$\boxed{\text{Řady}}$

ŘADY ČÍSEL

511

1. limita posloupnosti (operace založená na vzdálenosti bodů)

2. supremum nebo infimum posloupnosti (operace založená na uspořádání bodů).

Z hlavních struktur reálných čísel zbývá použít aritmetické operace. V následující části bude probrán součet posloupnosti.

Součin posloupnosti se nepoužívá často a jeho teorii lze vyvodit z teorie o součtu.

DEFINICE. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, značí symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ její součet, tj. limitu částečných součtů $\lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n)$.

Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se standardně užívá v obecnějším smyslu pro posloupnost $\{a_n\}$, která se má sečíst, a to i v případě, kdy její součet neznáme nebo součet neexistuje. Příslušná posloupnost částečných součtů se často značí $\{s_n\}$, tj. $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

511

konverguje, je-li její součet reálné číslo

diverguje, jestliže její součet neexistuje (pak řada osciluje), nebo

diverguje, jestliže je její součet nevlastní (pak též říkáme, že řada konverguje k $+\infty$ nebo $-\infty$).

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1 1

511

VĚTA. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > m > k$ je

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon .$$

VĚTA. Následující rovnosti platí, pokud mají smysl pravé strany:

$$\begin{aligned} \sum (a_n + b_n) &= \sum a_n + \sum b_n , \\ \sum (k \cdot a_n) &= k \cdot \sum a_n . \end{aligned}$$

511

511

VĚTA. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.

511

Konvergence řad s kladnými (či zápornými) členy

511

VĚTA. Jestliže v řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemění její členy od určitého indexu znaménko, řada vždy konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.

Pro řady z předchozího tvrzení zbývá najít kritéria, která umožní zjistit, zda řada konverguje k vlastnímu nebo k nevlastnímu číslu.

Je zřejmé, že se stačí omezit na řady s nezápornými nebo kladnými členy.

VĚTA. (**Srovnávací kritérium**) Nechť $0 \le a_n \le b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

DŮSLEDEK. Nechť $a_n > 0, b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže existují kladná čísla k, K tak, že $kb_n \le a_n \le Kb_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.
2. Jestliže existuje kladná vlastní limita $\lim \frac{a_n}{b_n}$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Tvrzení 2 se nazývá limitní tvar tvrzení 1 a snadno z něho vyplývá.

Tvrzení 1 je však obecnější, protože se může stát, že jeho podmínky jsou splněny, ale $\lim(a_n/b_n)$ neexistuje.

Podobně je tomu v následujících kritériích.

Limitní tvary budou uváděny bez důkazů, neboť jsou obdobné předchozímu důkazu.

Příklady 2a

VĚTA. (**Cauchyovo odmocninové kritérium**) Nechť $a_n \ge 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \le q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n , pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ pro skoro všechna n, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

DŮSLEDEK. (**Limitní tvar**) Nechť $a_n \ge 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklady 2b

VĚTA. (**d'Alembertovo podílové kritérium**) Nechť $a_n > 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ pro nějaké $q < 1$ a skoro všechna n, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ pro skoro všechna n, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

DŮSLEDEK. (**Limitní tvar**) Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklady 2c

511

DŮSLEDEK.

(a) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \le q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$).

(b) Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ pro skoro všechna n a nějaké $q < 1$, pak $\lim a_n = 0$ (speciálně to platí, jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$).

Příklady 2d

Následující jednoduché kritérium se používá pro některé důležité řady, pro které nelze použít podílové nebo odmocninové kritérium.

VĚTA. (**Kondenzační kritérium**) Nechť $\{a_n\}$ je monotónní.

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2 2

Konvergence řad s proměnnými znaménky

Nejjednodušší případ je ten, kde se znaménka mění pravidelně po každé změně indexu.

VĚTA. (**Leibniz**) Nechť $\{a_n\}$ je monotónní a $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Příklady 3a

Jediná jednodušší kritéria pro obecnější případ jsou Dirichletovo kritérium a Abelovo kritérium.

VĚTA. Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje, jestliže $\{a_n\}$ je monotónní a buď

(a) $\lim a_n = 0$, $\{b_n\}$ má omezené částečné součty (**Dirichlet**)

nebo

(b) $\{a_n\}$ je omezená a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (**Abel**),

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3 3

Absolutní konvergence

DEFINICE. Říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.

Příklady 4

VĚTA. Absolutně konvergentní řada konverguje. Navíc konverguje ke stejnému číslu i po libovolném přerovnání.

Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ je řada s neměnícími se znaménky, pro absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ platí všechna kritéria uvedená v části o řadách s neměnícími znaménky, jen je nutné místo a_n psát $|a_n|$.

Tedy např., jestliže existuje $q < 1$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Jestliže řada konverguje i po libovolném přerovnání (není nutné požadovat, že ke stejnému číslu), pak řada konverguje absolutně.

511

VĚTA. Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje neabsolutně.

Pak pro každé $p \in \mathbb{R}^*$ existuje prosté zobrazení φ množiny $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ takové, že $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = p$ a existuje takové φ, že přerovnaná řada osciluje.

Otázky 4 4 4

ŘADY FUNKCÍ

Před definicí obecné mocniny byla definována bodová konvergence posloupnosti funkcí a podobně lze definovat součet řady funkcí:

DEFINICE. Říkáme, že řada funkcí $\sum f_n$ konverguje (bodově) na množině $A \subset \mathbb{R}$ k funkci f, jestliže pro každé $x \in A$ konverguje řada čísel $\sum f_n(x)$ k číslu $f(x)$ (symbol $\sum f_n = f$).

Speciálním případem řady funkcí jsou tzv. mocninné řady (funkce f_n je násobek n-té mocniny, tj. $f_n(x) = a_n x^n$).

Teorie těchto řad bude probírána později, ale je vhodné se nyní zabývat nejdůležitějším speciálním případem mocninných řad, a to jsou Taylorovy řady.

DEFINICE. Taylorova řada funkce f v bodě a je řada funkcí (mocnin)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Taylorovy polynomy funkce $e^{-x^{-2}}$ v bodě 0 jsou nulové a tedy konvergují k 0 na $\mathbb{R}$ (viz *Příklady 7* v kapitole o použití derivací); tato limita nemá s původní funkcí vlastně nic společného.

511

VĚTA. Taylorova řada funkce f konverguje k f v bodě x právě když $\lim_n R_n(x) = 0$, kde $R_n(x)$ je příslušný n-tý zbytek Taylorova polynomu funkce f v bodě a.

Taylorovy polynomy následujících funkcí spolu s určením příslušného zbytku byly probrány v *Příkladech 7* v kapitole o použití derivací.

Nejdříve je vždy uveden rozklad funkce na její Taylorův polynom a zbytek a potom je uvedeno tvrzení, pro které body zbytek konverguje k 0 a tedy pro které body Taylorova řada konverguje k dané funkci.

Taylorovy řady budou sestrojovány v bodě 0, takže slova „v bodě a" budou vynechána.

Exponenciální funkce

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

VĚTA. Taylorova řada funkce e^x konverguje k e^x na $\mathbb{R}$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámky 5

Goniometrické funkce

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c$$

pro nějaké c mezi 0 a x.

VĚTA. Taylorovy řady funkcí $\sin x, \cos x$ konvergují na $\mathbb{R}$ k těmto funkcím a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámky 6

Logaritmická funkce

$$\lg(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \Big(\text{popř. } (-1)^n \frac{x(x-c)^n}{(1+c)^{n+1}}\Big)$$

pro nějaké c mezi 0 a x, kde $x > -1$.

VĚTA. Taylorova řada funkce $\lg(x+1)$ konverguje k $\lg(x+1)$ na $(-1,1]$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} = \lg(x+1), \quad x \in (-1,1]\,.$$

Binomický rozvoj

$$(1+x)^p =$$
$$1 + px + \tfrac{p(p-1)}{2} x^2 + \cdots \tfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n + R_n(x) =$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} x^k + p(p-1)...(p-n)(1+c)^{p-n-1} \frac{x(x-c)^n}{n!}\,,$$

pro $x > -1$, c mezi 0 a x (kde $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$).

VĚTA. Taylorova řada funkce $(1+x)^p$, kde $p \in \mathbb{R}$, konverguje k $(1+x)^p$ na intervalu $(-1,1)$ a tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{p}{k} x^k = (1+x)^p, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Speciálně pro $p = 1/2$ a $p = -1/2$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k\,, \quad x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad x \in (-1,1)$$

Poznámky 7 Příklady 7