PRIMITIVNÍ FUNKCE

V předchozích částech byly zkoumány derivace funkcí a hlavním tématem byly funkce, které derivace mají. V této kapitole se budou zkoumat funkce, které naopak jsou derivacemi jiných funkcí a budou se hledat metody, jak tyto jiné funkce najít.

Bude hodně metod :-)

Ukazuje se, že operace inverzní k derivování (nazývaná integrování) je velmi důležitá. Jak už její název napovídá, s její pomocí bude možné z jednotlivých drobných informací získat informaci celkovou.

Integrace = zcelování.

Integrál je celník.

Použití integrace v aplikacích je OBROVSKÉ.

Integruji ráda ;-)

DEFINICE A MOTIVACE

Následující termín je historicky vžitý, i když nevyjadřuje příslušnou operaci.

DEFINICE. Funkce F se nazývá primitivní k funkci f na intervalu I, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$.

Pozor na ten interval!!!

Protože derivace jakékoli konstantní funkce je nulová funkce, není primitivní funkce určena jednoznačně, ale skoro jednoznačně.

"Až na konstantu", říkají matematici …

Následující tvrzení plyne z vět o derivacích (viz derivace a spojitost, důsledek věty o střední hodnotě).

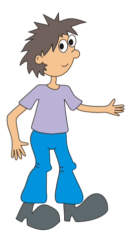
VĚTA. Nechť F je primitivní funkce k f na I. Potom:

1. F je spojitá na I.

2. Pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ primitivní funkce k f na I.
3. Je-li G primitivní funkce k f na I, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že je $G = F + c$.

Pozor opět na ten (jeden!) interval.

Inverzní zobrazení k derivaci tedy není jednoznačné. Nicméně ze znalosti jedné primitivní funkce k f jsou všechny ostatní ihned známé.



"Až na konstantu", říkají matematici …

Pro množinu všech primitivních funkcí k f se používá značení $\int f$, resp. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li třeba zdůraznit proměnnou x.

Znak $\int$ se lidově nazývá "fajfka".

Znak $\int$ se nazývá integrál.

Znak $\int$ se nazývá integrál (přesněji neurčitý integrál na rozdíl od *určitého*, který bude zaveden později) a celé označení $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se čte: integrál funkce f (podle proměnné x). Význam znaku $\mathrm{d}x$ bude objasněn v *Poznámkách*.

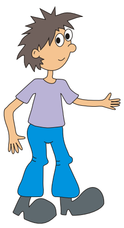
Derivace mají geometrickou interpretaci, popisují tečny ke grafu f. Jak bude vidět z následující části, primitivní funkce popisují velikost plochy pod grafem funkce.

Například plocha pod grafem rychlosti odpovídá dráze a derivace dráhy podle času je rychlost.

Tedy dráha je primitivní funkce k rychlosti.

Jestliže f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$, má na tomto intervalu primitivní funkci F, jak bude ukázáno dále.

Půjde o to, spočítat plochu pod grafem spojité funkce jako limitu …



To bude nářez!!!

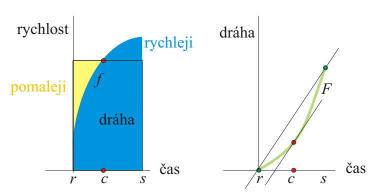
Pro větší názornost nechť spojitá $f \geq 0$ na $[a, b]$. Zvolíme primitivní funkci F k f na $[a, b]$ tak, že $F(a) = 0$.

Podle věty o střední hodnotě použité pro funkci F je pro libovolný interval $[r, s] \subset [a, b]$

$$F(s) - F(r) = f(c)(s - r)$$

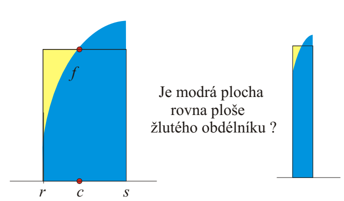
pro nějaké (vhodné) $c \in (r, s)$.

Rozdíl funkčních hodnot F v bodech r, s je tedy roven ploše obdélníku nad intervalem $[r, s]$ s výškou rovnou nějaké hodnotě funkce f na tomto intervalu.



Někdy je rychlost malá, jindy veliká. Já mám ráda rychlost "akorát".

Je-li s velice blízko r, bude i $f(c)$ velice blízko hodnotám $f(r)$, $f(s)$, protože f je spojitá (a uvedený obdélník se nebude příliš lišit od „křivého" obdélníku s jednou stranou zaměněnou za graf f nad $[r, s]$).



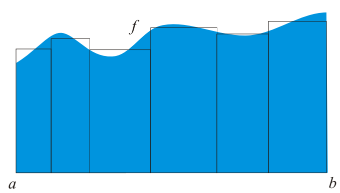
ANO, ale ješte to zatím "nevíme".

Když interval $[a, b]$ rozdělíme na n intervalů body $x_1, ..., x_{n-1}$ a označíme $x_0 = a, x_n = b$, pak

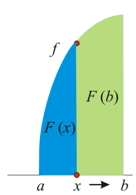
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}) \quad \text{a tedy} \quad F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

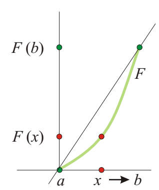
pro nějaká $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Součet na pravé straně je plocha n obdélníčků, která se při velmi velkém n skoro neliší od představy plochy mezi osou x a grafem f na intervalu $[a, b]$.



Lze si proto v uvedeném případě představit, že hodnota primitivní funkce F v bodě $x \in [a, b]$ udává velikost plochy mezi osou x a grafem funkce f nad intervalem $[a, x]$.





Primitivní funkce F měří plochu pod grafem f "zleva doprava"

Nezvolí-li se $F(a) = 0$, popisuje danou plochu rozdíl $F(x) - F(a)$.

Poznámky 1:

1. Značení. Z různých jiných značení pro primitivní funkce lze zmínit značení pro -1.derivaci, tj., $\frac{d^{-1}f}{dx^{-1}}$. V literatuře lze najít pro primitivní funkce také termín *antiderivace*, který vystihuje podstatu operace lépe.

Jestliže si uživatel stále uvědomuje, že přiřazení primitivních funkcí k dané funkce není jednoznačná funkce, není žádný problém používat značení $\int f(x)\,\mathrm{dx}$. Nesmí se nikdy zapomenout, že se jedná o množinu funkcí, nikoli o jednu funkci.

Proto se často píše (např. pro primitivní funkci ke $\cos$)

$$\int \cos x\,\mathrm{dx} = \sin x + C\,, \text{ nebo } \int \cos x\,\mathrm{dx} \stackrel{C}{=} \sin x$$

kde se za C bere libovolné reálné číslo.

Jedna určitá primitivní funkce se získá další podmínkou na její hodnotu v nějakém bodě.

Např. je úkolem nalézt primitivní funkci ke kosinu na $\mathbb{R}$, která má hodnotu 1 v bodě 0. To znamená, že $\sin 0 + C = 1$, odkud vyplývá, že $C = 1$, takže hledaná primitivní funkce je $\sin x + 1$.

2. Diferenciální rovnice. Nalézt primitivní funkci ke kosinu vlastně znamená vyřešit tzv. diferenciální rovnici $y' = \cos x$ (diferenciální rovnice jsou rovnice funkcí, které obsahují s hledanými funkcemi i jejich derivace).

V uvedené rovnici se hledá funkce $y(x)$ splňující danou rovnost. Víme, že může existovat nekonečně mnoho řešení.

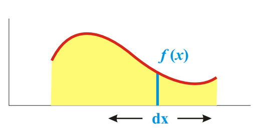
Jediné z těchto řešení se získá zadáním další podmínky, např. podobně jako výše, $y(0) = 1$.

Obecně se tedy řeší (velice speciální) diferenciální rovnice $y' = f(x)$, popř. za podmínky $y(x_0) = y_0$ pro nějaké konkrétní hodnoty x_0, y_0.

3. Vysvětlení použití znaku dx u integrálu.

Je zřejmě nutné nějak určit proměnnou, podle které se má primitivní funkce hledat; např. u integrálu $\int (u^2 v - 4u \sin v)$ by nebylo možné zjistit, zda jde o proměnnou u nebo v. Proč je však k určení proměnné přidáno písmeno d?

Vzniklý výraz, např. dx, je symbolem pro nekonečně malou změnu proměnné x. V uvedené geometrické interpretaci primitivní funkce F je $F(x)$ rovno součtu ploch obdélníčků o stranách zhruba rovných $f(x)$ a maličké délce intervalu okolo x. Limitně lze tedy chápat integrál jeko součet ploch obdélníčků o stranách $f(x)$ a dx. Znak $\int$ vznikl z písmene S pro součet (Summe).



4. Existence versus výpočet.

Později bude ukázáno, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu má primitivní funkci. To však neznamená, že tuto primitivní funkci lze napsat pomocí známých funkcí.

Např. k funkci $1/(x^2 + 1)$ nebude možné napsat primitivní funkci, pokud nebude definována funkce arctg.

Lze ukázat, že primitivní funkci např. k e^{-x^2} není možné napsat dosud zavedenými funkcemi (bez použití nekonečných konstrukcí, jako jsou např. řady).

Pokud nespočtete primitivní funkci během týdne, raději ji nepočítejte ;-)

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Vypočtěte následující integrály a zjistěte, v jakých intervalech výsledek platí:

$$\int e^{3y}\,\mathrm{dy}\,, \quad \int \sin(2t)\,\mathrm{dt}\,, \quad \int \frac{\mathrm{dx}}{2\sqrt{x}}\,.$$

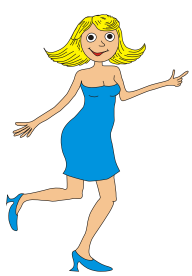
Uhádnutý výsledek beru.

2. Pomocí vysvětlení v předchozích Poznámkách vyřešte následující rovnice:

$$y' = \sin x\,, y(\pi) = 7\,,$$

$$y' = \frac{1}{x^2+1}\,, y(1) = 0\,.$$

3. Má rovnice $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ s podmínkou $y(\pi) = 0$ řešení?



;-)

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Má funkce signum primitivní funkci na $\mathbb{R}$, na $(0,3)$?

2. Má Dirichletova funkce primitivní funkci na $(0,1)$?

3. Má funkce $1/x^2$ primitivní funkci na $(-1, 1)$?

Ach ty mezihodnoty ...

4. Ukažte pomocí odpovídajících tvrzení pro derivace, že primitivní funkce (pokud existuje) k liché (nebo sudé) funkci je sudá (resp. lichá) funkce. Bude primitivní funkce (pokud existuje) k periodické funkci opět periodická funkce?

Konec otázek 1.

Cvičení 1:

Budeme počítat integrály :-)

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $2x$.

Řešení. Funkce $f(x) = 2x$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Proto bude existovat na $\mathbb{R}$ její primitivní funkce. Jednou z primitivních funkcí je $F(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$.

Píšeme to

$$\int 2x \ \mathrm{dx} \stackrel{C}{=} x^2 \, , \ x \in \mathbb{R} \, .$$

Co znamená $\int f(x) \ \mathrm{dx}$?

Jde o množinu primitivních funkcí. Navíc to platí na intervalu, řekněme J. Každé dvě funkce této množiny se liší o určitou konstantu.

A jak pak máme chápat

$$\int f(x)\ \mathrm{dx}\ + \int g(x)\ \mathrm{dx}\ ?$$

Máme dvě možnosti. Buď zavedeme operaci součet pro dvě množiny funkcí, nebo budeme počítat s jedním "reprezentantem" z každé množiny a výsledný součet reprezentantů bude zase reprezentant množiny primitivních funkcí.

$\int f(x)\,\mathrm{dx} - \int f(x)\,\mathrm{dx} = 0$?

Až na konstantu, říkají matematici.

Teď vážně. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ není úplně čistý zápis, ale skoro každý to používá.

Je to úmluva, která má při počítání mnohé výhody. Prostě to podivné $\mathrm{d}x$ a $\int$ spolkneme a usnadníme si hledání primitivních funkcí.

Jestliže tedy například

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 2x\,, \quad x \in J\,,$$

pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x\,, \quad x \in J\,.$$

Lze si hrát s množinami, konstantami i reprezentanty, ale je to jedno.

Mnohem obtížnější je naučit alespoň někoho psát důsledně, na kterém intervalu našel primitivní funkci!!!

Pokud tedy bude zápis vypadat takto

$$\int f(x)\ \mathrm{dx} \overset{C}{=} F(x)\ ,\ x \in J\ ,$$

není problém.

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci $1/x$.

Řešení. Pro kladná x je primitivní funkcí funkce $\log x$.

Pro záporná x je primitivní funkcí funkce $\log(-x)$, protože podle věty o derivování složené funkce platí

$$(\log(-x))' = (-1) \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}\ .$$

Tedy $\log|x|$ je primitivní k $1/x$ na $(0,\infty)$, podobně i na intervalu $(-\infty,0)$.

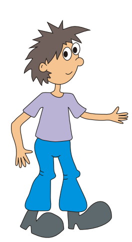
Tedy platí

$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} \overset{C}{=} \log|x|\ ,\ x > 0\ ,$$

a

$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} \overset{C}{=} \log|x|\ ,\ x < 0\ ,$$

Tomuto faktu řada počítačových programů nevěří a řada studentů jej nepoužívá.



$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} \overset{C}{=} \log|x|\ ,\ x \neq 0$ je humus.

Konec cvičení 1.

Učení 1:

$\int x^a \ \mathrm{dx} \overset{?}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}.$

Někdy a někde !!!

$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{dx} \overset{?}{=} \log x.$

Někdy a někde !!!

$\int |\sin x|\ \mathrm{dx} \overset{?}{=} |\int \sin x\ \mathrm{dx}|.$

Nééééééééééééééé !

Konec učení 1.

ZÁKLADNÍ NEURČITÉ INTEGRÁLY

Ze znalosti derivací základních funkcí lze najít primitivní funkce k mnoha funkcím. Některé z nich ukazují následující dvě tabulky.

Zkuste v následujících tabulkách nejdříve sami určit primitivní funkce k funkcím v levém sloupci na intervalu popsaném v prostředním sloupci.

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$(k\pi, \pi + k\pi)$	$-\operatorname{cotg} x$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x, a > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{a^x}{\lg a}$
$\frac{1}{x}$	$(-\infty, 0), (0, +\infty)$	$\lg \lvert x \rvert$
$x^n, n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\mathbb{R}$ nebo $(-\infty, 0), (0, +\infty)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^a, a \neq -1$	$(0, +\infty)$, někdy $\mathbb{R}$, ...	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(-\infty, -1), (1, +\infty)$	$\lg \lvert x + \sqrt{x^2 - 1} \rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$	$\lg \sqrt{\lvert \frac{x+1}{x-1} \rvert}$

POZOROVÁNÍ:

Jestliže f má na otevřeném intervalu I derivaci f', pak

1. součin ff' má na intervalu I primitivní funkci $f^2/2$,
2. podíl f'/f má na I primitivní funkci $\lg |f|$ (pokud na I nenabývá f nulové hodnoty).

Totéž pomocí znaku integrálu:

$$\int ff' = f^2/2\,, \text{neboli} \int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = f^2(x)/2 + C$$

$$\int \frac{f'}{f} = \lg |f|\,, \text{ neboli } \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \lg |f(x)| + C$$

Některé primitivní funkce se dají zjistit z jednoduchých vzorců pro derivace. Následující dvě tabulky uvádějí dva případy.

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\sin x \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$\frac{1}{2}\sin^2 x$
$\frac{\sin x}{\cos^3 x}$	$(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$	$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$
$\frac{\lg x}{x}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2}\lg^2 x$
$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$
$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}$

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$\operatorname{tg} x$	$(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$	$-\lg\lvert\cos x\rvert$
$\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, \pi + k\pi)$	$\lg\lvert\sin x\rvert$
$\frac{1}{\sin x \cos x}$	$(k\pi/2, \pi/2 + k\pi/2)$	$-\lg\lvert\operatorname{tg} x\rvert$
$\frac{1}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}$	$(-\infty, 0), (0, +\infty)$	$\lg\lvert\operatorname{arctg} x\rvert$
$\frac{\sin(2x)}{\sin^2 x+1}$	$\mathbb{R}$	$\lg(\sin^2 x + 1)$
$\frac{x}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\lg\sqrt{x^2+1}$

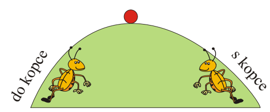
PRIMITIVNÍ FUNKCE SPOJITÝCH FUNKCÍ

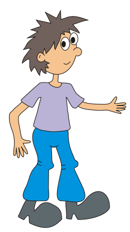
V předcházejících případech se primitivní funkce uhádly podle známých derivací některých funkcí. Existují metody, pomocí nichž je možné zjistit primitivní funkce aktivněji. Nejdříve je však vhodné si ujasnit, pro které funkce má smysl primitivní funkce hledat.

Myslíte si, že to má smysl pro každou funkci?

Má-li funkce všude derivaci a někde ji má kladnou (graf stoupá) a někde zápornou (graf klesá), musí mít lokální extrém s nulovou derivací.

A to se ví?





To ví každej.

Tedy funkce signum nemá primitivní funkci.

Má-li f na I primitivní funkci, musí mít f na I Darbouxovu vlastnost, tj. musí zobrazovat intervaly z I na intervaly nebo body. (Proč? – viz Darbouxova vlastnost).

Opak obecně neplatí.

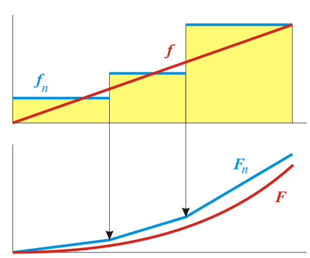
Z kapitoly o spojitých funkcích je známo, že každá spojitá funkce na intervalu má Darbouxovu vlastnost. Mají aspoň tyto speciální funkce s Darbouxovou vlastností primitivní funkce? Odpověď je kladná:

VĚTA. Každá spojitá funkce na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

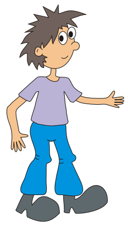
Nejdříve bude dokázán speciální případ pro kompaktní intervaly.

LEMMA. Spojitá funkce na kompaktním intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

Idea důkazu je jednoduchá: aproximujeme plochu pod grafem spojité funkce. Jak ? Jednoduše.



Aproximujeme spojitou funkci f po částech konstantní funkcí f_n, u které změříme plochu pod grafem pomocí po částech lineární funkce F_n. Tato funkce aproximuje primitivní funkci F. Sestrojíme posloupnost f_n a dostaneme $F = \lim F_n$.



. . . jak je v matematické analýze zvykem.

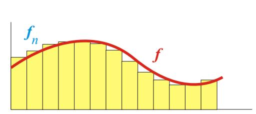
Tak jdeme na ty zvyky.

Důkaz. Důkaz bude kvůli jednoduššímu značení proveden na intervalu $[0,1]$. Nechť f je spojitá na $[0,1]$. Hledaná primitivní funkce F bude bodovou limitou posloupnosti funkcí $\{F_n\}$ definovaných takto:

$$F_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{k-1} f\Big(\frac{i}{2^n}\Big) + f\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big(x - \frac{k}{2^n}\Big),$$

kde k je největší přirozené číslo, pro které je $x \geq \frac{k}{2^n}$ nebo $k = 0$ jinak.

Grafem F_n je lomená čára začínající v 0, lomící se v bodech $i/2^n, i = 1, ..., 2^n - 1$, ze směrnice $f(i/2^n)$ na směrnici $f((i+1)/2^n)$.



Funkce F_n odpovídá mnohoúhelníku pod funkcí f_n, která je po částech konstantní, spojitá zleva a rovna funkci f v bodech $i/2^n, i = 1, ..., 2^n$.

Pro každé $x \in [0,1]$ je posloupnost $\{F_n(x)\}$ cauchyovská:
Nechť $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je takové, že pro $|x-y| < 1/2^n$ je $|f(x)-f(y) < \varepsilon$ (podle věty o stejnoměrné spojitosti).
Jestliže $m > n$ a i je menší než k příslušné k x v definici F_n, pak z intervalu $[i/2^n, (i+1)/2^n)$ přibude v definici F_n člen $f(i/2^n)/2^n$ kdežto v definici F_m to bude 2^{m-n} členů tvaru $f(j/2^m)/2^m$, kde $j/2^m \in [i/2^n, (i+1)/2^n)$.
Protože $f(i/2^n)/2^n = 2^{m-n} f(i/2^n)/2^m$, je rozdíl tohoto členu pro F_n a uvedených členů pro F_m roven součtu 2^{m-n} výrazů $(f(i/2^n) - f(j/2^m))/2^m$, které jsou v absolutní hodnotě rovny nejvýše $\varepsilon/2^m$ a jejich součet je tedy nejvýše $\varepsilon/2^n$.

Tentýž postup lze provést i pro $i = k$ s tím rozdílem, že počet členů z definice F_m, které se nyní počítají (např. roven p), může být menší než 2^{m-n} a výraz $(x - \frac{k}{2^n})$ se napíše jako součet p výrazů $(x - \frac{k'}{2^m}) + (\frac{k'}{2^m} - \frac{k'-1}{2^m}) + \ldots + \frac{k2^{m-n}+1}{2^m} - \frac{k2^{m-n}}{2^m})$, kde k' je ono k příslušné k x v definici F_m. Výsledkem je opět odhad $\varepsilon/2^n$ absolutní hodnoty rozdílu uvedených výrazů pro F_n, F_m.

Protože $k \le 2^n$, je $|F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon$, což se mělo dokázat. Existuje tedy bodová limita posloupnosti funkcí $\{F_n\}$, která se označí F.

Zbývá ukázat, že derivace F v bodě x je rovna $f(x)$, tj. že $\lim_{h\to 0} (|F(x+h) - F(x) - hf(x))/h| = 0$.

Podobně jako v předchozí části důkazu nechť $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je takové, že pro $|x-y| < 1/2^n$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Nechť $h > 0$ (pro $h < 0$ je postup obdobný). Pro $m \ge n$ platí

$$F_m(x+h) - F_m(x) = \Big(x + h - \frac{k_2}{2^m}\Big) f\Big(\frac{k_2}{2^m}\Big) + \frac{1}{2^m} \sum_{i=k_1}^{k_2-1} f\Big(\frac{i}{2^m}\Big) - \Big(x - \frac{k_1}{2^m}\Big) f\Big(\frac{k_1}{2^m}\Big),$$

kde k_1, k_2 jsou příslušná čísla k z definice hodnoty F_m v bodě x nebo $x+h$ resp.
Součet koeficientů u všech $f(j/2^m)$ je roven h a tedy výraz $F_m(x+h) - F_m(x) - hf(x)$ se liší od výše uvedeného výrazu pro $F_m(x+h) - F_m(x)$ tím, že všude je místo příslušných $f(j/2^m)$ psáno $f(j/2^m) - f(x)$. Tudíž pro $h < 2^{-n}$ platí

$$|F_m(x+h) - F_m(x) - hf(x))/h| \le \max\{|f(y) - f(x)|; y \in [x, x+h]\} \le \varepsilon$$

Jestliže se na levou stranu provede limita podle m, dostane se hledaná nerovnost.

Zbývá větu dokázat pro otevřené a polootevřené intervaly (i neomezené). Důkaz je skoro stejný pro obě možnosti.

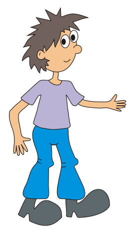
Důkaz. Důkaz věty. Nechť g je spojitá funkce na intervalu (a,b). Tento interval lze napsat jako sjednocení $(a,b) = \bigcup [a_n, b_n]$ rostoucí posloupnosti kompaktních intervalů. Podle předchozího lemmatu existuje na každém intervalu $[a_n, b_n]$ primitivní funkce G_n k g a lze ji zvolit tak, že $G_n(a_1) = 0$. Při této volbě je zřejmé, že pro $n < m$ je zúžení G_m na $[a_n, b_n]$ rovno G_n. Nyní stačí definovat $G(x)$ pro $x \in (a,b)$ jako $G_n(x)$, kde $x \in [a_n, b_n]$.

Tomu konci jsem rozumněl.

VĚTY PRO VÝPOČET NEURČITÝCH INTEGRÁLŮ

Tato část bude věnována obecným metodám, jak primitivní funkce nalézt. Speciální metody určené pro speciální typy funkcí budou uvedeny v následující kapitole.

Obecné metody vycházejí ze vzorečků pro derivování součtu, součinu a složené funkce.



To znám, to jsem viděl v kině.

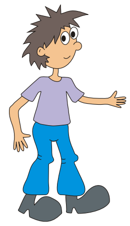
VĚTA. (Linearita) Jsou-li F a G primitivní funkce k f, resp. g, na intervalu I, je lineární kombinace $\alpha F + \beta G$ primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I, tj.
$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g\,.$

Derivace součtu je součet derivací.

Je nutné varovat, že modifikace předchozí věty pro součiny a podíly neplatí!

$$\boxed{\int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g}$$

$$\boxed{\int \frac{f}{g} \neq \frac{\int f}{\int g}}$$



Kdo to použije, je synem smrti ;-) Raději to nebudu používat.

Poznámky 2:

1. Z posledních řádků obou posledních tabulek je vidět, že je potřeba určité zkušenosti k určení primitivní funkce “uhádnutím".

V další části budou uvedeny metody, jak tyto primitivní funkce určit jinými, ale pracnějšími metodami.

Je vždy vhodné se chvíli zamyslet, jestli není možné určit primitivní funkci ze zkušenosti, než ihned začít dlouhé a často časově náročné výpočty.

K získání zkušenosti je ovšem nutné vypočítat stovky primitivních funkcí.

I když v dnešní době každý lepší matematický počítačový program dovede určit primitivní funkce mnoha funkcí, je vždy lepší mít alespoň představu o výsledku a umět aspoň jednodušší primitivní funkce spočítat bez pomoci počítače. Už i proto, že počítače dělají chyby a není dobré jim úplně věřit.

Navíc, existuje mnoho jednoduše vypadajících funkcí, ke kterým počítač nedovede najít primitivní funkci, aniž je řešitel pro počítač vhodně upravil.

Je také vhodné mít po ruce tabulky neurčitých integrálů, které bývají někdy přiloženy do matematických učebnic nebo přehledů (podrobné tabulky neurčitých integrálů lze nalézt např. v knize *Přehled užité matematiky* od Karla Rektoryse a spolupracovníků, v kapitole o integrálním počtu.

2. Počítač mívá potíže při určování primitivních funkcí k funkcím, které jsou definovány po částech.

I při manuálním výpočtu bývá nutné nalézt primitivní funkci na každém z jednotlivých intervalů zvlášť a potom dát výsledek dohromady. Co to znamená?

Je třeba mít na paměti, že primitivní funkce je spojitá na daném intervalu a výsledkem předchozích výpočtů je funkce definovaná po částech, která nemusí být spojitá, i když na jednotlivých intervalech spojitá je.

Je tedy nutné získané funkce vhodně posunout ve směru osy y tak, aby ve styčných bodech jednotlivých definičních intervalů byla výsledná funkce spojitá. Viz *Příklady* pro ilustrativní příklad a *Otázky* pro fakt, že tento postup vždy vede k cíli (pokud příslušné primitivní funkce existují).

Je ovšem pravda, že pro účel, ke kterému primitivní funkce slouží (tj. výpočet určitých integrálů), není nutné toto posunování dělat (viz kapitolu o Newtonových integrálech).

3. Kromě Darbouxovy vlastnosti musí mít funkce f mající primitivní funkci na intervalu I další vlastnosti. Lze např. dokázat, že f musí být na I bodovou limitou spojitých funkcí, odkud vyplývá, že v každém libovolně malém intervalu v I je f spojitá v některém bodě (a tedy v mnoha bodech).

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

Některé integrály se dají spočítat pomocí jednoduchých triků:

1. Primitivní funkce k $1/(\sin^2 x \cos^2 x)$ lze najít tak, že místo 1 se dosadí $\sin^2 + \cos^2 x$ a zlomek se rozdělí na dva zlomky.

2. Pro výpočet $\int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ se použijí součtové vzorce a uvedený součin se zapíše jako součet dvou goniometrických funkcí.

3. Primitivní funkce k $\sin^2 x, \cos^2 x$ lze získat formální integrací rovností

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,, \quad \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos(2x),\,,$$

kde se zintegrují jen pravé strany. Dostanou se dvě lineární rovnice o dvou neznámých $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ a $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

4. Podobně lze získat primitivní funkce k

$$f(x) = \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,, \quad g(x) = \frac{\cos x}{a\sin x + b\cos x}$$

použitím lineárních kombinací

$$af(x) + bg(x) = 1, -bf(x) + ag(x) = \frac{(a\sin x + b\cos x)'}{a\sin x + b\cos x}\,.$$

Obě strany umíte zintegrovat a opět dostanete dvě rovnice pro dvě neznámé, totiž pro hledané integrály.

5. Primitivní funkce k $1/(a\sin x + b\cos x)$ se dostane vyjádřením dvojice a, b pomocí polárních souřadnic, tedy jako $r\cos\alpha, r\sin\alpha$ pro nějaké kladné r a úhel α. Pak je daná funkce tvaru

$$\frac{1}{r\sin(x+\alpha)}\,, \text{ a její primitivní funkce je } \frac{1}{r}\lg\left|\,\mathrm{tg}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\right|.$$

Připadám si jako v říši kouzel ...

6. Nechť $f(x) = |x+1|$ na $\mathbb{R}$. Tato funkce je spojitá a má tedy primitivní funkci. Na intervalu $(-\infty, -1)$ má f primitivní funkci $-x^2/2 - x$ a na $(-1, +\infty)$ má f primitivní funkci $x^2/2 + x$.

Zbývá rozšířit tyto funkce na bod -1. Získané primitivní funkce ale mají různé limity v tomto bodě (jaké?).

Zde se využije toho, že posunutí primitivní funkce o konstantu je opět primitivní funkce k dané funkci. Stačí tedy posunout druhou funkci $x^2/2 + x$ o jistou konstantu tak, aby po posunutí měli již obě funkce v bodě -1 stejné limity. Proveďte podrobnosti.

Tomu se říká "lepení", ani nevím proč ...

Podobným postupem najděte primitivní funkci k

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -1; \\ -1, & -1 \le x \le 1; \\ x^2 - 2, & x > 1. \end{cases}$$

Kdo nelepí tam, kde má a tak, jak má, je ...

7. Pomocí věty o integrálu součtu funkcí najděte primitivní funkce k

$$3x^2 - 8x + 3\sin x\,,\ \frac{2x+3}{\sqrt{x}}\,,\ \frac{\cos^3 x + 1}{1 - \sin^2 x}\,,\ \frac{1+3x^2}{x^2(1+x^2)}\,.$$

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Uvažte, že $\int(-f) = -\int f$ a tedy i $\int(f-g) = \int f - \int g$.

2. Pomocí matematické indukce ukažte, že

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i\,.$$

3. Najděte příklady, že

$$\int (fg) \neq \int f \cdot \int g\,,\ \text{a}\ \int \frac{f}{g} \neq \frac{\int f}{\int g}\,.$$

Platí

$$\int f^2 = \Bigl(\int f\Bigr)^2\,?$$

4. Najděte příklady, že

$$\int |f| \neq \Bigl|\int f\Bigr|\,.$$

5. Nechť f je funkce na (a,b), která má na tomto intervalu primitivní funkci (např. je tam spojitá). Je-li $c \in (a,b)$ a F_1, F_2 jsou primitivní funkce k f na (a,c), resp. na (c,b), ukažte, že existují vlastní limity

$$\lim_{x\to c_-} F_1(x)\,, \quad \lim_{x\to c_+} F_2(x)\,.$$

Je-li první limita rovna A a druhá B, je funkce

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in (a,c); \\ A, & x = c; \\ F_2(x) + A - B, & x \in (c,b). \end{cases}$$

primitivní k f na (a,b).

Konec otázek 2.

Cvičení 2:

Příklad. Zjistěte primitivní funkci k funkci $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $(0, 2\pi)$.

Řešení. Na intervalu $(0,\pi)$ má f primitivní funkci $-\cos x$ a na $(\pi, 2\pi)$ je $f(x) = -\sin x$, tedy má primitivní funkci $\cos x$.

Zbývá rozšířit tyto funkce na bod π. Získané primitivní funkce ale mají různé limity v tomto bodě (± 1).

To se bude muset slepit.

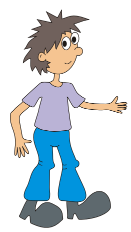
Zde se využije toho, že posunutí primitivní funkce o konstantu je opět primitivní funkce k dané funkci. Stačí tedy posunout druhou funkci $\cos x$ o jistou konstantu tak, aby po posunutí měli již obě funkce v bodě π stejné limity.

Hledaná primitivní funkce F na intervalu $(0, 2\pi)$ se může definovat

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in (0,\pi); \\ 1, & x = \pi; \\ \cos x + 2, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Tou jedničkou a dvojkou jsme zařídili spojitost F.

Ověříme primitivnost: Víme, že $F' = f$ na $(0, \pi)$ i na $(\pi, 2\pi)$. Ověříme, že $F'(\pi) = f(\pi)$.



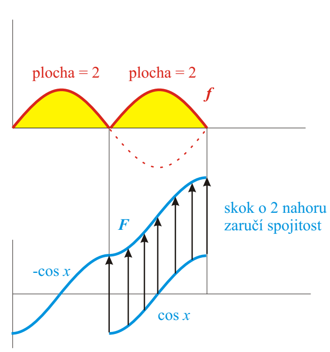
Budu muset umět derivovat?

Funkce F je spojitá zprava v bodě π, proto podle věty o jednostranné derivaci spočítáme

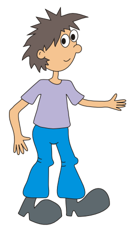
$$F'_+(\pi) \overset{V}{=} \lim_{x\to\pi+} F'(x) \;=\; \lim_{x\to\pi+} |\sin(x)| \;=\; 0 \;= f(\pi)\,.$$

Podobně zleva. Ověřili jsme, že $F'(\pi) = f(\pi)$ a tedy $F' = f$ na $(0, 2\pi)$.

Frajeři to nalepí na celém $\mathbb{R}$. Obrázek napoví …



Musel se najít ten "skok". Ten se přičetl k posouvané funkci.



Snad budu mít nulový skok ...

Skok se počítá jako rozdíl limity primitivní funkce vlevo a limity primitivní funkce vpravo od lepeného bodu. Pokud jde o konečný skok, jde lepit, pokud nekonečný, NEJDE !!!

A ty tanečky s jednostrannou derivací u slepené funkce jsou pořád stejné. Nuda.

Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^2 x \ \mathrm{dx} + \int \cos^2 \ \mathrm{dx} .$$

Řešení. Použijeme větu o linearitě integrálu a počítáme jednoduše

$$\int \sin^2 x \ \mathrm{dx} + \int \cos^2 \ \mathrm{dx} \overset{V}{=} \int (\sin^2 x + \cos^2) \ \mathrm{dx} = \int 1 \ \mathrm{dx} \overset{C}{=} x .$$

Integrál ze součtu je součet integrálů. Platí oběma směry.

Příklad. Zjistěte primitivní funkci k $|x-1|+|x+1|$.

Řešení. Jde o spojitou funkci na $\mathbb{R}$, tedy má primitivní funkci na $\mathbb{R}$.

Podle linearity integrálu můžeme počítat primitivní funkce obou sčítanců zvlášť.

U každého sčítance slepíme.

Takhle vypadá výsledek s pomocí počítačového programu

$$\int |x+1|+|x-1|\,dx = \left(\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - x & x \le -1 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & -1 < x \end{cases}\right) + \left(\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x & x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & 1 < x \end{cases}\right)$$

Výsledkem je funkce $F(x)$ definovaná na jednotlivých intervalech takto: $F(x) = -x^2$ na intervalu $(-\infty,-1)$, $F(x) = 2x+1$ na intervalu $[-1,1]$ a $F(x) = x^2+2$ na intervalu $(1,\infty)$, t.j.

$$F(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in (-\infty,-1); \\ 2x+1, & x \in [-1,1]; \\ x^2+2, & x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Tohle už umím :-)

Konec cvičení 2.

Učení 2:

Funkce $1/x$ má primitivní funkci na $\mathbb{R}$?.

Nenabývá mezihodnoty, nemůže.

$\int x \cdot x \,\mathrm{dx} \overset{?}{=} \int x \,\mathrm{dx} \cdot \int x \,\mathrm{dx}$.

To by musela být ukrutná náhoda. Já věřím na věty, ne na náhody.

Konec učení 2.

Ze vzorce pro součin derivací lze odvodit následující velmi důležité tvrzení, tzv. integraci po částech (z latiny: per partes), která se používá pro integraci součinu dvou funkcí.

VĚTA. **(Integrace po částech)** Nechť funkce f, g mají na intervalu I derivace f', g'. Má-li $f'g$ na I primitivní funkci H, má funkce fg' na I primitivní funkci $fg - H$, tj.,

$$\int f g' = f g - \int f' g \quad \text{na } I \, .$$

Vypadá to tajuplně, v praxi je to limonádka.

Když mám integrovat fg' , například $x \cdot \cos x$, stačí umět integrovat $f'g$, tedy $1 \cdot \sin x$, což je snadné.

To zkusím.

Pomocí integrace po částech lze zjistit mnoho primitivních funkcí-

Spočtěte následující integrály; návody jsou v *Poznámkách*):

funkce f	interval I	prim.funkce k f na I
$x\sin x$	$\mathbb{R}$	$-x\cos x+\sin x$
xe^x	$\mathbb{R}$	$e^x(x-1)$
$x^2\sin x$	$\mathbb{R}$	$-x^2\cos^2 x+2x\sin x+2\cos x$
$\lg x$	$(0,+\infty)$	$x(\lg x-1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$x\operatorname{arctg} x-\lg(\sqrt{x^2+1})$
$e^{ax}\sin(bx)$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))$

Poznámky 3:

1. Použití integrování po částech má různé formy (viz *Příklady*). Ta nejjednodušší je uvedena v základní větě.

U integrace součinu dvou funkcí h_1 a h_2 je při tomto použití jediný problém, a to určit, která z těchto dvou funkcí bude v dalším postupu derivována (tj., bude ve vzorci rovna f) a která bude integrována (tj. bude rovna g').

Bývá výhodné se zbavovat derivováním funkcí jako arctg, $\lg$ nebo snižovat stupeň u mocnin x^n.

2. Někdy lze integrování po částech výhodně využít i pro integraci jediné funkce f, která není vyjádřena jako součin (viz integrály funkcí $\lg$, arctg). Pak lze psát místo f součin $f\cdot 1$. V tomto případě se zřejmě bude 1 integrovat a f derivovat, nebo-li

$$\int f(x)\,\mathrm{dx}=f(x)\cdot x-\int x f'(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Podobně jako jedničku můžeme do funkce "propašovat" i něco jiného.

3. Často je nutné integraci po částech opakovat (viz integrál funkce $x^2\sin x$). Pak je nutné opakovaně volit stejné přiřazení, tj. funkce získaná derivací se bude opět derivovat, funkce získaná integrací se bude opět integrovat.

Tedy, při označení z věty o integraci per partes, se bude f' opět derivovat a g se bude integrovat.

Co se stane, když zvolíte opačné přiřazení?

4. Někdy se při opakovaném použití získá integrál I, který stál na počátku postupu. To znamená, že se dostala rovnice s neznámou I.
Po jejím vyřešení se obvykle získá výpočet hledaného integrálu.

To se týká např. integrálu z $e^{ax}\sin(bx)$.

5. Další z používaných možností použití integrace per partes je určení rekurentního vzorce pro výpočet integrálů.
Je-li v integrované funkci parametr $n \in \mathbb{N}$ (např. v mocnině x^n), lze často integrací per partes získat obdobný integrál s parametrem např. $n-1$ nebo $n+1$ a tím se dostane rekurentní vzorec (viz *Příklady*).

Jak je vidět, integrace po částech má mnoho variant použití a jakou variantu vhodně zvolit záleží hlavně na zkušenosti řešitele.

Já jsem VELMI zkušený!

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Pomocí integrace po částech najděte primitivní funkce k

$$\lg^2 x\,,\ \arcsin x\,,\ \sin^2 x\,,\ \sin x \lg(\operatorname{tg} x)$$

a určete intervaly, na kterých je primitivní funkce spočtena.

Pokud něco nechcete integrovat, tak to zderivujte.

2. Najděte primitivní funkci k $x^7 e^x$ na $\mathbb{R}$.

Je možné použít šestkrát integraci po částech nebo použít obecné tvrzení z *Otázek*, že hledaná primitivní funkce je tvaru $(a_7x^7 + a_6x^6 + ... + a_1x + a_0)e^x$, tuto funkci zderivovat a porovnat získanou funkci s x^7e^x. Po vykrácení e^x se dostane rovnost dvou polynomů. Tedy koeficienty u stejných mocnin se musí rovnat. Tím se získají všechny koeficienty a_i. Proveďte podrobnosti.

Když zhruba vím, jak bude primitivní funkce vypadat, je možné zderivováním toho tvaru zjistit neznámé parametry.

3. Postup při získání rekurentního vzorce, např. pro $\int \sin^n x \,\mathrm{dx}$.

Tento integrál se označí jako I_n, provede se integrace po částech pro součin $\sin x \sin^{n-1} x$, kde se ve výpočtu dosadí $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$\begin{aligned} I_n &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{dx} \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{dx} - (n-1)I_n\,. \end{aligned}$$

Odtud vyplyne po výpočtu I_n rovnost

$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\,.$$

Se znalostí I_0, I_1 je dána rekurentní posloupnost.

Podobně určete rekurentní vzorec pro výpočet integrálu I_n z $1/(1+x^2)^n$. Integrace po částech se provede pro součin $1 \cdot 1/(1+x^2)^n$ (viz návod výše), v získaném integrálu se čitatel x^2 zapíše jako $(1+x^2) - 1$, integrál se napíše jako součet násobku I_n a I_{n+1}. Zbývající postup je již zřejmý.

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

1. Dokažte větu o integraci po částech.

Jde o jedno zderivování.

2. Je-li jedna z funkcí polynom, lze tuto funkci z integrace eliminovat.
Ukažte, že je-li $f^{(n+1)} = 0$ na (a, b), pak

$$\int fg = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)} G_{i+1} \,,$$

kde G_i je i-tá primitivní funkce (tj. i-tá “antiderivace") k g.

Vyzkoušejte na $\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$.

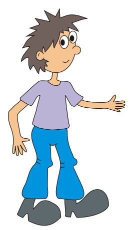
3. Ukažte, že primitivní funkce k $P(x)e^x$, kde P je polynom, je tvaru $Q(x)e^x$, kde Q je polynom stejného stupně jako P.

To se dalo čekat.

4. Ukažte, že primitivní funkce k $P(x)\sin x$, kde P je polynom, je tvaru $Q_1(x)\sin x + Q_2(x)\cos x$, kde Q_2 je polynom stejného stupně jako P a Q_1 má o 1 nižší stupeň než P.

Šlo by to k něčemu použít?

5. Ukažte, že primitivní funkce k $P(x)\lg x$, kde P je polynom, je tvaru $Q_1(x)\lg x + Q_2(x)$, kde Q_1 a Q_2 jsou polynomy stejného stupně jako P.



Per partes je průhledná hračka.

Předchozích výsledků položek 3–5 lze použít k výpočtu integrálu porovnáním neurčitých koeficientů. V *Příkladech* je uveden ilustrativní příklad.

Konec otázek 3.

Cvičení 3:

Budeme počítat primitivní funkce pomocí metody per partes, čili "perpartesit" ;-)

Příklad. Spočtěte pomocí per partes $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a funkce $g(x) = x$ mají derivaci na $\mathbb{R}$.

Funkce

$$f'(x)g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

má primitivní funkci (na $\mathbb{R}$, jak je vidět)

$$\log\sqrt{1+x^2}.$$

Tedy podle věty o per partes $f(x)g'(x) = \operatorname{arctg} x$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci $f(x)g(x) - \log\sqrt{1+x^2}$, tedy

$$x \operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2}\,.$$

Výpočet je trochu upovídaný a při každém per partes se bude opakovat. Proto to budeme psát stručněji.

$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{dx} = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{dx} \overset{PP}{=} x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

To bylo per partes. Jeho použití indikuje $\overset{PP}{=}$. Nyní si RADĚJI NĚKDE BOKEM (nebo z hlavy) spočítáme ten zbývající integrál. Pak napíšeme výsledek.

$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{dx} \overset{C}{=} x \operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2}\,,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

Když některý faktor v součinu dvou funkcí láká k derivování, ale o jeho primitivní funkci nemáme zdání, je to dobrý kandidát na derivování v metodě per partes.

Je to věc citu a cviku.

Někdy bývá slušné popsat použití perpartes podrobněji. V našem případě bych někde poznamenal vysvětlení toho $\overset{PP}{=}$, například:

$$\text{P.P.}\ :\quad \begin{array}{cc} f(x) = \operatorname{arctg} x & g(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} & g'(x) = 1 \\ x \in \mathbb{R} & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Pokud chceme zachovat linearitu výpočtu, můžeme také psát

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{dx} &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{dx} \overset{PP}{=} \\ &\overset{PP}{=} \left[\begin{array}{cc} f(x) = \operatorname{arctg} x & g(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} & g'(x) = 1 \\ x \in \mathbb{R} & x \in \mathbb{R} \end{array} \right] \overset{PP}{=} \\ &\overset{PP}{=} x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \overset{C}{=} \\ &\overset{C}{=} x \operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1+x^2}\ ,\ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ještě joke pro lenochy:

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k x.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int x \, \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot x \, \mathrm{d}x \stackrel{PP}{=} \\
&\stackrel{PP}{=} \left[\begin{array}{cc} f(x) = x & g(x) = x \\ f'(x) = 1 & g'(x) = 1 \\ x \in \mathbb{R} & x \in \mathbb{R} \end{array} \right] \stackrel{PP}{=} \\
&\stackrel{PP}{=} x \cdot x - \int x \cdot 1 \, \mathrm{d}x \, , x \in \mathbb{R} \, ,
\end{aligned}$$

tedy

$$\int x \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{x^2}{2} \, , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

Konec cvičení 3.

Učení 3:

Per partes je jednoduchost sama:

$$\begin{aligned}
\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x &\stackrel{?}{=}\stackrel{PP}{=} \left[\begin{array}{cc} f(x) = \sin x & g(x) = \cos x \\ f'(x) = \cos x & g'(x) = -\sin x \\ x \in \mathbb{R} & x \in \mathbb{R} \end{array} \right] \stackrel{PP}{=} \\
&\stackrel{PP}{=}\stackrel{?}{=} \cos x \sin x - \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x \, , x \in \mathbb{R} \, ,
\end{aligned}$$

Popleta ...

Konec učení 3.

Ze vzorce o derivaci složené funkce lze získat tzv. větu o substituci pro integraci. Na rozdíl od derivace součinu nemá derivace složené funkce symetrický charakter a proto lze příslušnou větu o substituci napsat ve dvou verzích podle toho, z které strany rovnosti se vychází.

Teď nastanou potíže!!!

VĚTA. (1. substituční věta) Mějme následující situaci:

1. funkce φ má derivaci na otevřeném intervalu I;
2. funkce f je definována na otevřeném intervalu $J \supset \varphi(I)$;
3. F je primitivní k funkci f na J.

Potom funkce $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I, tj.,

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{dx} = \int f(t)\,\mathrm{dt}$$

pro $x \in I$, kde za t se musí po výpočtu dosadit $\varphi(x)$.

Vzhledem k pozdějšímu použití jsou obě věty formulovány pro otevřené intervaly. Důkazy obou vět jsou přímočaré (ověření toho, že uvedená funkce je primitivní) a jsou přenechány k dodělání.

VĚTA. (2. substituční věta.) Mějme následující situaci:

1. funkce ψ má nenulovou derivaci na otevřeném intervalu J;
2. funkce f je definovaná na otevřeném intervalu $I = \psi(J)$;
3. G je primitivní k funkci $(f \circ \psi) \cdot \psi'$ na J.

Potom funkce $G \circ \psi^{-1}$ je primitivní k f na I, tj.,

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \int f((\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{dt}$$

pro $x \in I$, kde za t se musí po výpočtu dosadit $\psi^{-1}(x)$.

U obou substitučních vět funkci integrujeme v pozměněném tvaru . . .

Tomu kouzlení přijdu na kloub.

Poznámky 4:

Z posledních řádků obou substitučních vět je vidět jejich rozdíl.

Zatímco v 1.substituční větě je příslušná substituce obsažena v integrované funkci, u druhé věty se substituce musí “uhádnout". To ale neznamená, že v prvním případě je substituční funkce na první pohled zřejmá.

V obou případech opět záleží ma zkušenosti řešitele a pro získání zkušenosti je opět nutné spočítat mnoho integrálů.

1. substituční věta je jednodušší i co se týká předpokladů. O derivaci substituční funkce se nemusí nic předpokládat (kromě existence, samozřejmě). V tvrzení 2. substituční věty se potřebuje inverzní funkce k ψ. Protože je ψ spojitá (má vlastní derivaci), musí být ryze monotónní a má tedy „skoro všude" nenulovou

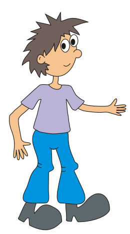
derivaci. Z toho, že má funkce skoro všude nenulovou derivaci, neplyne obráceně, že je ryze monotónní (např. pro x^2). Proto je ve větě předpoklad nenulovosti ψ'.
Ve 2. substituční větě má substituční funkce inverzní funkci (protože je spojitá, musí být ryze monotónní).

V *Otázkách* je uvedena obecnější substituční věta bez předpokladu existence inverzní funkce. Pro praktické využití však není vhodná a většinou se hledají intervaly, kde substituce má inverzní funkci.

Formální dosazení ve 2. substituční větě si lze snadno zapamatovat: za x se dosadí *všude* $\psi(t)$, tedy místo $f(x)$ se napíše $f(\psi(t))$ a místo $\mathrm{d}x$ lze psát $\mathrm{d}\psi(t)$, což je rovno $\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ (formální úpravou rovnosti $\frac{\mathrm{d}(\psi(t)}{\mathrm{d}t} = \psi'(t)$).
Je samozřejmě nutné změnit i interval, na kterém se integruje: místo původního intervalu I se vezme vzor $\psi^{-1}(I)$.

Nezapomínejte ověřit předpoklad, že ψ má nenulovou derivaci.

Je opět vhodné dodat, že pro použití ve výpočtu určitých integrálů se většinou používá věta o substituci pro určité integrály (viz kapitolu o Newtonových integrálech). Není tomu však vždy a je vhodné znát i substituční věty pro neurčité integrály.



AHA.

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

U 1 substituční věty máme následující situaci:

Máme integrovat

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosadíme si do toho výrazu vztah $\varphi(x) = t$, a jeho "derivovanou podobu" $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a dostaneme $\int f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pokud dovedeme spočítat

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)\,,$$

máme hotovo

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x))\,.$$

Častá je lineární substituce $t = px + q$, která zřejmě splňuje všechny předpoklady věty. Např.

$$\int \sin(px+q)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{p}\int \sin(t)\,\mathrm{dt} = -\cos t = -\frac{\cos(px+q)}{p} + C$$

Volili jsme $t = \varphi(x) = px + q$.

Provedli jsme opravdu "substituci"!

Podobně (spočtěte a určete intervaly, kde rovnost platí):

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\,, \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\,.$$

Vidíte příslušnou substituci?

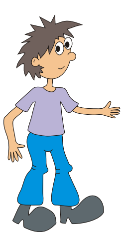
Pokud je v podobných integrálech obecný kvadratický trojčlen místo $a^2 + x^2$, lze pomocí tzv. úpravy na čtverec trojčlen na dvojčlen upravit:

$$px^2 + qx + r = p\big((x - \frac{q}{2p})^2 + (r - \frac{q^2}{4p})/p\big)\,.$$

Substituce $t = \sqrt{|p|}\big(x - \frac{q}{2p}\big)$ převede trojčlen na typ $t^2 \pm a^2$.

Spočtěte uvedeným postupem integrál z $1/(3x^2 - 12x + 19)$.

Těžko na cvičišti ...



...lehko Na Bojišti.

Pro ilustraci použití 1.substituční věty může sloužit výpočet

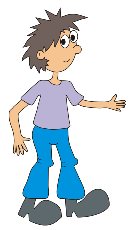
$$\int \sin^3 x \,\mathrm{dx} = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \,\mathrm{dx} = -\int (1 - t^2)\,\mathrm{dt} = -t + t^3/3 = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Najděte podobně primitivní funkce k $\cos^3 x, \mathrm{tg}^3\, x$.

U druhé substituční věty substituujeme $x = \psi(t)$ a jeho "zderivovanou podobu" $\mathrm{dx} = \psi'(t)\,\mathrm{dt}$. Po zjištění primitivní funkce $G(t)$ dostaneme výsledek $G(\psi^{-1}(x))$.

Pokud taková inverzní funkce ψ^{-1} existuje!



Pozor, pozor …

Pro ilustraci použití 2.substituční věty může sloužit (substituce $t = \sqrt{x}$)

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = 2\int te^t\,\mathrm{dt} = 2e^t(t-1) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$$

pro $x > 0$.

Spočtěte podobným způsobem integrály z funkcí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{dx}\,, \quad \int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{dx}\,, \quad \int \frac{1+\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx}\,.$$

Najděte primitivní funkce k $1/(x^4+1), x^2/(x^4+1)$

Neztrácejte při integrování hlavu. Někdy stačí prostě trochu kouzlit: Označte hledané primitivní funkce jako F, G a vypočtěte $F + G, F - G$ pomocí substituce $t = x \pm (1/x)$.

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

1. Dokažte obě substituční věty.

Je co dokazovat?

2. Ukažte, že platí následující zobecnění substituční věty:
Nechť funkce ψ má derivaci na otevřeném intervalu J, funkce f je definována na otevřeném intervalu $I \supset \psi(J)$ a G je primitivní k funkci $f \circ \varphi$ na J.
Nechť φ je funkce na I taková, že $(\psi \circ \varphi)(x) = x$ na I. Potom funkce $G \circ \varphi$ je primitivní k f na I, tj.,

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \int f((\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{dt}$$

pro $x \in I$, kde za t se musí po výpočtu dosadit $\varphi(x)$.

O co zde jde?

Konec otázek 4.

Cvičení 4:

Budeme počítat primitivní funkce pomocí substituce. Tato metoda vyžaduje veliké množství spočítaných příkladů pro vytvoření správných návyků.

Použití vhodné substituční metody si musíme promyslet koukáním na příklad a představováním si, co se po substituci objeví. GOOD LUCK :-)

Příklad. Zintegrujte pomocí substituce

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx}\,.$$

Řešení. Zvolíme substituci $\varphi(x) = x^2$. Jde o funkci derivovatelnou na $\mathbb{R}$. Dosadíme si do $\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx}$ vztah $x^2 = t$, a jeho "derivovanou podobu" $2x\,\mathrm{dx} = \mathrm{dt}$ a dostaneme $\int \cos t\,\mathrm{dt}$.
Pokud spočítáme

$$\int \cos t\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=} \sin t\ ,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

máme podle 1. substituční metody hotovo

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx}\ \stackrel{C}{=}\ \sin(x^2)\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Výpočet je trochu upovídaný. Proto to budeme psát stručněji:

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx}\ \stackrel{S}{=}\ \int \cos t\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=} \sin t\ \stackrel{S}{=} \sin(x^2)\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

To byla substituce. Její použití indikuje $\stackrel{S}{=}$.

Jak bude integrál vypadat po substituci, je docela dobře předem vidět.

Je to věc citu a cviku.

Někdy bývá slušné popsat použití substituce podrobněji. V našem případě bych někde poznamenal vysvětlení toho $\stackrel{S}{=}$, například:

$$\boxed{\mathrm{S}: \quad \begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x \in \mathbb{R}&, t \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Pokud chceme zachovat linearitu výpočtu, můžeme také psát

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{dx} \quad \overset{S}{=} \quad \left[\quad \mathrm{S}: \quad \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\ \mathrm{dx} = \ \mathrm{dt} \\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \end{array} \right] \overset{S}{=} \int \cos t\,\mathrm{dt} \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \quad \sin t \overset{S}{=} \sin(x^2)\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Všimněte si, že při použití $\overset{S}{=}$ V JEDEN OKAMŽIK zmizela všechna x a nahradila je t. A při druhém použití $\overset{S}{=}$ naopak.

Kdo v jednom integrálu má zároveň x a t, je humusák.

Asi bych nebyl sám . . .

Ještě joke pro lenochy:

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k $2x$.
Řešení.

$$\int 2x\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\text{S :} \quad \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\ \mathrm{dx} = \mathrm{dt} \\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \end{array} \right] \stackrel{S}{=} \int 1\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=} t \stackrel{S}{=} x^2\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Zkusíme to s druhou substituční metodou.

Příklad. Spočtěte pomocí substituce

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{dx}\,.$$

Řešení. Zvolíme substituci $\psi(t) = \sin t$, $t \in J = (-\pi/2, \pi/2)$. Označme $I = \psi(J) = (-1,1)$. Pro $x \in I$ a $t \in J$ je $x = \sin t \iff t = \arcsin x$. Tedy ψ má na J nenulovou derivaci, je tam prostá a $\psi^{-1}(x) = \arcsin x$.

Pro $x \in I$ je integrovaná funkce definovaná a spojitá.

Dosadíme si nyní do zadaného integrálu vztah $x = \sin t$, a jeho "derivovanou podobu" $\mathrm{dx} = \cos t\ \mathrm{dt}$ a spočteme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\ \mathrm{dt} = \int \frac{\cos t}{|\cos t|}\ \mathrm{dt} = \int 1\ \mathrm{dt} \stackrel{C}{=} t\,,\ t \in J.$$

Nyní je podle 2. substituční metody hotovo

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{dx} \stackrel{C}{=} \arcsin x\,,\ x \in I\,.$$

Výpočet je trochu upovídaný. Proto to budeme psát stručněji:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{dt} = \int 1\,\mathrm{dt} \overset{C}{=} t \overset{S}{=} \arcsin x,\ x \in I\,.$$

To byla substituce $x = \sin t$. Její použití indikuje $\overset{S}{=}$.

Jak bude integrál vypadat po substituci, je někdy tajemství …

Já bych do těch sinů nešel.

Někdy bývá slušné popsat použití substituce podrobněji. V našem případě bych někde poznamenal vysvětlení toho $\stackrel{S}{=}$, například:

$$\begin{array}{lrcl} & x = \sin t & & \arcsin x = t \\ \mathrm{S}: & x \in (-1,1) = I & & t \in (-\pi/2, \pi/2) = J \\ & \mathrm{d}x \;=\; \cos t \,\mathrm{d}t & & t \in J \Longrightarrow \cos t \neq 0 \end{array}$$

Pokud chceme zachovat linearitu výpočtu, můžeme také psát

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \stackrel{S}{=} \quad \left[\begin{array}{lrcl} & x = \sin t & & \arcsin x = t \\ \mathrm{S}: & x \in (-1,1) = I & & t \in (-\pi/2, \pi/2) = J \\ & \mathrm{d}x \;=\; \cos t \,\mathrm{d}t & & t \in J \Longrightarrow \cos t \neq 0 \end{array}\right] \stackrel{S}{=}$$

$$\stackrel{S}{=} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \,\mathrm{d}t = \int 1 \,\mathrm{d}t \;\stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \quad t \;\stackrel{S}{=}\; \arcsin x,\; x \in I\,.$$

Všimněte si, že při použití $\stackrel{S}{=}$ V JEDEN OKAMŽIK zmizela všechna x a nahradila je t. A při druhém použití $\stackrel{S}{=}$ naopak.

Ještě joke pro lenochy:

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k 1.

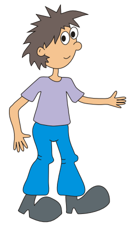
Řešení.

$$\int 1 \,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \left[\begin{array}{lcc} & x = t^2 & \sqrt{x} = t \\ \mathrm{S}: & x \in (0,\infty) = I & t \in (0,\infty) = J \\ & \mathrm{dx} \;=\; 2t\,\mathrm{dt} & t \in J \implies 2t \neq 0 \end{array} \right] \overset{S}{=} \int 2t\,\mathrm{dt} \overset{C}{=} t^2 \overset{S}{=} x\,,\; x \in I\,.$$

Pokud si u druhé substituční metody intervaly I a J odpovídají vzájemně jednoznačně, máme vlastně dvě funkce: $x = x(t)$ a $t = t(x)$. Pak by tolik nemuselo vadit "míchat" v jednom integrálu obě písmenka x a t. Nicméně se to nedoporučuje!!!

Mnohem důležitější je u druhé substituční metody vědět, že jednou (na konci výpočtu) budeme zpravidla potřebovat tu proklatou inverzní funkci k naší substituci.

BTW, hledat inverzní funkci je vlastně hledat řešení rovnice $x = \psi(t)$ pro neznámou t. Jaké rovnice vlastně dovedeme vyřešit?



Lineární, kvadratické a jednoduché.

Příklad. Spočtěte pomocí substituce

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{dx} \, .$$

Řešení. Zvolíme substituci $\psi(t) = \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$.
Zjistíme pro pořádek rovnou inverzní funkci:

$$x = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \iff e^t = x \pm \sqrt{1+x^2} \, ,$$

z čehož jediným smysluplným řešením je

$$t \; = \; \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \; .$$

Navíc

$$(\sinh t)' = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' \; = \; \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) \; = \cosh t \neq 0 \, , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

Tedy ψ má na $\mathbb{R}$ nenulovou derivaci, je tam prostá a $\psi^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Pro $x \in \mathbb{R}$ je integrovaná funkce definovaná a spojitá.
Dosadíme si nyní do zadaného integrálu vztah $x = \sinh t$, a jeho "derivovanou podobu" $\mathrm{dx} = \cosh t \; \mathrm{dt}$ a spočteme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \cosh t \; \mathrm{dt} = \int \frac{\cosh t}{|\cosh t|} \; \mathrm{dt} = \int 1 \; \mathrm{dt} \; \overset{C}{=} \; t \, , \; t \in J.$$

Nyní je podle 2. substituční metody hotovo

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; \mathrm{dx} \; \overset{C}{=} \; \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \; , \; x \in I \, .$$

Výpočet je trochu upovídaný. Proto to budeme psát stručněji:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \cos t\,\mathrm{dt} = \int 1\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=} t \stackrel{S}{=} \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

To byla substituce $x = \sinh t$. Její použití indikuje $\stackrel{S}{=}$.

$$\boxed{\begin{array}{lcc} & x = \sinh t & \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = t \\ \mathrm{S:} & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ & \mathrm{dx} \;=\; \cosh t\,\mathrm{dt} & t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \cos t \neq 0 \end{array}}$$

Pokud chceme zachovat linearitu výpočtu, můžeme také psát

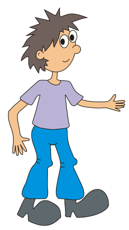
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\begin{array}{lcc} & x = \sinh t & \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = t \\ \mathrm{S:} & x \in \mathbb{R} & t \in \mathbb{R} \\ & \mathrm{dx} \;=\; \cosh t\,\mathrm{dt} & t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \cosh t \neq 0 \end{array}\right] \stackrel{S}{=}$$

$$\stackrel{S}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \cosh t\,\mathrm{dt} = \int 1\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} t \stackrel{S}{=} \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ x \in R\,.$$

Všimněme si, že $\cosh^2 t - \cosh^2 t = 1$, $\sinh' t = \cosh t = 1$, $\cosh' t = \sinh' t$.

To se hodí na $\sqrt{x^2-1}$ a $\sqrt{x^2+1}$.



Na to nestačí sin a cos?

Konec cvičení 4.

Učení 4:

Snadný příklad:

$$\int 2xe^{x^2}\ \mathrm{dx} \overset{S}{=} \int e^t\ \mathrm{dt} \overset{C}{=} e^t\ .$$

Ještě asi něco chybí, snaha ale byla …

Snadný příklad:

$$\int 2xe^{x^2}\ \mathrm{dx} \overset{S}{=} \int e^t\,\mathrm{dx} \overset{C}{=} e^x\,.$$

Protřepat, ale nemíchat . . .

Konec učení 4.