VÝPOČET
SPECIÁLNÍCH PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ

Obecně nelze zadat algoritmus, který by vždy vedl k výpočtu primitivní funkce.

Pro různé situace se hodí různé metody (výpočtu!).

Jak již bylo několikrát zdůrazněno, nalezení vhodné metody závisí na zkušenosti.

Nicméně existují jisté třídy funkcí, pro které existuje algoritmus, který vždy vede k výpočtu jejich primitivní funkce.

Algoritmus máme např. pro racionální funkce a jejich složení s některými jinými funkcemi, např. s odmocninami nebo s goniometrickými funkcemi.

Výpočet těchto integrálů zvládnou i počítače …

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Z linearity neurčitého integrálu a znalosti primitivní funkce k x^n je zřejmý výpočet primitivní funkce polynomů.

Pro racionální funkce je postup složitější.

Nejdříve se musí racionální funkce rozložit na co nejjednodušší racionální funkce, pro které je již možné uvést vzorec pro jejich primitivní funkci.

V této části bude R značit racionální funkci $\frac{P}{Q}$, kde P, Q jsou polynomy stupňů n, m resp., a $m \geq 1$. Lze předpokládat, že koeficient u x^m v Q je 1.

Z algebry jsou známa následující fakta:

1. Je-li $n \geq m$, existují polynomy P_1, P_2, tak, že

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q}\,, \quad \text{stupeň } P_1 \text{ je } n-m, \text{ stupeň } P_2 \text{ je menší než } m\,.$$

Jde provést částečné dělení, aby v čitateli nebyly zbytečně veliké mocniny (chceme "slušné" zlomky).

2. Polynom Q lze napsat (jednoznačně) ve tvaru

$$Q(x) = (x-r_1)^{k_1} \cdots (x-r_p)^{k_p} \cdot (x^2+u_1x+v_1)^{l_1} \cdots (x^2+u_qx+v_q)^{l_q}\,,$$

kde $r_1, ..., r_p$ jsou různá reálná čísla (kořeny polynomu Q, k_i je násobnost kořenu r_i) a $x^2 + p_jx + q_j$ jsou kvadratické polynomy bez reálných kořenů (l_j je násobnost jejich komplexních kořenů) a pro různá j mají tyto polynomy různé komplexní kořeny.

Jde provést rozklad polynomu na součin kořenových činitelů (reálné kořeny vedou na dvojčleny, komplexně sdružené kořeny na trojčleny).

3. Racionální funkce $\frac{P_2}{Q}$ lze napsat jednoznačně ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{A_{i,k_i}}{(x-r_i)^{k_i}}+\ldots+\frac{A_{i,1}}{(x-r_i)}\right)+\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{B_{j,l_j}x+C_{j,l_j}}{(x^2+u_jx+v_j)^{l_j}}+\ldots+\frac{B_{j,1}x+C_{j,1}}{(x^2+u_jx+v_j)}\right),$$

kde koeficienty typu A, B, C jsou reálná čísla.

Slušné zlomky rozložíme na hodné zlomky. Ty pak integrujeme každý zvlášť'.

Poslední uvedený rozklad racionální funkce se nazývá rozklad na částečné (parciální) zlomky.

Získat takový rozklad (na parciální zlomky) znamená (viz příklady ve Cvičení)

1. Zjistit kořeny jmenovatele, pak formálně napsat uvedený rozklad, vynásobit rovnost jmenovatelem a získat tak rovnost dvou polynomů.

2. Srovnat koeficienty u jednotlivých mocnin x. Tím dostaneme soustavu lineárních rovnic pro neznámé koeficienty A, B, C s potřebnými indexy.

3. Tento systém vyřešíme (má jediné řešení).

V některých případech lze tento postup zjednodušit (viz *Příklady*).

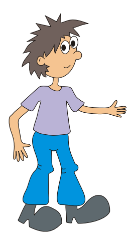
Integrace racionální funkce byla tedy převedena na integraci polynomu (někdy nulového) a součet jistých jednodušších racionálních funkcí, pro které lze jejich primitivní funkce snadno zjistit.

Dále uvedené primitivní funkce jsou definovány na stejné množině jako příslušné částečné zlomky.

Teď přijde opakování integrování, jsem zvědava ...

I. Funkce typu $\frac{1}{(x-r)^k}$ – jejich integrál je znám z předchozí kapitoly:

$$\int \frac{1}{(x-r)^k}\,\mathrm{dx} = \begin{cases} \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-r)^{k-1}}, & \text{pro } k \neq 1; \\ \lg|x-r|, & \text{pro } k = 1. \end{cases}$$



JASNĚĚĚĚ !!!

II. Funkce typu $\frac{Bx+C}{(x^2+ux+v)^l}$ se pro $B \neq 0$ nejdříve převede na tvar, kdy v čitateli je derivace kvadratického trojčlenu z jmenovatele, tj. na

$$\frac{B}{2}\frac{2x+u}{(x^2+ux+v)^l},$$

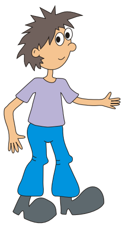
jehož integrál se substitucí $y = x^2 + ux + v$ převede na integrál z předchozí části I pro $r = 0, k = l$; zbyde výraz tvaru

$$\frac{C'}{(x^2+ux+v)^l},$$

který se pomocí úpravy na čtverec (viz *Příklady 4* v předchozí kapitole) převede na tvar

$$\frac{C''}{(y^2+1)^l}$$

a pro jeho integrál existuje rekurentní vzorec (viz *Příklady 3* v předchozí kapitole).



FÍHA !!!

Poznámky 1:

1. Při hledání koeficientů $A_{i,j}$ v rozkladu na racionální zlomky lze výhodně do rovnosti získané vynásobením jmenovatelem Q postupně za x dosazovat reálné kořeny. Dosazením $x = r_i$ se dostane hodnota A_{i,k_i}. V případě, že všechny reálné kořeny jsou jednoduché, získají se tímto postupem všechny hodnoty $A_{i,1}$.

Všechny ostatní koeficienty jsou vynásobeny výrazem $x - r_i$, tedy umlčeny.

2. Je-li kořen r_i jednoduchý, plyne z rovnosti

$$P_2(x) = A_{i,1} \frac{Q(x)}{x - r_i} + (x - r_i)(...)$$

pomocí limity $x \to r_i$ rovnost $A_{i,1} = \frac{P_2(r_i)}{Q'(r_i)}$.

Existují vzorce i pro dvojnásobné, trojnásobné kořeny, ale jsou už složitější.

3. Místo použití kvadratických trojčlenů při komplexně sdružených kořenech $z_j, \overline{z_j}$ lze použít rozklad na zlomky $\frac{D_{j,k}}{(x-z_j)^k}$, apod. pro $\overline{z_j}$, kde ovšem koeficienty D jsou komplexní čísla.

Příslušné části pro komplexně sdružené kořeny se pak sečtou, aby se dostal výsledek, kde nefigurují komplexní čísla.

4. Další možností, jak lze někdy zjednodušit postup při hledání koeficientů A, B, C, je zderivovat obě strany.

V konkrétních případech se výše uvedené postupy kombinují, aby byl výpočet co nejkratší.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Rozložte na částečné zlomky racionální funkce (použijte různé postupy získání koeficientů vysvětlené v *Poznámkách*

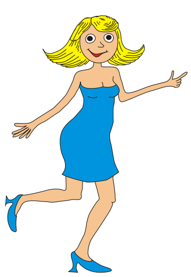
$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,, \quad \frac{x-1}{(x+1)^3}\,, \quad \frac{x^5+x^4-1}{x^3+x+2}\,.$$

2. Najděte primitivní funkci k

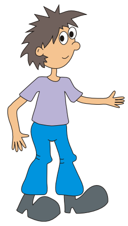
$$\frac{3}{(x+2)^4}\,, \quad \frac{2}{x+10}\,, \quad \frac{2x+5}{x^2-6x+10}\,, \quad \frac{x}{(x^2+4)^2}\,.$$

3. Rozložte na částečné zlomky racionální funkci

$$\frac{1}{x^4+1}\,.$$



Rozklad x^4+1 lze získat přičtením a odečtením $2x^2$ ve jmenovateli, tím se tam získá rozdíl čtverců.



To jsou vychytávky ...

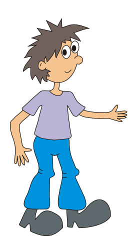
Konec příkladů 1.

Cvičení 1:

Jdeme do parciálních zlomků.

Každá racionální funkce má pěkný rozklad. Například takovýhle:

$$\frac{x^8+x+1}{x^3-3\,x+2} = x^5+3\,x^3-2\,x^2+9\,x-12+\frac{85/3}{2+x}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{8/3}{x-1}\,.$$



Jémine !

Všimneme si, že tam jsou polynomy a nějaké zlomky.

Ty zlomky vycházejí z kořenů jmenovatele.

Například:

$$\frac{426 + 990\,x + 870\,x^2 + 367\,x^3 + 75\,x^4 + 6x^5}{(x+1)\,(2+x)^2\,(x+3)^3}$$

má rozklad

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2} + \frac{3}{(x+3)^3}\,.$$

To je náhodička, cóóó ?

Příklad. Zjistěte rozklad na parciální zkomky u funkce

$$\frac{4x^2 + 12\,x + 12}{(x+1)^2\,(x+3)}\,.$$

Řešení. Rozklad lze psát

$$\frac{4x^2 + 12\,x + 12}{(x+1)^2\,(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

s neznámými koeficienty A, B a C.

Roznásobíme tuto rovnost jmenovatelem a dostaneme vztah

$$4x^2 + 12\,x + 12 = A(x+1)(x+3) \;+\; B(x+3) \;+\; C(x+1)^2\,.$$

Jedná se o dva polynomy, které se rovnají.

Porovnáním koeficientů u x^2, x a 1 v rovnosti dvou polynomů dostaneme tři rovnice pro tři neznámé A, B a C.

Jejich řešení je jasně $A = 1$, $B = 2$ a $C = 3$.

Jiný postup:
Dosazením $x = -1$ do rovnice

$$4x^2 + 12\,x + 12 = A(x+1)(x+3) \;+\; B(x+3) \;+\; C(x+1)$$

spočítáme jednoduše $B = 2$.
Podobně s $x = -3$ dostaneme $C = 3$. Pak lehce dosadíme známé hodnoty B a C a spočítáme $A = 1$.
Výsledkem je

$$\frac{4x^2 + 12\,x + 12}{(x+1)^2\,(x+3)} \;=\; \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+3}\,.$$

Limitujícím faktorem takovýchto hrátek je počet neznámých. Nerad počítám soustavu o 4 neznámých . . .

Také nerad řeším rovnice pátého stupně ;-)

O co jde:

Jmenovatel $Q(x)$ musíme rozložit na kořenové činitele. Každý kořen $x = \alpha$ násobnosti r generuje r parciálních zlomků

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} \,.$$

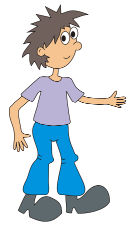
Pokud trojčlen $x^2 + px + q$ v rozkladu $Q(x)$ nemá reálné kořeny, má dva komplexně sdružené kořeny násobnosti r a ty podobně generují p parciálních zlomků

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{A_r x + B_r}{(x^2+px+q)^r} \,.$$

Tak pro jmenovatel $Q(x)$ stupně r dostaneme soustavu o r neznámých koeficientech.

Komplikovanější příklady raději s počítačem . . .

Příklady k ručnímu počítání zpravidla "někdo" pečlivě nachystal tak, aby vyšly . . .



Dík :-)

Příklad. Zintegrujte parciální zkomek

$$\frac{4x+7}{x^2+2x+2}\,.$$

Řešení. Zjistíme snadno, že jmenovatel je ve tvaru $1+(x+1)^2$ a že nemá reálné kořeny. Jedná se tedy o parciální zlomek příslušný nějaké dvojici komplexně sdružených kořenů.
Napíšeme zadaný zlomek jako lineární kombinaci zlomků

$$\frac{2x+2}{1+(x+1)^2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{1+(x+1)^2}\,,$$

u kterých umíme lehce spočítat primitivní funkce (jde o funkce $\log(1+(x+1)^2)$ a $\operatorname{arctg}(x+1)$).

Hledaná kombinace je

$$\frac{4x+7}{1+(x+1)^2} = 2\cdot\frac{2x+2}{1+(x+1)^2} \;+\; 3\cdot\frac{1}{1+(x+1)^2}\,.$$

$$\int \frac{4x+7}{x^2+2x+2}\,\mathrm{dx} \stackrel{C}{=} 2\cdot\log(1+(x+1)^2) \;+\; 3\cdot\operatorname{arctg}(x+1)\,, x\in\mathbb{R}\,.$$

Také se napřed mohlo substituovat $x+1=t$ a pak rozkládat a integrovat:

$$\int \frac{4x+7}{x^2+2x+2}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\ \mathrm{S}: \begin{array}{c} x+1=t \\ \mathrm{dx}\ =\ \mathrm{dt} \\ x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R} \end{array}\right] \stackrel{S}{=} \int \frac{4t+3}{t^2+1}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int 2\cdot\frac{2t}{t^2+1} \;+\; 3\cdot\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=} 2\cdot\log(1+t^2) \;+\; 3\cdot\operatorname{arctg} t \stackrel{S}{=}$$

$$\stackrel{S}{=} 2\cdot\log(1+(x+1)^2) \;+\; 3\cdot\operatorname{arctg}(x+1)\,, x\in\mathbb{R}\,.$$

Obecně si dávejte u těch trojčlenů pozor na tu lineární substituci, která z x^2+px+q dělá t^2+1. Je to sice "jenom" lineární substituce, ale …

Při rozkladu jmenovatele $Q(x)$ na součin kořenových činitelů se hodí vzorečky $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ a podobné:

Příklad. Rozložte x^4+1 na součin kořenových činitelů.

Řešení.

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+1+\sqrt{2}\,x)(x^2+1-\sqrt{2}\,x)\,.$$

Konec cvičení 1.

Učení 1:

x^3+1 má kořeny ± 1 ?

Doporučuji 50 na 50 nebo přítele na telefonu.

Konec učení 1.

PŘEVOD FUNKCÍ NA RACIONÁLNÍ FUNKCE

Některé funkce vzniklé substitucí do racionálních funkcí, se dají integrovat pomocí převodu jinými substitucemi zpět na (obecně jiné) racionální funkce.

V dalším textu bude R značit racionální funkci jedné nebo dvou proměnných. Racionální funkce dvou proměnných x, y je podíl dvou polynomů dvou proměnných x, y, tj funkcí vzniklých konečnými násobky a součty obou proměnných a konstant (např. $3x^2y^7 - 6x^3 + xy^4 - 9$); polynomy jsou definovány pro všechna reálná x, y, racionální funkce pro ta x, y, pro která je jmenovatel nenulový.

$\int R(e^{ax})\,\mathrm{dx}$

Tyto integrály (a je libovolné reálné nenulové číslo) se převedou na integraci racionálních funkcí pomocí substituce $e^{ax} = t$:

$$\int R(e^{ax})\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \frac{1}{a}\int \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{dt}\,.$$

Klasická situace. Hledaná substituce z příkladu kouká na 100 honů. Není třeba si pamatovat tu pravou stranu, ono se to ukáže samo. Například:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,\mathrm{dx} \quad \stackrel{S}{=} \quad \left[\begin{array}{cc} & e^{2x} = t \\ \mathrm{S}: & 2e^{2x}\,\mathrm{dx} \;=\; \mathrm{dt} \\ & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ \end{array}\right] \stackrel{S}{=} \int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \quad \log|t+1|) \stackrel{S}{=} \log|e^{2x}+1|\,, x \in \mathbb{R}\,.$$

$\int \frac{R(\lg x)}{x}\,\mathrm{dx}$

Tyto integrály se převádějí na integraci racionální funkce substitucí $\lg x = t$:

$$\int \frac{R(\lg x)}{x}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \int R(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Klasická situace. Hledaná substituce z příkladu kouká na 100 honů. Například:

$$\int \frac{1+\log x}{x\log x}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\ \mathrm{S}: \begin{array}{c} \log x = t \\ 1/x\,\mathrm{dx} \;=\; \mathrm{dt} \\ x\in(1,\infty), t\in\mathbb{R} \end{array}\right] \stackrel{S}{=} \int \frac{t+1}{t}\,\mathrm{dt} = \int 1+\frac{1}{t}\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=}$$
$$\stackrel{C}{=} t+\log|t|) \stackrel{S}{=} \log x + \log|\log x|\,, x\in(1,\infty)\,.$$

Příklady 2:

Najděte primitivní funkce k

$$\frac{e^{3x}-1}{e^x+1}\,,\qquad \frac{1}{x(\lg^2 x+1)}\,.$$

Konec příkladů 2.

$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{dx}$

V tomto případě lze vždy použít substituci

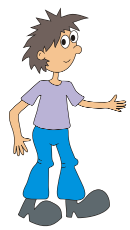
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad \Longrightarrow \sin x = \frac{2t}{t^2+1}\,, \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}\,, \mathrm{dx} = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{dt}\,.$$

Pozor. Výpočet s touto substitucí není jednoduchý. Pokud to jde, je lépe se jí vyhnout.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\ \mathrm{S}: \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \mathrm{dx} = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{dt} \\ x\in(0,\pi), t\in\mathbb{R} \end{array}\right] \stackrel{S}{=} \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{dt} =$$
$$= \int \frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{dt} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\cdot t - \frac{1}{2t} \stackrel{S}{=} \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,.$$

Výsledek platí na otevřených intervalech tvaru $(k\pi,(k+1)\pi)$, kde $k\in\mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ je obecná substituce. Zpravidla vede na "lepení" (viz *Příklady 2* v předchozí kapitole). Navíc se dvakrát zvyšují stupně daných polynomů. Takže hodně štěstí ...



Konců raději nedomýšlím ...

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{dx}$$

pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Pro takto "sudou" funkci R volíme substituci:

$$\operatorname{tg} x = t \qquad \Longrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}\,, \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}\,,\ \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{t^2+1}\,.$$

Například

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx} \quad \stackrel{S}{=} \quad \left[\ \mathrm{S}: \quad \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ \mathrm{dx} = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{dt} \\ x \in (0, \pi/2), t \in \mathbb{R} \end{array} \right] \stackrel{S}{=} \int \frac{1}{\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \quad \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} \ \stackrel{C}{=}\ -\frac{1}{t} \ \stackrel{S}{=}\ -\frac{1}{\operatorname{tg} x}\,.$$

Jestliže byla hledána primitivní funkce na $(0, \pi)$ (jak to bude na jiných intervalech?), předchozí postup z tohoto intervalu vynechává bod $\pi/2$ a dává primitivní funkci na $(0, \pi/2)$ nebo na $(\pi/2, \pi)$. Napíšeme-li výsledek jako $\frac{\cos x}{\sin x}$, dostáváme primitivní funkci na celém intervalu $(0, \pi)$ (proč?).

O něco lepší než obecná $\operatorname{tg} x/2 = t$ je substituce $\operatorname{tg} x = t$, která alespoň nezvyšuje stupně polynomů (jak jsme viděli), ale „lepení" obecně zůstává.

Je-li R lichá v jedné proměnné, dostane se nejjednodušší substituce, která nevyžaduje „lepení":

$$\begin{aligned} \cos x = t \quad & \text{pokud } R(-\sin x, \cos x) && = -R(\sin x, \cos x)\,, \\ \sin x = t \quad & \text{pokud } R(\sin x, -\cos x) && = -R(\sin x, \cos x)\,. \end{aligned}$$

Například

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \left[\ \mathrm{S}: \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos\ \mathrm{dx} = \mathrm{dt} \\ x \in (0,\pi), t \in (0,1] \end{array} \right] \overset{S}{=} \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} -\frac{1}{t} \overset{S}{=} -\frac{1}{\sin x}\,, x \in (0,\pi)\,.$$

Příklady 3:

Najděte primitivní funkce k

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,, \qquad \frac{1}{1 + 3\cos^2 x}\,, \qquad \frac{1}{2 - \sin x}\,.$$

Uvědomte si, kde musí primitivní funkce existovat a zda jste opravdu na těchto intervalech výsledek dostali.

Konec příkladů 3.

$\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{dx}$

Zde je p přirozené číslo a a, b, c, d jsou reálná čísla splňující vhodné podmínky, aby následující postup a výrazy měly smysl (např. $ad - bc \neq 0$).

Substituce

$$\sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

převede daný integrál na integrál z racionální funkce.

Je to první substituce, která člověka napadne. Musíme přidat další podrobnosti:

Po umocnění

$$\sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

dostaneme

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$

a je patrno, že dovedeme vyjádřit x pomocí t.

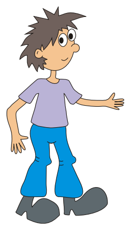
Dostaneme

$$x = \frac{dt^p - b}{a - ct^p}\,.$$

Nyní použijeme tento vztah jako substituci pro druhou substituční metodu (ověřte předpoklady 2. substituční věty)!

Opravdu! Dovedeme nahradit x, $\mathrm{d}x$ i tu protivnou odmocninu pomocí racionálních funkcí v proměnné t:

$$x = \frac{dt^p - b}{a - ct^p}\,,\ \mathrm{d}x = \left(\frac{dt^p - b}{a - ct^p}\right)' \mathrm{d}t\,,\ \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t\,.$$



A asi ješte budu muset hlídat intervaly, kde to dělám …

Například

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}{x^2}\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \left[\begin{array}{ccc} & \sqrt{\frac{x+1}{x}}=t & x=\frac{1}{t^2-1} \\ \mathrm{S}: & \text{Ověříme 2.SM !!!} & \mathrm{dx}=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{dt} \\ & x\in(0,\infty) & t\in(1,\infty) \end{array}\right] \overset{S}{=}$$

$$\overset{S}{=} \int -\frac{t+1}{(\frac{1}{t^2-1})^2}\cdot\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{dt} = -\int 2t^2+2t\ \mathrm{dt} \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{2}{3}t^3-t^2 \overset{S}{=} -\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)^3-\frac{x+1}{x}\,, x\in(0,\infty)\,.$$

Jen tak tak …

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{dx}$$

Pokud je $a>0$, lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t\,,\ \text{pak umocněním se vyřeší } x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\,,$$

odkud lze dosazením získat výraz pro $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a pro dx. V uvedené substituci lze na pravé straně měnit znaménka; např. někdy bývá výhodnější (podle tvaru integrované funkce) použít $\sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}x+t$.

Pokud je $c>0$, lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+tx\,,\ \text{pak umocněním se vyřeší } x=\frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}\,,$$

odkud lze dosazením získat výraz pro $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a pro dx. I zde lze na pravé straně substituce měnit znaménka.

Ověřte předpoklady 2. substituční věty pro obě substituce.

Těmto substitucím se říká Eulerovy substituce.

Zkusíme Eulerovy substituce na příkladech:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \left[\begin{array}{lcc} & \sqrt{x^2+x+1}=-x+t & x=\frac{t^2-1}{1+2t} \\ \mathrm{S:} & \text{Ověříme 2.SM !!!} & \mathrm{dx}=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{dt} \\ & x\in(-1,\infty) & t\in(0,\infty) \end{array}\right] \overset{S}{=}$$

$$\overset{S}{=} \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,\mathrm{dt} = \dots .$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \left[\begin{array}{lcc} & \sqrt{x^2+x+1}=xt-1 & x=\frac{2t-2}{1+t^2} \\ \mathrm{S:} & \text{Ověříme 2.SM !!!} & \mathrm{dx}=\frac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{dt} \\ & x\in & t\in \end{array}\right] \overset{S}{=}$$

$$\overset{S}{=} \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{dt} = \dots .$$

…a parciální zlomky umí každý.

Jak je vidět, je třeba dávat pozor na intervaly, v kterých se pracuje (kvůli znaménkům).

NAVÍC: Pokud má dvojčlen ax^2+bx+c reálné kořeny (např. když $a<0, c>0$), lze převést odmocninu v

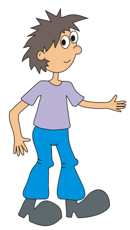
$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{dx}$$

na lineárně lomenou funkci.
Např., má-li $ax^2 + bx + c$ polynom kořeny $\alpha < \beta$, pak úprava (pro jednoduchost $a = -1$)

$$\sqrt{-x^2 + bx + c} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)} = (\beta - x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta - x}}\,,$$

vše na intervalu (α, β).
Dostaneme se k integrálu typu

$$\int Q\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,\mathrm{dx}\,.$$



Z bláta do louže ...

Zkusíme si to na příkladě

$$\int \frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}\,.$$

Zde $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, tedy (pro $x \in (-1, 1)$)

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)^2\frac{1+x}{1-x}} = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$

Zvolíme substituci

$$t = \frac{1+x}{1-x}\,.$$

Výpočet je standardní:

$$\int \frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \left[\ \mathrm{S:}\quad \begin{array}{c} \frac{1+x}{1-x} = t \\ \frac{2}{(x-1)^2}\,\mathrm{dx} = \mathrm{dt} \\ x \in (-1,1),\ t \in (0, \infty) \end{array} \right] \overset{S}{=}$$

$$\overset{S}{=} \int \frac{t^4 - 1}{3t^4 + 1}\,\mathrm{dt} = \dots\,.$$

Existují i další postupy pro jiné speciální případy – viz různé sbírky příkladů.

Příklady 4:

Najděte primitivní funkce k

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}\,, \quad \frac{x-2-\sqrt{4-4x-x^2}}{x^2\sqrt{4-4x-x^2}}\,, \quad \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}\,, \quad \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\,.$$

Nezapomínejte zapisovat intervaly, na kterých výsledek platí.

Konec příkladů 4.