VÝPOČET
SPECIÁLNÍCH PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ

Obecně nelze zadat algoritmus, který by vždy vedl k výpočtu primitivní funkce.

Nicméně existují jisté třídy funkcí, pro které existuje algoritmus, který vždy vede k výpočtu jejich primitivní funkce.

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Z linearity neurčitého integrálu a znalosti primitivní funkce k x^n je zřejmý výpočet primitivní funkce polynomů.

Pro racionální funkce je postup složitější.

V této části bude R značit racionální funkci $\frac{P}{Q}$, kde P, Q jsou polynomy stupňů n, m resp., a $m \geq 1$. Lze předpokládat, že koeficient u x^m v Q je 1.

1. Je-li $n \geq m$, existují polynomy P_1, P_2, tak, že

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q}\,, \quad \text{stupeň } P_1 \text{ je } n-m, \text{ stupeň } P_2 \text{ je menší než } m\,.$$

2. Polynom Q lze napsat (jednoznačně) ve tvaru

$$Q(x) = (x-r_1)^{k_1} \cdots (x-r_p)^{k_p} \cdot (x^2+u_1x+v_1)^{l_1} \cdots (x^2+u_qx+v_q)^{l_q}\,,$$

kde $r_1, ..., r_p$ jsou různá reálná čísla (kořeny polynomu Q, k_i je násobnost kořenu r_i) a $x^2 + p_jx + q_j$ jsou kvadratické polynomy bez reálných kořenů (l_j je násobnost jejich komplexních kořenů) a pro různá j mají tyto polynomy různé komplexní kořeny.

3. Racionální funkce $\frac{P_2}{Q}$ lze napsat jednoznačně ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\frac{A_{i,k_i}}{(x-r_i)^{k_i}} + ... + \frac{A_{i,1}}{(x-r_i)}\Big) + \sum_{j=1}^{q}\Big(\frac{B_{j,l_j}x + C_{j,l_j}}{(x^2+u_jx+v_j)^{l_j}} + ... + \frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{(x^2+u_jx+v_j)}\Big)\,,$$

kde koeficienty typu A, B, C jsou reálná čísla.

Získat takový rozklad (na parciální zlomky) znamená (viz příklady ve Cvičení)

1. Zjistit kořeny jmenovatele, pak formálně napsat uvedený rozklad, vynásobit rovnost jmenovatelem a získat tak rovnost dvou polynomů.

2. Srovnat koeficienty u jednotlivých mocnin x. Tím dostaneme soustavu lineárních rovnic pro neznámé koeficienty A, B, C s potřebnými indexy.

3. Tento systém vyřešíme (má jediné řešení).

Integrace racionální funkce byla tedy převedena na integraci polynomu (někdy nulového) a součet jistých jednodušších racionálních funkcí, pro které lze jejich primitivní funkce snadno zjistit.

Dále uvedené primitivní funkce jsou definovány na stejné množině jako příslušné částečné zlomky.

I. Funkce typu $\frac{1}{(x-r)^k}$ – jejich integrál je znám z předchozí kapitoly:

$$\int \frac{1}{(x-r)^k}\,\mathrm{dx} = \begin{cases} \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-r)^{k-1}}, & \text{pro } k \neq 1; \\[2ex] \lg|x-r|, & \text{pro } k = 1. \end{cases}$$

II. Funkce typu $\frac{Bx+C}{(x^2+ux+v)^l}$ se pro $B \neq 0$ nejdříve převede na tvar, kdy v čitateli je derivace kvadratického trojčlenu z jmenovatele, tj. na

$$\frac{B}{2}\,\frac{2x+u}{(x^2+ux+v)^l}\,,$$

jehož integrál se substitucí $y = x^2+ux+v$ převede na integrál z předchozí části I pro $r=0, k=l$; zbyde výraz tvaru

$$\frac{C'}{(x^2+ux+v)^l}\,,$$

který se pomocí úpravy na čtverec (viz *Příklady 4* v předchozí kapitole) převede na tvar

$$\frac{C''}{(y^2+1)^l}$$

a pro jeho integrál existuje rekurentní vzorec (viz *Příklady 3* v předchozí kapitole).

Poznámky 1 Příklady 1 Cvičení 1

Učení 1

PŘEVOD FUNKCÍ NA RACIONÁLNÍ FUNKCE

Některé funkce vzniklé substitucí do racionálních funkcí, se dají integrovat pomocí převodu jinými substitucemi zpět na (obecně jiné) racionální funkce.

$\int R(e^{ax})\,\mathrm{dx}$

Tyto integrály (a je libovolné reálné nenulové číslo) se převedou na integraci racionálních funkcí pomocí substituce $e^{ax} = t$:

$$\int R(e^{ax})\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \frac{1}{a}\int \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{dt}\,.$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,\mathrm{dx} \quad \overset{S}{=} \quad \left[\ \mathrm{S}: \quad \begin{matrix} e^{2x} = t \\ 2e^{2x}\,\mathrm{dx} \ = \ \mathrm{dt} \\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+ \end{matrix}\ \right] \overset{S}{=} \int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{dt} \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} \quad \log|t+1|) \overset{S}{=} \log|e^{2x}+1|\,, x \in \mathbb{R}\,.$$

$\int \frac{R(\lg x)}{x}\,\mathrm{dx}$

Tyto integrály se převádějí na integraci racionální funkce substitucí $\lg x = t$:

$$\int \frac{R(\lg x)}{x}\,\mathrm{dx} \overset{S}{=} \int R(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

$$\int \frac{1+\log x}{x\log x}\,\mathrm{dx} \quad \overset{S}{=} \quad \left[\ \mathrm{S}: \quad \begin{matrix} \log x = t \\ 1/x\,\mathrm{dx} \ = \ \mathrm{dt} \\ x \in (1,\infty), t \in \mathbb{R} \end{matrix}\ \right] \overset{S}{=} \int \frac{t+1}{t}\,\mathrm{dt} = \int 1 + \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} \quad t + \log|t|) \overset{S}{=} \log x + \log|\log x|\,, x \in (1,\infty)\,.$$

Příklady 2

$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{dx}$

V tomto případě lze vždy použít substituci

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}\,, \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}\,, \ \mathrm{dx} = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{dt}\,.$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx} \quad \overset{S}{=} \quad \left[\ \mathrm{S:} \quad \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \mathrm{dx} = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{dt} \\ x \in (0,\pi), t \in \mathbb{R} \end{array}\ \right] \overset{S}{=} \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{dt} =$$
$$= \int \frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{dt} \overset{C}{=} \frac{1}{2}\cdot t - \frac{1}{2t} \overset{S}{=} \frac{1}{2}\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,.$$

Výsledek platí na otevřených intervalech tvaru $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{dx}$

pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

$$\operatorname{tg} x = t \qquad \Longrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}\,, \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}\,, \ \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{t^2+1}\,.$$

Například

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx} \quad \overset{S}{=} \quad \left[\ \mathrm{S:} \quad \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ \mathrm{dx} = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{dt} \\ x \in (0,\pi/2), t \in \mathbb{R} \end{array}\ \right] \overset{S}{=} \int \frac{1}{\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{dt} =$$
$$= \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} \overset{C}{=} -\frac{1}{t} \overset{S}{=} -\frac{1}{\operatorname{tg} x}\,.$$

Jestliže byla hledána primitivní funkce na $(0,\pi)$ (jak to bude na jiných intervalech?), předchozí postup z tohoto intervalu vynechává bod $\pi/2$ a dává primitivní funkci na $(0,\pi/2)$ nebo na $(\pi/2,\pi)$. Napíšeme-li výsledek jako $\frac{\cos x}{\sin x}$, dostáváme primitivní funkci na celém intervalu $(0,\pi)$ (proč?).

$$\begin{array}{rlcl} \cos x = t & \text{pokud } R(-\sin x, \cos x) & = & -R(\sin x, \cos x)\,, \\ \sin x = t & \text{pokud } R(\sin x, -\cos x) & = & -R(\sin x, \cos x)\,. \end{array}$$

Například

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx} \quad \overset{S}{=} \quad \left[\ \mathrm{S:} \quad \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos\ \mathrm{dx} = \mathrm{dt} \\ x \in (0,\pi), t \in (0,1] \end{array}\ \right] \overset{S}{=} \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} \quad -\frac{1}{t} \overset{S}{=} -\frac{1}{\sin x}\,, x \in (0,\pi)\,.$$

Příklady 3

$\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{dx}$

Zde je p přirozené číslo a a, b, c, d jsou reálná čísla splňující vhodné podmínky, aby následující postup a výrazy měly smysl (např. $ad - bc \neq 0$).

Substituce

$$\sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

převede daný integrál na integrál z racionální funkce.

Po umocnění
$$\sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} \;=\; t$$
dostaneme
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$
a je patrno, že dovedeme vyjádřit x pomocí t.

Dostaneme
$$x \;=\; \frac{dt^p - b}{a - ct^p} \,.$$

$$x \;=\; \frac{dt^p - b}{a - ct^p} \,,\, \mathrm{dx} \;=\; \left(\frac{dt^p - b}{a - ct^p}\right)' \mathrm{dt} \,,\; \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}} \;=\; t \,.$$

Například

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}{x^2}\,\mathrm{dx} \;\stackrel{S}{=}\; \left[\begin{array}{ccc} & \sqrt{\frac{x+1}{x}} = t & x = \frac{1}{t^2-1} \\ \text{S :} & \text{Ověříme 2.SM !!!} & \mathrm{dx} = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{dt} \\ & x \in (0,\infty) & t \in (1,\infty) \end{array}\right] \stackrel{S}{=}$$
$$\stackrel{S}{=} \int -\frac{t+1}{(\frac{1}{t^2-1})^2} \cdot \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{dt} = -\int 2t^2 + 2t\ \mathrm{dt} \stackrel{C}{=}$$
$$\stackrel{C}{=} -\frac{2}{3}t^3 - t^2 \stackrel{S}{=} -\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)^3 - \frac{x+1}{x} \,, x \in (0,\infty)\,.$$

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{dx}$

Pokud je $a > 0$, lze použít substituci
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t\,,\ \text{pak umocněním se vyřeší } x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\,,$$
odkud lze dosazením získat výraz pro $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a pro dx. V uvedené substituci lze na pravé straně měnit znaménka; např. někdy bývá výhodnější (podle tvaru integrované funkce) použít $\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + t$.

Pokud je $c > 0$, lze použít substituci
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx\,,\ \text{pak umocněním se vyřeší } x = \frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}\,,$$
odkud lze dosazením získat výraz pro $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a pro dx. I zde lze na pravé straně substituce měnit znaménka.

Ověřte předpoklady 2. substituční věty pro obě substituce.

Zkusíme Eulerovy substituce na příkladech:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{dx} \;\stackrel{S}{=}\; \left[\begin{array}{ccc} & \sqrt{x^2+x+1} = -x+t & x = \frac{t^2-1}{1+2t} \\ \text{S :} & \text{Ověříme 2.SM !!!} & \mathrm{dx} = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,\mathrm{dt} \\ & x \in (-1,\infty) & t \in (0,\infty) \end{array}\right] \stackrel{S}{=}$$
$$\stackrel{S}{=} \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,\mathrm{dt} = \dots\,.$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\begin{array}{lcc} & \sqrt{x^2+x+1}=xt-1 & x=\frac{2t-2}{1+t^2} \\ \mathrm{S:} & \text{Ověříme 2.SM !!!} & \mathrm{dx}=\frac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{dt} \\ & x\in & t\in \end{array}\right] \stackrel{S}{=}$$

$$\stackrel{S}{=} \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{dt} = \ldots\ .$$

NAVÍC: Pokud má dvojčlen ax^2+bx+c reálné kořeny (např. když $a<0, c>0$), lze převést odmocninu v

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{dx}$$

na lineárně lomenou funkci.

Např., má-li ax^2+bx+c polynom kořeny $\alpha<\beta$, pak úprava (pro jednoduchost $a=-1$)

$$\sqrt{-x^2+bx+c}=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\,,$$

vše na intervalu (α,β).

Dostaneme se k integrálu typu

$$\int Q\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{dx}\ .$$

Zkusíme si to na příkladě

$$\int \frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}\ .$$

Zde $1-x^2=(1-x)(1+x)$, tedy (pro $x\in(-1,1)$)

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1-x)^2\frac{1+x}{1-x}}=(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ .$$

Zvolíme substituci

$$t=\frac{1+x}{1-x}\ .$$

Výpočet je standardní:

$$\int \frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\begin{array}{lc} & \frac{1+x}{1-x}=t \\ \mathrm{S:} & \frac{2}{(x-1)^2}\,\mathrm{dx}=\mathrm{dt} \\ & x\in(-1,1),\ t\in(0,\infty) \end{array}\right] \stackrel{S}{=}$$

$$\stackrel{S}{=} \int \frac{t^4-1}{3t^4+1}\,\mathrm{dt} = \ldots\ .$$

<u>Příklady 4</u>