# PRIMITIVNÍ FUNKCE

V předchozích částech byly zkoumány derivace funkcí a hlavním tématem byly funkce, které derivace mají. V této kapitole se budou zkoumat funkce, které naopak jsou derivacemi jiných funkcí a budou se hledat metody, jak tyto jiné funkce najít.

Ukazuje se, že operace inverzní k derivování (nazývaná integrování) je velmi důležitá. Jak už její název napovídá, s její pomocí bude možné z jednotlivých drobných informací získat informaci celkovou.

## DEFINICE A MOTIVACE

Následující termín je historicky vžitý, i když nevyjadřuje příslušnou operaci.

**DEFINICE.** Funkce $F$ se nazývá primitivní k funkci $f$ na intervalu $I$, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$.

Následující tvrzení plyne z vět o derivacích (viz derivace a spojitost, důsledek věty o střední hodnotě).

**VĚTA.** Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $I$. Potom:

1. $F$ je spojitá na $I$.
2. Pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ primitivní funkce k $f$ na $I$.
3. Je-li $G$ primitivní funkce k $f$ na $I$, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že je $G = F + c$.

Pro množinu všech primitivních funkcí k $f$ se používá značení $\int f$, resp. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li třeba zdůraznit proměnnou $x$.

Znak $\int$ se nazývá integrál (přesněji neurčitý integrál na rozdíl od *určitého*, který bude zaveden později) a celé označení $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se čte: integrál funkce $f$ (podle proměnné $x$). Význam znaku $\mathrm{d}x$ bude objasněn v *Poznámkách*.

Derivace mají geometrickou interpretaci, popisují tečny ke grafu $f$. Jak bude vidět z následující části, primitivní funkce popisují velikost plochy pod grafem funkce.

Jestliže $f$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$, má na tomto intervalu primitivní funkci $F$, jak bude ukázáno dále.

Pro větší názornost nechť spojitá $f \geq 0$ na $[a, b]$. Zvolíme primitivní funkci $F$ k $f$ na $[a, b]$ tak, že $F(a) = 0$.

Podle věty o střední hodnotě použité pro funkci $F$ je pro libovolný interval $[r, s] \subset [a, b]$

$$F(s) - F(r) = f(c)(s - r)$$

pro nějaké (vhodné) $c \in (r, s)$.

Je-li $s$ velice blízko $r$, bude i $f(c)$ velice blízko hodnotám $f(r), f(s)$, protože $f$ je spojitá (a uvedený obdélník se nebude příliš lišit od „křivého" obdélníku s jednou stranou zaměněnou za graf $f$ nad $[r, s]$).

Když interval $[a, b]$ rozdělíme na $n$ intervalů body $x_1, \ldots, x_{n-1}$ a označíme $x_0 = a, x_n = b$, pak

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}) \quad \text{a tedy} \quad F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

pro nějaká $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Lze si proto v uvedeném případě představit, že hodnota primitivní funkce $F$ v bodě $x \in [a, b]$ udává velikost plochy mezi osou $x$ a grafem funkce $f$ nad intervalem $[a, x]$.

Poznámky 1   Příklady 1   Otázky 1

Cvičení 1

Učení 1

## ZÁKLADNÍ NEURČITÉ INTEGRÁLY

Ze znalosti derivací základních funkcí lze najít primitivní funkce k mnoha funkcím. Některé z nich ukazují následující dvě tabulky.

| funkce $f$ | interval $I$ | prim.funkce k $f$ na $I$ |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\sin x$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ | $\operatorname{tg} x$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(k\pi, \pi + k\pi)$ | $-\operatorname{cotg} x$ |
| $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x$ |
| $a^x, a > 0$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{a^x}{\lg a}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ | $\lg \lvert x \rvert$ |
| $x^n, n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ | $\mathbb{R}$ nebo $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $x^a, a \neq -1$ | $(0, +\infty)$, někdy $\mathbb{R}$, ... | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ |

| funkce $f$ | interval $I$ | prim.funkce k $f$ na $I$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ | $\arcsin x$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\operatorname{arctg} x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ | $\lg \lvert x + \sqrt{x^2 - 1} \rvert$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\mathbb{R}$ | $\lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$ | $\lg \sqrt{\left\lvert \frac{x+1}{x-1} \right\rvert}$ |

POZOROVÁNÍ:

Jestliže $f$ má na otevřeném intervalu $I$ derivaci $f'$, pak

1. součin $ff'$ má na intervalu $I$ primitivní funkci $f^2/2$,

2. podíl $f'/f$ má na $I$ primitivní funkci $\lg|f|$ (pokud na $I$ nenabývá $f$ nulové hodnoty).

Totéž pomocí znaku integrálu:

$$\int ff' = f^2/2\,, \text{neboli} \int f(x)f'(x)\,\mathrm{dx} = f^2(x)/2 + C$$

$$\int \frac{f'}{f} = \lg|f|\,, \text{ neboli } \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \lg|f(x)| + C$$

Některé primitivní funkce se dají zjistit z jednoduchých vzorců pro derivace. Následující dvě tabulky uvádějí dva případy.

| funkce $f$ | interval $I$ | prim.funkce k $f$ na $I$ |
|---|---|---|
| $\sin x \cos x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $\frac{1}{2}\sin^2 x$ |
| $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ | $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ | $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$ |
| $\frac{\lg x}{x}$ | $(0, +\infty)$ | $\frac{1}{2}\lg^2 x$ |
| $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$ |
| $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}$ |

| funkce $f$ | interval $I$ | prim.funkce k $f$ na $I$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{tg} x$ | $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ | $-\lg|\cos x|$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | $(k\pi, \pi + k\pi)$ | $\lg|\sin x|$ |
| $\frac{1}{\sin x \cos x}$ | $(k\pi/2, \pi/2 + k\pi/2)$ | $-\lg|\operatorname{tg} x|$ |
| $\frac{1}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}$ | $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ | $\lg|\operatorname{arctg} x|$ |
| $\frac{\sin(2x)}{\sin^2 x+1}$ | $\mathbb{R}$ | $\lg(\sin^2 x + 1)$ |
| $\frac{x}{x^2+1}$ | $\mathbb{R}$ | $\lg\sqrt{x^2+1}$ |

## PRIMITIVNÍ FUNKCE SPOJITÝCH FUNKCÍ

V předcházejících případech se primitivní funkce uhádly podle známých derivací některých funkcí. Existují metody, pomocí nichž je možné zjistit primitivní funkce aktivněji. Nejdříve je však vhodné si ujasnit, pro které funkce má smysl primitivní funkce hledat.

Má-li funkce všude derivaci a někde ji má kladnou (graf stoupá) a někde zápornou (graf klesá), musí mít lokální extrém s nulovou derivací.

Má-li $f$ na $I$ primitivní funkci, musí mít $f$ na $I$ Darbouxovu vlastnost, tj. musí zobrazovat intervaly z $I$ na intervaly nebo body. (Proč? – viz Darbouxova vlastnost).

Z kapitoly o spojitých funkcích je známo, že každá spojitá funkce na intervalu má Darbouxovu vlastnost. Mají aspoň tyto speciální funkce s Darbouxovou vlastností primitivní funkce? Odpověď je kladná:

**VĚTA.** Každá spojitá funkce na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

**LEMMA.** Spojitá funkce na kompaktním intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

**Důkaz.** Důkaz bude kvůli jednoduššímu značení proveden na intervalu $[0, 1]$. Nechť $f$ je spojitá na $[0, 1]$.

Hledaná primitivní funkce $F$ bude bodovou limitou posloupnosti funkcí $\{F_n\}$ definovaných takto:

$$F_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{i}{2^n}\right) + f\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(x - \frac{k}{2^n}\right),$$

kde $k$ je největší přirozené číslo, pro které je $x \geq \frac{k}{2^n}$ nebo $k = 0$ jinak.

Pro každé $x \in [0,1]$ je posloupnost $\{F_n(x)\}$ cauchyovská:
Nechť $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je takové, že pro $|x-y| < 1/2^n$ je $|f(x) - f(y) < \varepsilon$ (podle věty o stejnoměrné spojitosti). Jestliže $m > n$ a $i$ je menší než $k$ příslušné k $x$ v definici $F_n$, pak z intervalu $[i/2^n, (i+1)/2^n)$ přibude v definici $F_n$ člen $f(i/2^n)/2^n$ kdežto v definici $F_m$ to bude $2^{m-n}$ členů tvaru $f(j/2^m)/2^m$, kde $j/2^m \in [i/2^n, (i+1)/2^n)$.

Protože $f(i/2^n)/2^n = 2^{m-n} f(i/2^n)/2^m$, je rozdíl tohoto členu pro $F_n$ a uvedených členů pro $F_m$ roven součtu $2^{m-n}$ výrazů $(f(i/2^n) - f(j/2^m))/2^m$, které jsou v absolutní hodnotě rovny nejvýše $\varepsilon/2^m$ a jejich součet je tedy nejvýše $\varepsilon/2^n$.

Tentýž postup lze provést i pro $i = k$ s tím rozdílem, že počet členů z definice $F_m$, které se nyní počítají (např. roven $p$), může být menší než $2^{m-n}$ a výraz $(x - \frac{k}{2^n})$ se napíše jako součet $p$ výrazů $(x - \frac{k'}{2^m}) + (\frac{k'}{2^m} - \frac{k'-1}{2^m}) + \ldots + \frac{k2^{m-n}+1}{2^m} - \frac{k2^{m-n}}{2^m})$, kde $k'$ je ono $k$ příslušné k $x$ v definici $F_m$. Výsledkem je opět odhad $\varepsilon/2^n$ absolutní hodnoty rozdílu uvedených výrazů pro $F_n, F_m$.

Protože $k \le 2^n$, je $|F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon$, což se mělo dokázat. Existuje tedy bodová limita posloupnosti funkcí $\{F_n\}$, která se označí $F$.

Zbývá ukázat, že derivace $F$ v bodě $x$ je rovna $f(x)$, tj. že $\lim_{h\to 0} (|F(x+h) - F(x) - hf(x))/h| = 0$.

Podobně jako v předchozí části důkazu nechť $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je takové, že pro $|x-y| < 1/2^n$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Nechť $h > 0$ (pro $h < 0$ je postup obdobný). Pro $m \ge n$ platí

$$F_m(x+h) - F_m(x) = \Big(x + h - \frac{k_2}{2^m}\Big) f\Big(\frac{k_2}{2^m}\Big) + \frac{1}{2^m} \sum_{i=k_1}^{k_2-1} f\Big(\frac{i}{2^m}\Big) - \Big(x - \frac{k_1}{2^m}\Big) f\Big(\frac{k_1}{2^m}\Big),$$

kde $k_1, k_2$ jsou příslušná čísla $k$ z definice hodnoty $F_m$ v bodě $x$ nebo $x+h$ resp.

Součet koeficientů u všech $f(j/2^m)$ je roven $h$ a tedy výraz $F_m(x+h) - F_m(x) - hf(x)$ se liší od výše uvedeného výrazu pro $F_m(x+h) - F_m(x)$ tím, že všude je místo příslušných $f(j/2^m)$ psáno $f(j/2^m) - f(x)$. Tudíž pro $h < 2^{-n}$ platí

$$|F_m(x+h) - F_m(x) - hf(x))/h| \le \max\{|f(y) - f(x)|; y \in [x, x+h]\} \le \varepsilon$$

Jestliže se na levou stranu provede limita podle $m$, dostane se hledaná nerovnost.

Zbývá větu dokázat pro otevřené a polootevřené intervaly (i neomezené). Důkaz je skoro stejný pro obě možnosti.

**Důkaz. Důkaz věty.** Nechť $g$ je spojitá funkce na intervalu $(a,b)$. Tento interval lze napsat jako sjednocení $(a,b) = \bigcup [a_n, b_n]$ rostoucí posloupnosti kompaktních intervalů. Podle předchozího lemmatu existuje na každém intervalu $[a_n, b_n]$ primitivní funkce $G_n$ k $g$ a lze ji zvolit tak, že $G_n(a_1) = 0$. Při této volbě je zřejmé, že pro $n < m$ je zúžení $G_m$ na $[a_n, b_n]$ rovno $G_n$. Nyní stačí definovat $G(x)$ pro $x \in (a,b)$ jako $G_n(x)$, kde $x \in [a_n, b_n]$.

## VĚTY PRO VÝPOČET NEURČITÝCH INTEGRÁLŮ

Tato část bude věnována obecným metodám, jak primitivní funkce nalézt. Speciální metody určené pro speciální typy funkcí budou uvedeny v následující kapitole.

**VĚTA. (Linearita)** Jsou-li $F$ a $G$ primitivní funkce k $f$, resp. $g$, na intervalu $I$, je lineární kombinace $\alpha F + \beta G$ primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na $I$, tj.

$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ .

$$\boxed{\int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g}$$

$$\boxed{\int \frac{f}{g} \neq \frac{\int f}{\int g}}$$

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

Učení 2

Ze vzorce pro součin derivací lze odvodit následující velmi důležité tvrzení, tzv. integraci po částech (z latiny: per partes), která se používá pro integraci součinu dvou funkcí.

**VĚTA. (Integrace po částech)** Nechť funkce $f, g$ mají na intervalu $I$ derivace $f', g'$. Má-li $f'g$ na $I$ primitivní funkci $H$, má funkce $fg'$ na $I$ primitivní funkci $fg - H$, tj.,

$$\int fg' = fg - \int f'g \quad \text{na } I\,.$$

Pomocí integrace po částech lze zjistit mnoho primitivních funkcí-

| funkce $f$ | interval $I$ | prim.funkce k $f$ na $I$ |
|---|---|---|
| $x \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $-x\cos x + \sin x$ |
| $xe^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x(x-1)$ |
| $x^2 \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $-x^2\cos^2 x + 2x\sin x + 2\cos x$ |
| $\lg x$ | $(0, +\infty)$ | $x(\lg x - 1)$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\mathbb{R}$ | $x \operatorname{arctg} x - \lg(\sqrt{x^2+1})$ |
| $e^{ax}\sin(bx)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx))$ |

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

Učení 3

Ze vzorce o derivaci složené funkce lze získat tzv. větu o substituci pro integraci. Na rozdíl od derivace součinu nemá derivace složené funkce symetrický charakter a proto lze příslušnou větu o substituci napsat ve dvou verzích podle toho, z které strany rovnosti se vychází.

**VĚTA. (1. substituční věta)** Mějme následující situaci:

1. funkce $\varphi$ má derivaci na otevřeném intervalu $I$;
2. funkce $f$ je definována na otevřeném intervalu $J \supset \varphi(I)$;
3. $F$ je primitivní k funkci $f$ na $J$.

Potom funkce $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na $I$, tj.,

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{dx} = \int f(t)\,\mathrm{dt}$$

pro $x \in I$, kde za $t$ se musí po výpočtu dosadit $\varphi(x)$.

**VĚTA. (2. substituční věta.)** Mějme následující situaci:

1. funkce $\psi$ má nenulovou derivaci na otevřeném intervalu $J$;
2. funkce $f$ je definovaná na otevřeném intervalu $I = \psi(J)$;
3. $G$ je primitivní k funkci $(f \circ \psi) \cdot \psi'$ na $J$.

Potom funkce $G \circ \psi^{-1}$ je primitivní k $f$ na $I$, tj.,

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \int f((\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{dt}$$

pro $x \in I$, kde za $t$ se musí po výpočtu dosadit $\psi^{-1}(x)$.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Cvičení 4

Učení 4