symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ její součet, tj. limitu částečných součtů $\lim_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n)$.

Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se standardně užívá v obecnějším smyslu pro posloupnost $\{a_n\}$, která se má sečíst, a to i v případě, kdy její součet neznáme nebo součet neexistuje. Příslušná posloupnost částečných součtů se často značí $\{s_n\}$, tj. $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Součet řady je definován jediným možným rozumným způsobem.

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

konverguje, je-li její součet reálné číslo
diverguje, jestliže její součet neexistuje (pak řada osciluje), nebo
diverguje, jestliže je její součet nevlastní (pak též říkáme, že řada konverguje k $+\infty$ nebo $-\infty$).

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 Cvičení 1

Protože součet řady je limitou speciální posloupnosti, vyplynou některé následující vlastnosti součtů řad z vět o limitách posloupností.

VĚTA. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > m > k$ je

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon .$$

Důkaz. Tvrzení je přepisem Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$. ◇

VĚTA. Následující rovnosti platí, pokud mají smysl pravé strany:

$$\begin{aligned} \sum (a_n + b_n) &= \sum a_n + \sum b_n , \\ \sum (k \cdot a_n) &= k \cdot \sum a_n . \end{aligned}$$

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z vět o limitě součtu a násobku posloupností. ◇

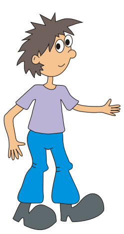
Pro násobení a dělení nekonečných řad neexistuje jednoduchý vzorec.

Následující tvrzení udává velmi důležitou **nutnou** podmínku pro konvergenci (pozor, **není to ekvivalence!**):

VĚTA. Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro $n > 1$, je $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$, neboť limita částečných součtů $\lim s_n = \lim s_{n-1}$ je vlastní. $\diamond$

Tvrzení se většinou používá v obráceném znění, tj., jestliže není $\lim a_n = 0$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.



Jó, tohle jsem mockrát popletl . . .

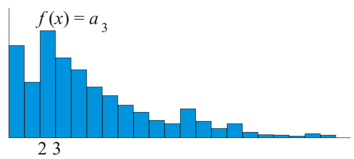
Konvergence řad s kladnými (či zápornými) členy

V mnoha případech se sčítají posloupnosti kladných čísel. V takovém případě (a v případě trochu obecnějším) je situace značně jednodušší:

VĚTA. Jestliže v řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nemění její členy od určitého indexu znaménko, řada vždy konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.

Důkaz. Uvedená vlastnost posloupnosti znamená, že posloupnost částečných součtů je od určitého členu monotónní a tedy má vlastní nebo nevlastní limitu. ◇

Jde o konečnost plochy pod grafem po částech konstantní funkce na následujícím obrázku



Pro řady z předchozího tvrzení zbývá najít kritéria, která umožní zjistit, zda řada konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.

Je zřejmé, že se stačí omezit na řady s nezápornými nebo kladnými členy.

Budeme hledat kouzelná pravidla pro konečnost součtu.

VĚTA. **(Srovnávací kritérium)** Nechť $0 \le a_n \le b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Důkaz. Protože změna konečně mnoha členů řady neovlivní konvergenci, lze předpokládat, že $0 \le a_n \le b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Jsou-li $\{s_n\}, \{t_n\}$ posloupnosti částečných součtů posloupností $\{a_n\}$, resp. $\{b_n\}$, pak $s_n \le t_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a tedy $\lim s_n \le \lim t_n$. Z věty o zachovávání uspořádání limitami plynou ihned obě tvrzení. ◇

DŮSLEDEK. Nechť $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže existují kladná čísla k, K tak, že $kb_n \le a_n \le Kb_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

2. Jestliže existuje kladná vlastní limita $\lim \frac{a_n}{b_n}$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Důkaz. Tvrzení 1 vyplývá ze srovnávacího kritéria a z jednoduchého faktu, že pro kladné číslo p konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} px_n$.

Jestliže v tvrzení 2 je $\lim(a_n/b_n) = r > 0$, pak pro skoro všechna n je $(r/2)\, b_n \le a_n \le (2r)\, b_n$ a jsou splněny podmínky tvrzení 1. $\diamond$

Tvrzení 2 se nazývá limitní tvar tvrzení 1 a snadno z něho vyplývá.

Tvrzení 1 je však obecnější, protože se může stát, že jeho podmínky jsou splněny, ale $\lim(a_n/b_n)$ neexistuje.

Ověření podmínky tvrzení 2 bývá však jednodušší.

Podobně je tomu v následujících kritériích.

Limitní tvary budou uváděny bez důkazů, neboť jsou obdobné předchozímu důkazu.

Příklady 2a

VĚTA. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Nechť $a_n \ge 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \le q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ pro skoro všechna n, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. První část tvrzení vyplývá ze srovnávacího kritéria srovnáním s geometrickou řadou $\{q^n\}$, která konverguje právě pro $|q| < 1$. Podmínka druhé části znamená, že nemůže být $\lim a_n = 0$. $\diamond$

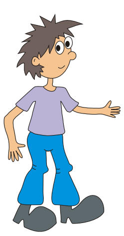
DŮSLEDEK. (Limitní tvar) Nechť $a_n \ge 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

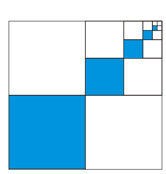
Jde o to, kdy je řada „menší" než geometrická. V těch případech „funguje" odmocninové kritérium.

Myslí se to doopravdy. Pokud řada není „menší" než geometrická, nemůže odmocninové kritérium fungovat.



Ustupuji hrubému násilí.

Následující obrázek ukazuje, jak pěkně konverguje geometrická řada.



$$\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ \dots\ = \frac{1}{3}$$

Takhle konverguje každá geometrická řada.

Příklady 2b

VĚTA. (d'Alembertovo podílové kritérium) Nechť $a_n > 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro skoro všechna n, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Lze předpokládat, že podmínky tvrzení platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak z podmínky v prvním tvrzení vyplývá nerovnost $a_{n+1} \leq q^n a_1$ pro všechna n a tvrzení vyplývá ze srovnání s geometrickou řadou $\{q^n\}$, která konverguje právě pro $|q| < 1$. Podmínka druhé části znamená, že nemůže být $\lim a_n = 0$. $\diamond$

DŮSLEDEK. (**Limitní tvar**) Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Zase opakuji. Pokud řada není „menší" než geometrická, nemůže podílové kritérium fungovat.

Může nemůže, tak teda nemůže. Jsem tvárný objekt.

Příklady 2c

Předchozí věty mají následující jednoduchý ale důležitý důsledek pro limity posloupností:

DŮSLEDEK.

(a) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \le q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$).

(b) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$).

Příklady 2d

Následující jednoduché kritérium se používá pro některé důležité řady, pro které nelze použít podílové nebo odmocninové kritérium.

Pro většinu těchto řad lze výhodněji použít tzv. integrální kritérium, které však v tuto chvíli nemůže být k dispozici.

VĚTA. (**Kondenzační kritérium**) Nechť $\{a_n\}$ je monotónní.

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.

Důkaz. Nechť $a_n \ge a_{n+1} \ge 0$ pro všechna n. Porovnávají se řady

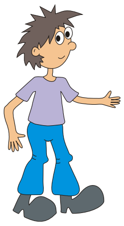
$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & (a_2 + a_3) & + & (a_4 + \cdots + a_7) & + & (a_8 + \cdots + a_{15}) & + \cdots \\ a_1 & + & (a_2 + a_2) & + & (a_4 + \cdots + a_4) & + & (a_8 + \cdots + a_8) & + \cdots \end{array}$$

a je zřejmé, že první řada má všechny součty v závorkách nejvýše rovny příslušným součtům druhé řady.

Pro opačnou nerovnost se porovnají řady

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & (a_2 + a_3) & + & (a_4 + \cdots + a_7) & + & (a_8 + \cdots + a_{15}) & + \cdots \\ a_2 & + & (a_4 + a_4) & + & (a_8 + \cdots + a_8) & + & (a_{16} + \cdots + a_{16}) & + \cdots , \end{array}$$

kde druhá řada vznikne z $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ vynecháním prvního členu a vydělením řady dvěma. Je opět zřejmé, že druhá řada má všechny součty v závorkách nejvýše rovny příslušným součtům první řady. Ze srovnávacího kritéria nyní plyne dokazované tvrzení. $\diamond$



Kritérium asi vymyslel pan Harmon na harmonickou řadu.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 Cvičení 2

Konvergence řad s proměnnými znaménky

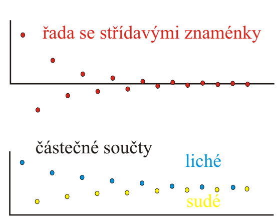
Jestliže se mění v řadě znaménka, bývá těžší rozhodnout o konvergenci.

Nejjednodušší případ je ten, kde se znaménka mění pravidelně po každé změně indexu.

Ale ani v tomto případě to nemusí být jednoduché, kromě následující situace:

VĚTA. (Leibniz) Nechť $\{a_n\}$ je monotónní a $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Důkaz. Nechť $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ pro všechna n. Podposloupnosti částečných součtů $\{s_{2n}\}, \{s_{2n-1}\}$ jsou monotónní (první je neklesající a druhá nerostoucí) a mají tedy limity s, resp. t. Pak $s - t = \lim(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim a_{2n} = 0$. $\diamond$



Příklady 3a

Jediná jednodušší kritéria pro obecnější případ jsou Dirichletovo kritérium a Abelovo kritérium.

Jde o jakási součinová kritéria.

VĚTA. Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jestliže $\{a_n\}$ je monotónní a buď

(a) $\lim a_n = 0$, $\{b_n\}$ má omezené částečné součty (**Dirichlet**)

nebo

(b) $\{a_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (**Abel**),

Kdo zapomene na monotonii, bude za šaška

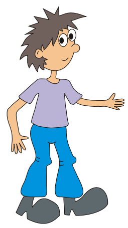
Důkaz. K důkazu se použije Bolzanova–Cauchyova podmínka, tj., je nutné odhadnout $|a_n b_n + \cdots + a_m b_m|$. Lze předpokládat, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Částečné součty posloupností $\{b_n\}$ budou označeny t_n. Nechť n je pevně zvoleno a $m > n$ je libovolné. Pro $k \geq n$ se označí $t'_k = t_k - t_{n-1}$ $(= b_n + \cdots + b_k)$, $t'_{n-1} = 0$. Lze psát

$$
\begin{aligned}
a_n b_n + \cdots + a_m b_m &= a_n(t_n - t_{n-1}) + a_{n+1}(t_{n+1} - t_{n+2}) + \cdots + a_m(t_m - t_{m-1}) \\
&= -a_n t_{n-1} + (a_n - a_{n+1})t_n + \cdots + (a_{m-1} - a_m)t_{m-1} + a_m t_m \,.
\end{aligned}
$$

Je-li posloupnost $\{|t_n|\}$ omezená číslem K, leží poslední výraz v intervalu $[-2a_nK, 2a_nK]$ (neboť rozdíly v závorkách jsou nezáporné), takže se blíží k 0 s rostoucím n, jestliže $\lim a_n = 0$.

Místo t_i lze všude v uvedených rovnostech psát t'_i. V případě (b) je nyní posloupnost $\{|a_n|\}$ omezená nějakým číslem K a čísla t'_i jsou libovolně malá s rostoucím n, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Proto leží opět poslední výraz v libovolně malém okolí 0. $\diamond$

Používá se ďábelský trik, kterému se říká Abelova parciální sumace.



Mohu mít jednoduchý dotaz: Ta věta platí?

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 Cvičení 3

Absolutní konvergence

DEFINICE. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.

Co znamená nekonverguje neabsolutně?

Příklady 4

Jak název napovídá, absolutní konvergence by měla znamenat více než jen konvergence. To potvrzuje tvrzení:

VĚTA. Absolutně konvergentní řada konverguje. Navíc konverguje ke stejnému číslu i po libovolném přerovnání.

Důkaz. Protože pro každé n je $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$, plyne z konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ a (odečtením) i konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Nechť ϕ je nějaká permutace množiny $\mathbb{N}$.

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$.

Dále existuje $n_1 \ge n_0$ takové, že je-li $1 \le n \le n_0$, existuje $1 \le i \le n_1$ s vlastností $\phi(i) = n$.

Potom je pro každé $k > n_1$

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_{\phi(n)} \right| \le \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon \,,$$

což implikuje rovnost $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$. $\diamond$

Protože řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je řada s neměnícími se znaménky, pro absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ platí všechna kritéria uvedená v části o řadách s neměnícími znaménky, jen je nutné místo a_n psát $|a_n|$.

Tedy např., jestliže existuje $q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Druhá část v předchozím tvrzení charakterizuje absolutní konvergenci:

Jestliže řada konverguje i po libovolném přerovnání (není nutné požadovat, že ke stejnému číslu), pak řada konverguje absolutně.

Platí totiž následující tvrzení, jehož důkaz bude jen naznačen pro speciální řadu (obecné podrobnosti jsou v Otázkách).

VĚTA. Nechť řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.

Pak pro každé $p \in \mathbb{R}^*$ existuje prosté zobrazení φ množiny $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = p$ a existuje takové φ, že přerovnaná řada osciluje.

Když konverguje neabsolutně, tak kladná část má nekonečný součet, záporná také, ale dohromady se tyto součty „skoro ruší". Tak jde brát nějakou dobu jenom kladné členy, pak jenom záporné, a tak dále až z té řady uděláme pokorného služebníčka.

Důkaz. Důkaz bude proveden pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Z divergence harmonické řady vyplývá, že obě řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$ konvergují k $+\infty$.

Teď si začneme s tou řadou hrát:

Nechť $p \in \mathbb{R}$. Existuje nejmenší index k_1 takový, že součet $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_2 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) < p$.

Opět lze najít nejmenší index k_3 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) > p$ a nejmenší index k_4 tak, že $\sum_{i=1}^{k_1} 1/(2n-1) - \sum_{i=1}^{k_2} 1/(2n) + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} 1/(2n-1) - \sum_{i=k_2+1}^{k_4} 1/(2n) < p$.

Tyto indexy existují z důvodu divergence řad $\sum 1/(2n)$ a $\sum 1/(2n-1)$ k $+\infty$.

Takto lze pokračovat dále.

Rozdíly součtů od čísla p se budou stále zmenšovat (protože $\lim a_n = 0$) a výsledná následující řada (kde x_i je bud $1/(2i)$ nebo $1/(2i-1)$ podle toho, je-li m sudé či liché a $k_0 = 0$) má tedy součet p:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-1} \Big(\sum_{i=k_m+1}^{k_{m+1}} x_i \Big) = p\,.$$

Tato řada vznikla z původní přeházením pořadí indexů, tj., zobrazení ϕ z tvrzení je dáno následovně:

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= 2n-1 \text{ pro } 1 \le n \le k_1, \\
\phi(n) &= 2(n-k_1) \text{ pro } k_1+1 \le n \le k_1+k_2, \\
\phi(n) &= 2(n-k_2)-1 \text{ pro } k_1+k_2+1 \le n \le k_1+k_2+k_3, \\
\phi(n) &= 2(n-k_1-k_3) \text{ pro } k_1+k_2+k_3+1 \le n \le k_1+k_2+k_3+k_4
\end{aligned}$$

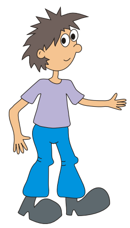
a podobně dále.

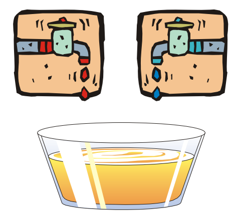
Už jenom kousek:

Pro $p = +\infty$ stačí nacházet nejmenší indexy k_n tak, že příslušné výše uvedené součty místo větší nebo menší než dřívější číslo p budou větší než n pro lichá n a menší než n pro sudá n.

Aby výsledná řada oscilovala, stačí nacházet nejmenší indexy k_n tak, aby příslušné výše uvedené součty místo větší nebo menší než dřívější číslo p byly větší než 1 pro lichá n a menší než -1 pro sudá n. $\diamond$

Dovedete větu dokázat „beze slov"?





Otázky 4 Cvičení 4 Učení 4

ŘADY FUNKCÍ

Před definicí obecné mocniny byla definována bodová konvergence posloupnosti funkcí a podobně lze definovat součet řady funkcí:

DEFINICE. Říkáme, že řada funkcí $\sum f_n$ konverguje (bodově) na množině $A \subset \mathbb{R}$ k funkci f, jestliže pro každé $x \in A$ konverguje řada čísel $\sum f_n(x)$ k číslu $f(x)$ (symbol $\sum f_n = f$).

Speciálním případem řady funkcí jsou tzv. mocninné řady (funkce f_n je násobek n-té mocniny, tj. $f_n(x) = a_n x^n$).

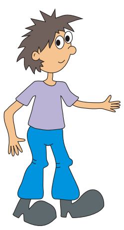
Teorie těchto řad bude probírána později, ale je vhodné se nyní zabývat nejdůležitějším speciálním případem mocninných řad, a to jsou Taylorovy řady.

Taylorovy řady vznikají z Taylorových polynomů prodloužením jejich stupňů až do nekonečna.

DEFINICE. Taylorova řada funkce f v bodě a je řada funkcí (mocnin)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Ten vzoreček se mi moc líbí.



AHA.

Taylorovy polynomy funkce $e^{-x^{-2}}$ v bodě 0 jsou nulové a tedy konvergují k 0 na $\mathbb{R}$ (viz *Příklady 7* v kapitole o použití derivací); tato limita nemá s původní funkcí vlastně nic společného.

Žádoucí tedy není pouhá konvergence Taylorových řad, ale jejich konvergence ke zdrojové funkci.

Pro důkaz následujícího tvrzení si stačí uvědomit definici Taylorova zbytku a definici konvergence řad.

VĚTA. Taylorova řada funkce f konverguje k f v bodě x právě když $\lim_n R_n(x) = 0$, kde $R_n(x)$ je příslušný n-tý zbytek Taylorova polynomu funkce f v bodě a.

Předcházející věta bude nyní použita na několik základních funkcí.

Taylorovy polynomy následujících funkcí spolu s určením příslušného zbytku byly probrány v *Příkladech 7* v kapitole o použití derivací.

Nejdříve je vždy uveden rozklad funkce na její Taylorův polynom a zbytek a potom je uvedeno tvrzení, pro které body zbytek konverguje k 0 a tedy pro které body Taylorova řada konverguje k dané funkci.

Taylorovy řady budou sestrojovány v bodě 0, takže slova „v bodě a" budou vynechána.

Exponenciální funkce

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

VĚTA. Taylorova řada funkce e^x konverguje k e^x na $\mathbb{R}$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Z důsledku podílového kritéria pro limity posloupností plyne, že pro všechna x je $\lim_{n\to\infty} e^{c_n} x^{n+1}/(n+2)! = 0$, protože

$$0 \le \frac{e^{c_{n+1}} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{e^{c_n} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \le \frac{K}{n+2}\,,$$

kde K je větší než všechna čísla $x \cdot e^{c_{n+1} - c_n}$ a tedy např. číslo $x \cdot e^{2|x|}$. $\diamond$

Poznámky 5

Goniometrické funkce

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

VĚTA. Taylorovy řady funkcí $\sin x, \cos x$ konvergují na $\mathbb{R}$ k těmto funkcím a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Postup důkazu je stejný jako u exponenciální funkce. ◇

Poznámky 6

Logaritmická funkce

$$\lg(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\left(\text{popř. } (-1)^n \frac{x(x-c)^n}{(1+c)^{n+1}}\right)$$

pro nějaké c mezi 0 a x, kde $x > -1$.

VĚTA. Taylorova řada funkce $\lg(x+1)$ konverguje k $\lg(x+1)$ na $(-1,1]$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k} = \lg(x+1), \quad x \in (-1,1]\,.$$

Důkaz. Je zřejmé, že musí být $x+1>0$ a že pro $x>1$ řada diverguje. Pro $0 \le x \le 1$ lze snadno shora odhadnout absolutní hodnotu Langrangeova tvaru zbytku číslem $1/(n+1)$ a tedy pro tato x rovnost v tvrzení platí. Pro $-1 < x < 0$ je výhodnější použít důsledek odmocninového kritéria pro limity funkcí a Cauchyova tvaru zbytku:

$$\sqrt[n]{\frac{|x(x-c_n)^n|}{(1+c_n)^{n+1}}} \le \sqrt[n]{|x|}\frac{c_n - x}{1+c_n} \le |x|\sqrt[n]{|x|} < |x| < 1\,.$$

◇

Binomický rozvoj

$$(1+x)^p =$$
$$1 + px + \tfrac{p(p-1)}{2}x^2 + \cdots \tfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + R_n(x) =$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}x^k + p(p-1)\ldots(p-n)(1+c)^{p-n-1}\frac{x(x-c)^n}{n!}\,,$$

pro $x > -1$, c mezi 0 a x (kde $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$).

VĚTA. Taylorova řada funkce $(1+x)^p$, kde $p \in \mathbb{R}$, konverguje k $(1+x)^p$ na intervalu $(-1,1)$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}x^k = (1+x)^p, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Důkaz. Nechť $|x| < 1$. Uvedený zbytek lze přepsat do tvaru $\frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{n!}(1+c)^{p-1}x^{n+1}\left(\frac{1-c/x}{1+c}\right)^n$. Protože funkce t^{p-1} proměnné t je monotónní, je $(1+c)^{p-1}$ omezená číslem $\max(1,(1+x)^{p-1})$. Zlomek $\frac{1-c/x}{1+c}$ leží v intervalu $(0,1)$ (dokažte). Odtud vyplývá odhad

$$|R_n(x)| \le \max(1,(1+x)^{p-1}) \cdot |x|^{n+1}\left|\frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{n!}\right|$$

a pomocí důsledku podílového kritéria pro limity funkcí konverguje pravá strana k 0 (podíly a_{n+1}/a_n konvergují k $|x|$). ◇

Speciálně pro $p = 1/2$ a $p = -1/2$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

První tři členy nebo NIC!

Poznámky 7 Příklady 7

POZNÁMKY

Poznámky 1:

Podobně jako u posloupností nemusí ani řady začínat od indexu 1, ale např. od 13 nebo -7.

Na rozdíl od limity posloupnosti a od sčítání konečně mnoha čísel ale u sčítání nekonečných posloupností záleží na pořadí i na uzávorkování (viz Otázky).

Přeházení řady (neboli změna pořadí sčítání, neboli permutace řady) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nová řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$, kde ϕ je prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na sebe (tj., permutace $\mathbb{N}$).

Posloupnost částečných součtů této nové řady nemá mnoho společného s posloupností částečných součtů původní řady.

Uzávorkování (neboli seskupení) řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ znamená přeměnu na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde každé b_n je součet konečně mnoha po sobě jdoucích prvků a_i a každé a_i se vyskytne jen jednou, tj. existuje rostoucí posloupnost $\{k_n\}$ přirozených čísel začínající s $k_1 = 1$ a pak $b_n = a_{k_n} + \cdots + a_{k_{n+1}-1}$.

Je snadno vidět, že posloupnost částečných součtů této nové řady je podposloupností posloupnosti částečných součtů původní řady.

Pro konvergenci řad lze používat vlastnosti, které platí skoro všude, protože konvergence řady se nezmění, jestliže se změní, vynechá nebo přidá konečně mnoho členů řady (součet řady se samozřejmě přitom změní).

Konec poznámek 1.

Poznámky 2:

Nerovnosti posloupností lze někdy ověřovat pomocí hledání extrémů funkcí.

Má-li se ukázat, že $f(n) \le g(n)$ pro skoro všechna n, stačí ukázat, že minimum funkce $g - f$ je nezáporné na nějakém okolí $+\infty$.

Je nutné si uvědomit, že ani odmocninové ani podílové kritérium není ekvivalence.

Limitní tvary kritérií jsou slabší než jejich nelimitní formulace nejen proto, že uvedené limity nemusí existovat.

Limitní tvary odmocninového a podílového kritéria neříkají nic o případu, kdy se limita rovná 1. Mohou nastat všechny možné případy.

Podílové kritérium je slabší mež odmocninové, tj., je-li možné použít podílové kritérium, je možné použít i odmocninové kritérium (opačně to neplatí).

Přesto se podílové kritérium často používá, protože bývá v některých případech jednodušší (např. obsahují-li výrazy faktoriály).

Existují i jiná kritéria. Jsou vetšinou šikovným přeformulováním srovnávacího kritéria. Povím trochu o trochu zajímavostí:

*Jak se nové kritérium vymýšlí? Jednoduše. Vezmete si libovolnou pěknou (šílenou) konvergentní řadu s nezápornými znaménky a vyjádříte srovnávací kritérium spočívající ve srovnání neznámé řady se zvolenou pěknou. Tak dostanete nové kritérium.

Jedním z nejznámějších je kriterium Raabeho.

To si sami někde najdete. Když se sem napíše, tak se jenom definitivně popletete. Ono je opravdu jako stvořené k popletení všeho ;-)

***Super-kritérium**

Nechť pro řadu kladných čísel x_n existují konstanty a, b, omezená posloupnost c_n a kladné ε tak, že platí

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = a + \frac{b}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} ,$$

kde $|c_n| \leq c$, $\varepsilon > 0$.

Pak

- Pokud $a > 1$ řada konverguje.
- Pokud $a < 1$ řada diverguje.
- Pokud $a = 1$ & $b > 1$ řada konverguje.
- Pokud $a = 1$ & $b \leq 1$ řada diverguje.

Vymyslel to pan Gauss a je to silnější než D'Alembertovo i Raabeho kritérium. Musela jsem to vyslepičit . . .

Konec poznámek 2.

Poznámky 3:

U Leibnizova kritéria (i Dirichletova a Abelova) se nesmí zapomenout ověřit monotónnost (viz předpoklady).

Dirichletovo kritérium se výhodně používá u řad, jejichž n-člen obsahuje násobek $\sin(nx)$.

Konec poznámek 3.

Poznámky 4:

Konec poznámek 4.

Poznámky 5:

V některých učebnicích se exponenciální funkce e^x definuje pomocí právě sestrojené řady. Pak je nutné pomocí této definice udělat průběh této funkce. K tomu je potřeba některých dalších tvrzení o spojitosti součtu mocninné řady a o její derivaci.

Obdobně, jako v tomto textu, se definuje přirozený logaritmus (inverzní funkce k e^x) a poté obecná mocnina vzorcem $a^x = e^{x \lg a}$.

Exponenciální funkci lze definovat i pomocí funkcionálních rovnic:

Exponenciála je jediná funkce f na $\mathbb{R}$, pro kterou platí $f(x+y) = f(x)f(y)$ a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.

Jednoznačnost se dokáže snadno, zbývá ukázat existenci: funkce definovaná jako součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ má uvedené vlastnosti.

Konec poznámek 5.

Poznámky 6:

Na tomto místě lze uvést podobnou poznámku jako u exponenciální funkce. Funkci $\sin x$ lze definovat na $\mathbb{R}$ součtem řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

Tato funkce řeší funkcionální rovnosti, pomocí kterých se někdy funkce sinus definuje.

Konec poznámek 6.

Poznámky 7:

V krajních bodech intervalu konvergence $-1, 1$ může i nemusí pro některá p uvedená Taylorova řada k mocnině konvergovat.

V případě $p = 1/2$ řada k $\sqrt{x+1}$ konverguje i v krajních bodech, pro $p = -1/2$ konverguje v pravém bodě 1 a nekonverguje v levém bodě -1.

Konec poznámek 7.

Poznámky 8:

Konec poznámek 8.

PŘÍKLADY

Příklady 1:

Řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$, kde $q \in \mathbb{R}$, se nazývá *geometrická řada*.

Její částečné součty jsou

$$\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1} \text{ pro } q \neq 1, \quad \sum_{n=1}^{k} q^n = n \text{ pro } q = 1\,.$$

Z toho vyplývá, že geometrická řada konverguje právě když $|q| < 1$ a její součet je pak roven $1/(q-1)$.

Je-li $q \geq 1$, tak geometrická řada konverguje k $+\infty$, je-li $q \leq -1$, řada osciluje.

V řadě $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ lze její členy rozložit, takže částečné součty lze spočítat:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{k+1} \,.$$

takže tato řada konverguje k součtu 1.

Viděli jste to? Tomu se říká teleskopická hračka.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{k} (-1)^n$ osciluje.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá *harmonická řada*. Její součet je $+\infty$, neboť

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \,. \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že podposloupnost $\{s_{2^n}\}$ posloupnosti částečných součtů konverguje k $+\infty$.

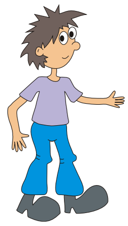
Protože s_{n+1} vznikne z s_n přidáním kladného čísla $1/(n+1)$, je posloupnost částečných součtů rostoucí a má stejnou limitu jako její libovolná podposloupnost, tedy $+\infty$.

Konec příkladů 1.

Příklady 2a:

Protože $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ pro všechna přirozená n a řada prvků na pravé straně konverguje (k 1), konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (k číslu menšímu než 2).

Klidně si to zapamatujte.



Jo.

Pro $p \in \mathbb{R}, p \geq 2$ je $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ a tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje pro $p \geq 2$.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ diverguje protože harmonická řada diverguje a

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}} = 1\,.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{n^3}$ konverguje, protože $\frac{\lg n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ pro skoro všechna n.

Konec příkladů 2a.

Příklady 2b:

Řada $\sum \frac{n}{(2-1/n)^n}$ konverguje,

protože má nezáporné členy a

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n}{(2-1/n)^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

U řady $\sum \frac{1}{(1-1/n^2)^n}$ selhává limitní varianta odmocninového kritéria (limita je rovna 1),

ale

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(1-\frac{1}{n^2})^n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} \geq 1$$

pro všechna n a tedy řada diverguje.

Konec příkladů 2b.

Příklady 2c:

U následujících dvou příkladů by bylo použití odmocninového kritéria složité, ale podílové kritérium se dá použít snadno.

Nechť $a > 0$. Řada $\sum_n \frac{a^n}{n!}$ konverguje, protože

$$\lim_n \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \lim_n \frac{a}{n+1} = 0\,.$$

Řada $\sum \frac{n!}{n^n}$ konverguje,

protože

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \lim_n \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_n \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

Konec příkladů 2c.

Příklady 2d:

Dokažte pomocí důsledků odmocninového a podílového kritéria následující limity:

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty, \quad \lim_n \frac{n}{(2-1/n)^n} = 0\,.$$

Konec příkladů 2d.

Příklady 2:

Ověřte, že odmocninové (a tedy i podílové) kritérium neřekne nic o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pro $p > 0$.

Kondenzační kritérium však hledaný výsledek dá:

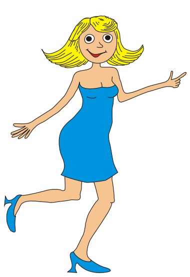
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$, tj. geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-p)}$ a ta konverguje právě když $2^{1-p} < 1$, tedy právě když $p > 1$.

Ukažte pomocí kondenzačního kritéria, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \lg n}$ diverguje.

Konec příkladů 2.

Příklady 3:

Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ konverguje pro libovolné reálné x a $p > 0$.



Návod: použijte Dirichletovo kritérium.

Konec příkladů 3.

Příklady 3a:

Ukažte, že lze použít Leibnizovo kritérium na řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ pro $p > 0$ a výsledkem je konvergence.

Jaká je situace pro ostatní hodnoty p?

Ukažte, že lze použít Leibnizovo kritérium na řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ pro $p > 0$ a výsledkem je konvergence.

Konec příkladů 3a.

Příklady 4:

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje neabsolutně, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje absolutně.

Pro která reálná p konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ absolutně a pro která neabsolutně?

Konec příkladů 4.

Příklady 5:

Konec příkladů 5.

Příklady 6:

Konec příkladů 6.

Příklady 7:

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro cyklometrické funkce:

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Dá se ukázat, že uvedené konvergence platí v uzavřeném intervalu $[-1, 1]$.

Protože $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, lze spočítat číslo π jako součet řady $4 \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.

Tato řada však konverguje pomalu.

Lepší konvergence se získá z rovnice $\pi/6 = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})$, kde navíc není nutné použít krajní bod intervalu konvergence.

Dokažte následující konvergenci Taylorových řad pro hyperbolické funkce.

Hyperbolický sinus $\sinh x$ je definován jako $(e^x - e^{-x})/2$ a hyperbolický kosinus $\cosh x$ jako $(e^x + e^{-x})/2$.

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Konec příkladů 7.

Příklady 8:

Konec příkladů 8.

OTÁZKY

Otázky 1:

Ukažte, že změna konečně mnoho členů řady nemá vliv na konvergenci řady (ale samozřejmě může mít vliv na součet řady).

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když $\lim_k \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.

Dokažte, že seskupíme-li jakkoli konvergentní řadu, bude výsledná řada mít stejný součet jako původní řada. Může se předpokládat, že původní řada konverguje k nevlastnímu číslu?

Najděte příklad řady, která osciluje a po nějakém uzávorkování konverguje k vlastnímu (nevlastnímu) číslu.

Najděte příklad konvergentní řady po jejímž přerovnání nová řada osciluje.

Uvědomte si příklady divergentních řad, jejichž členy konvergují k 0.

Konec otázek 1.

Otázky 2:

Ukažte, že řadu, jejíž prvky mají skoro stejná znaménka, lze libovolně přeházet nebo seskupit (uzávorkovat) aniž se změní její konvergence a součet.

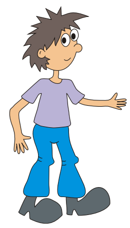
Najděte příklad konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro níž neexistuje $q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$.

Najděte příklad konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro níž $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$.

A teď trochu kritériové alchymie:

*Dokažte, že podílové kritérium je slabší než odmocninové kritérium. To znamená, že pokud něco konverguje díky podílovému kritériu, pak konverguje i podle odmocninového.

To je velmi podstatná informace!!!



Existuje nějaké nejsilnější? Asi ne ...

Nikdy neříkej všechno, co znáš. BTW, je důležitější to vědět, nebo na to přijít?

Konec otázek 2.

Otázky 3:

Ukažte, že Leibnizovo kritérium je speciální případ Dirichletova kritéria.

Leibnizovo kritérium může mít následující formulaci: Je-li $\{a_n\}$ monotónní posloupnost, pak řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ konverguje právě když $\lim a_n = 0$.

Dokažte, že je-li $\{a_n\}$ monotónní omezená posloupnost s nenulovou limitou, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Konec otázek 3.

Otázky 4:

A teď pro zájemce jedna stěžejní myšlenka:

*Ukažte, že jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

Na základě předchozího tvrzení dokažte poslední větu, že neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat tak, aby konvergovala k libovolnému danému číslu nebo aby oscilovala.

Že jsem jenom tak nemluvila do větru? Já su chytrá :-)

Konec otázek 4.

Otázky 5:

Konec otázek 5.

Otázky 6:

Konec otázek 6.

Otázky 7:

Konec otázek 7.

Otázky 8:

Konec otázek 8.

CVIČENÍ

Cvičení 1:

Řady jsou v podstatě nekonečné součty uvažované ve smyslu limit.

Sčítáme-li prvky nějaké posloupnosti, musí její prvky konvergovat k nule, aby měla řada rozumný konečný součet.

Ani to však nestačí.

Limitu u posloupnosti vidíme z jejího grafu zpravidla na první pohled. Zpravidla stačí člen s indexem 100. U řady jsme v koncích (není snadné sečíst prvních 100 členů, a ani pak si nejsme jisti, co bude dál).

U řady jsou sčítance maličká čísílka. Na nich není nic ke koukání.

U řad s kladnými členy se vyplatí následující zjednodušující pohled:
Řada má sčítance

- nesmyslně obrovské (například $1 + 1 + 1 + \cdots$). Takové řady divergují.
- veliké (například $1/1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$). Takové řady divergují.
- akorát (například $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots$). Takové řady konvergují.
- prťavé (například $1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \cdots$). Takové řady rychle konvergují.

Konec cvičení 1.

Cvičení 2:

Na nesmyslně obrovské řady se používá takzvaná „nutná podmínka konvergence".

Například

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Longrightarrow \sum_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \infty\,.$$

Vyřešilo 8 z 10.

Ta „nutná podmínka konvergence" není na první pohled podezřelá.

Například

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = 1 \implies \sum_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \infty \,.$$

Při počítání limity jsme po úpravě použili

$$1 \le \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \le \sqrt[n]{e} \to 1,\ n\to\infty \,.$$

Vyřešili 2 z 10.

Na většinu dalších řad funguje srovnávací kritérium: „větší řada má větší součet".

Nejčastěji při zkoumání $\sum a_n$ spočítáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

pro šikovnou (známou) řadu $\sum b_n$ a máme vyhráno.

Tak je užitečné „znát" co nejvíce řad. Dovolte abych je představil:

$$\sum \frac{1}{n} = \infty \,, \sum \frac{1}{n+5} = \infty \,, \sum \frac{1}{3n-1} = \infty \,, \sum \frac{n}{n^2+2} = \infty \,.$$

$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty \,, \sum \frac{1}{n^2+5} < \infty \,, \sum \frac{1}{3n^2-1} < \infty \,, \sum \frac{n}{n^3+2} < \infty \,.$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty\,, \sum \frac{1}{\sqrt{n}+5} = \infty\,, \sum \frac{1}{3\sqrt{n}-1} = \infty\,, \sum \frac{\sqrt{n}}{n+2} = \infty\,.$$

Nikdy nezapomeňte, že $\sum 1/n^\alpha$ konverguje právě když $\alpha > 1$.

Spočtěte, pro které hodnoty kladných parametrů a, b konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^b (n+b)^a}\,.$$

Jde o srovnání s $\sum 1/n^{a+b}$.

Vyřešili 3 z 10.

Pro konvergenci řady s prťavými členy se s výhodou použije podílové nebo odmocninové kritérium.

Dokažte, že konverguje

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)} .$$

Zde použijeme odmocninové kritérium.

Vyřešili 4 z 10.

Pokud odmocninové či podílové kritérium dá v limitě 1, nejde o prťavou řadu a nic nevíme.

Pro $\sum 1/n$ například dostaneme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

a (jak již víme) divergentní $\sum 1/n$ není prťavá. Stejnou jedničku dostaneme pro konvergentní $\sum 1/n^2$.

Kdo čte důkazy, ví, že podílové i odmocninové kritérium potřebuje majorantní geometrickou řadu $\sum q^n$ s pevným q.

Když z principu řada není menší než $\sum q^n$, je použitelné podílové či odmocninové kritérium pouze pro „divergenci".

Ještě jednou: $\sqrt[n]{a_n} < 1$ ani $a_{n+1}/a_n < 1$ nestačí.

V písemce použije špatně podílové či odmocninové kritérium 30% populace.

Konec cvičení 2.

Cvičení 3:

Pro řady, které nemají pouze kladné členy zkoumáme někdy řadu absolutních hodnot. Pokud tato konverguje, pak konverguje původní řada také.

Například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ konverguje .}$$

Často však zkoumáme konvergenci řady, kde kladná část i záporná část diverguje. V tom případě nejde o absolutní konvergenci a máme s tím dost práce.

Nejjednodušší jsou řady se střídavými znaménky a klesající absolutní hodnotou členů.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konverguje podle Leibnitzova kritéria.}$$

Je třeba ověřit monotonii, tedy $1/(n+1) < 1/n$, což v tomto případě bylo snadné. Jindy s tím může být problém.

Na řadu řad s kladnými i zápornými členy lze použít Dirichletovo kritérium.

Potřebujeme znát, které řady mají „omezenou posloupnost částečných součtů".

Následující řady mají omezené posloupnosti částečných součtů

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \tag{1}$$
$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx \tag{2}$$
$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx \ , \ \text{pokud nejde o řadu jedniček} \tag{3}$$
$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \sin^2 n \ , \tag{4}$$
$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos^2 n \ , \tag{5}$$
$$\sum_{n=1}^{N} \sin n \sin n^2 \ . \tag{6}$$

Dokáže se indukcí pomocí „součtových vzorečků" pro funkce sinus a kosinus.

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} \ .$$

Řešení. Použijeme vzoreček $\sin^2 n = (1 - \cos 2n)/2$ a dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n} \ .$$

Zde je na pravé straně součet divergentní a konvergentní řady, tedy řada vlevo není konvergentní podle věty o součtu řad.

Spočetli 2 z 10.

Důležitým a velmi užitečným kritériem je Abelovo kritérium.

Konvergentní krát monotonní omezená je konvergentní, co jiného si přát.

Tedy potřebujeme vědět, co je monotónní.

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+5}, 1+\frac{1}{n+5}, \frac{n+6}{n+5}, \frac{n+5}{n+6}$$
$$2+\frac{1}{n+5}, \frac{2n+11}{n+5}$$
$$n-\frac{1}{n+5}, \frac{n^2+5n-1}{n+5}$$

Při opakovaném použití Abelova kritéria stačí, aby byly jednotlivé faktory monotónní (a omezené), což je šikovné:

$$\frac{3n+2}{2n+3} = \frac{3n+2}{3n} \frac{2n}{2n+3} \frac{3}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{2+e^{-n}}{3+\sin(1/n)} \frac{2-e^{-n}}{3-\sin(1/n)} \frac{2+\cos(1/n)}{2-\cos(1/n)}$$

konverguje díky monotonii a omezenosti jednotlivých činitelů vpravo od prvního zlomku.

Monotonii někdy získáme známým odmocninovým trikem

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \,.$$

Příklad. Zjistěte konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \,.$$

Řešení. Trikové řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n(n + (-1)^n)} \,.$$

Naše řada se od konvergentní liší o konvergentní, tedy konverguje. Zkusíme i klasickou úpravu:

Příklad. Zjistěte opět konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \,.$$

Řešení. Klasické řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} \cdot \frac{n - (-1)^n}{n - (-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n - (-1)^n (-1)^n}{n^2 - 1} \,.$$

Vpravo jsou dvě konvergentní řady.

Spočetl 1 z 10.

Konec cvičení 3.

Cvičení 4: Příklad. Dokažte tvrzení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty .$$

Řešení. Víme, že

$$|2xy| \le x^2 + y^2 ,$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|2\frac{a_n}{n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{n^2} .$$

Vpravo jsou dvě konvergentní řady, což stačí.

Příklad. Dokažte, že pro kladná čísla a_n platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A .$$

Když se to dokáže, je z toho vidět, zda je silnější podílové nebo odmocninové kritérium. Které?

Když dá podílové například 1/2, dá to taky odmocninové. Ale může se stát, že odmocninové dá 1/2 a podílové nic. Tedy silnější (mocnější) je odmocninové.

Řešení. Píšeme

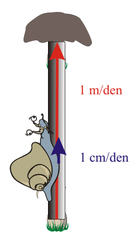
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} \overset{V}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} ,$$

kde $\stackrel{V}{=}$ plyne z nerovnosti mezi harmonickým, geometrickým a aritmetickým průměrem.

Je též možné použít něco jako ε a n_0.

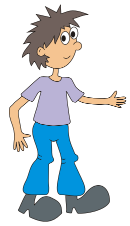
Některé situace vedou na počítání řad. Následující příklady jsou pro pobavení.

Příklad. Představme si pomalého šneka, který leze po rychle rostoucí houbě. Doleze na vršek?



Řešení. Jestli houba roste 100 krát rychleji než šnek leze, tak první den šnek popoleze o jednu setinu výšky houby. Druhý den o jednu dvousetinu a tak dál. Celkem takto sbírá části odpovídající harmonické řadě, která diverguje. Když součet těchto částí překročí jedničku, dosáhne na vršek houby.

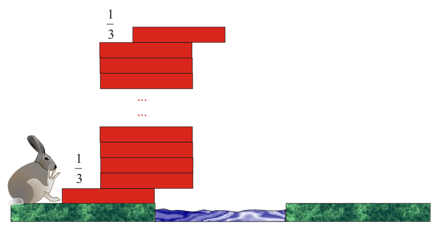
Dobrý hospodský trik.



Dík.

Příklad. Králíci se potřebují dostat přes řeku. Na břehu jsou na sobě postaveny cihly (tvoří vysoký komín s podstavou jedné cihly).

Šikovný králík do každé z nich trochu strčil, vylezl nahoru a spustil se po provaze na druhou stranu řeky. Je to možné ? ANO. Vysvětlete, jak to udělal.

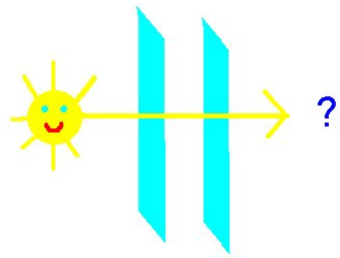


Řešení. Nejvyšší cihla se posune o $1/3$, pak se dalších 1000 cihel nechá bez posunu, až „horních" 1001 cihel má těžiště „téměř" uprostřed 1001-ní cihly odshora. Pak cihlu 1002-hou posuneme o $1/3$. Nyní necháme milion cihel bez posunu ... .

Dobrý hospodský trik s kartama.

Pečlivé počítání „vyvážené vratké stavby" stavěné „odshora" dá harmonickou řadu. Podobně se chovají ozdobné předměty (rybičky , motýlci a pod.) zavěšené u stropu ve „vyváženém stavu".

Příklad. Sluneční paprsky se na špinavém skle rozdělí na třetiny. Jedna projde skrz, druhá se ve skle ztratí a třetí se odrazí. Kolik světla projde přes dvojité (popřípadě trojité či n-ité) okno?



Při pečlivém počítání vyjde pro dvojité okno 1/8, pro trojité okno 1/21 = dost málo. Pro trojité okno jde s výhodou použít výsledku pro dvojité okno na získání rekurentního vztahu.

Nyní prozradím pro otrlé pár kouzel a drobných podvodů.

Vstup jen na vlastní nebezpečí. Je lepší kouzlit sám bez pomoci.

Příklad. Zkoumejte konvergenci řady $\sum \sin nx$.

Řešení. Pro $x = k\pi$ je jasná konvergence. Nechť konverguje pro nějaké $x \neq k\pi$, k celé. Pak platí nutná podmínka $\lim \sin nx = 0$, tedy i $\lim \sin(n+1)x = 0$. Pak podle součtových vzorečků i $\lim(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$, tedy i $\lim \cos nx = 0$ a $\lim(\sin^2 nx + \cos^2 nx) = 0$.

To je ovšem spor s $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Podobně pro $\sum \sin n^2$

Nyní jedna obecná zajímavost:

Posloupnost x_n lze přepsat do tvaru

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1 \ .$$

Tak jde limitu posloupnosti zkoumat pomocí konvergence řady.
Například

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \ = \ 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2} \ .$$

Řada konverguje, tedy posloupnost také.

Další hezký trik:

$$\sum_{n=1} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = \sum_{n=1} (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{n^2+k^2}-n)) = \sum_{n=1} (-1)^n \sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n},$$

což konverguje podle Leibnitzova kritéria.

Zatím jsme nepoužili poznatky z kapitol o limitách funkcí, o derivaci a rozvojích funkcí.

Pro výklad metod a postupů nebyly tyto věci zapotřebí.

V početní praxi však to s výhodou použijeme.

Monotonii posloupnosti budeme zkoumat pomocí zkoumání příslušné funkce. Tedy například místo zkoumání posloupnosti $\log n/n$ zkoumáme funkci $\log x/x$.

Podobně při ověřování podmínek kritérií konvergence budeme pracovat s limitami funkcí místo limit posloupností (pokud to půjde).

Pro srovnávací kritérium použijeme s výhodou Taylorových polynomů.

Například pomocí Taylorových polynomů při rozvoji $(1+x)^\alpha$ dostaneme rozvoj

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{1+p}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right), \ n \to \infty .$$

Nyní vidíme, jak se řada chová a kdy konverguje.

Tedy jde zkoumat pohodlně konvergenci mnohých řad.

Konec cvičení 4.

Cvičení 5:
Konec cvičení 5.

Cvičení 6:
Konec cvičení 6.

Cvičení 7:
Konec cvičení 7.

Cvičení 8:
Konec cvičení 8.

UČENÍ

Učení 1:
Konec učení 1.

Učení 2:
Konec učení 2.

Učení 3:
Konec učení 3.

Učení 4:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (0, \infty)$$

implikuje konvergenci $\sum a_n$.

Cesty do pekel jsou dlážděny dobrými úmysly.

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \Rightarrow a_n < 1 \overset{?}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$

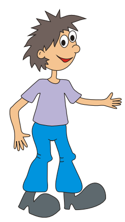
Na to jsem přišel sám.

No comment.

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1 \overset{?}{\Longleftrightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$

Odmocninové kritérium je super.

Kdo neumí, neumí.



Řada absolutně konverguje, pokud střídá znaménka a $|a_n| > |a_{n+1}|$.

10 minut za hrubost.

$$\sum_{n=1}^{N}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \cdots$$

Částečný součet nevidím …

Zkusil jsi teleskop, námořníčku?

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1} \overset{?}{<} (-1)^n\frac{1}{n}$$

. . . a můžeme použít Leibnitze!

Buďto piš nebo mysli, nikdy zároveň.

Konec učení 4.

Učení 5:
Konec učení 5.

Učení 6:
Konec učení 6.

Učení 7:
Konec učení 7.

Učení 8:
Konec učení 8.