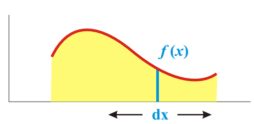
NEWTONŮV INTEGRÁL

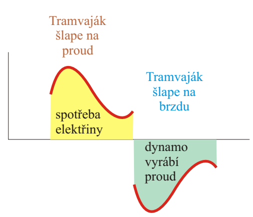
V předchozích kapitolách byla popsána inverzní operace k derivování. Zatím nebylo jasné, k čemu tento nástroj slouží.

Bylo uvedeno, že rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot primitivní funkce k f má jistý geometrický smysl, a to velikost plochy mezi osou x a grafem f na intervalu (a, b) (pro nezápornou spojitou funkci).

Později se ukáže, že má tento rozdíl mnoho jiných aplikací pro zjišťování globální hodnoty pomocí součtu maličkých nekonstantních hodnot.



Uvažujme tramvaj, která je poháněna elektřinou a při brždění vyrábí dynamem elektřinu:



Plocha pod první částí grafu funkce se bere s kladným znaménkem, plocha nad druhou částí se záporným. Získá se celková elektrická náročnost.

Proto je pro počítání ploch a podobných záležitostí vhodná následující definice, kde se na rozdíl od geometrické interpretace nepředpokládá, že f je spojitá a nezáporná.

Definice je vhodná pro integraci funkcí, které mají primitivní funkci. Tím jsou vynechány jednoduché funkce typu signum, monotónní funkce se skoky apod.

V další kapitole bude proto uvedena značně obecnější definice. Výpočet těchto obecnějších integrálů bývá ale většinou sveden k výpočtu integrálů z této kapitoly (nebo jsou použity nějaké triky).

Proto je následujícímu speciálnímu integrálu věnována větší pozornost.

DEFINICE URČITÉHO INTEGRÁLU

DEFINICE. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a jsou splněny následující tři podmínky:

1. f má na (a, b) primitivní funkci F;
2. existují $\lim\limits_{x\to a_+} F(x) = F(a_+)$, $\lim\limits_{x\to b_-} F(x) = F(b_-)$;
3. rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ má smysl.

Pak se rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ nazývá Newtonův integrál funkce f na (a, b). Značení

$$F(b_-) - F(a_+) = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,,$$

kde a se nazývá dolní mez a b horní mez integrálu.

Rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ se často značí symbolem $[F(x)]_{x=a}^b$ nebo jen $[F(x)]_a^b$, $[F]_a^b$,.

Dále se formálně definuje

$$(N)\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,,\ \text{pro } b > a\,, \quad (N)\int_c^c f(x)\,\mathrm{dx} = 0 \text{ pro libovolné } c\,.$$

V této kapitole budou probírány jen Newtonovy integrály, a proto bude slovo „Newtonův" a písmeno „N" u integrálu někdy vynecháváno.

Na rozdíl od neurčitého integrálu z kapitoly o primitivních funkcích se tento integrál nazývá *určitý*, protože jeho hodnotou není množina funkcí, ale jedno určité číslo.

Předchozí definice říká, kdy má integrál smysl. Jeho hodnota může být i nevlastní.

Pokud je hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ vlastní, říká se, že integrál konverguje.

Množina všech funkcí, které mají konvergentní integrál na intervalu (a, b), se značí $N(a, b)$.

POZOROVÁNÍ. Nechť existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

- Jestliže $a \le c < d \le b$, pak existuje $\int_c^d f(x)\,\mathrm{dx}$.
- Jestliže $a < c < d < b$, pak $f \in N(c,d)$.
- Pro každé $c \in (a,b)$ je
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$$
- Pro každé $x \in (a,b)$ je
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} = f(x)\,.$$

Z kapitoly o primitivních funkcí je známo, že každá spojitá funkce na intervalu tam má primitivní funkci (viz větu o konstrukci primitivní funkce).

Následující tvrzení popisuje jednoduché případy, kdy navíc existuje i integrál.

VĚTA. (Integrál spojité funkce)

1. Každá spojitá omezená funkce na omezeném intervalu náleží do $N(a,b)$.
2. Každá spojitá nezáporná funkce f na intervalu (a,b) má integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ (a ten je nezáporný).

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) (ta existuje). Zbývá ukázat, že existují limity F v krajních bodech a rozdíl těchto limit má smysl. To je zřejmé, pokud je f spojitá na $[a,b]$ (pak je i F spojitá na $[a,b]$).

Pro důkaz prvního tvrzení stačí dokázat, že existuje vlastní $\lim_{x\to a_+} F(x)$ (pro bod b je důkaz obdobný), což znamená, že pro libovolnou posloupnost x_n z (a,b) klesající k a je posloupnost $\{F(x_n)\}$ cauchyovská. To vyplývá z věty o střední hodnotě:

$$|F(x_n) - F(x_m)| \le \sup\{|f(x)|; x \in (a,b)\}|x_n - x_m|\,.$$

Důkaz je též snadný pro druhé tvrzení, neboť F je neklesající (její derivace je nezáporná) a tedy má limity v krajních bodech, což je supremum, resp. infimum, hodnot F a tedy i jejich rozdíl má smysl a je nezáporný.

Nyní bude upřesněna geometrická interpretace z kapitoly o primitivních funkcích.

VĚTA. (Newton versus Riemann) Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $[a,b]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno nějaké rozdělení $a = x_0 < x_{1,n} < \dots < x_{k_n,n} = b$ intervalu $[a,b]$ takové, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

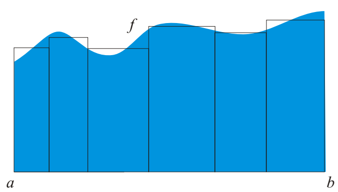
Pak pro libovolně zvolená čísla $c_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ je

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k_n} f(c_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Důkaz. Nechť ε je libovolné kladné číslo. Podle věty o stejnoměrné spojitosti funkce na kompaktním intervalu existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ jakmile $|x-y| < 1/n$ a $x, y \in [a,b]$. Nyní se vezme libovolné rozdělení $a = x_0 < x_{1,m} < \dots < x_{k_m,m} = b$ popsané ve znění věty, které má délky intervalů nejvýše $1/n$.

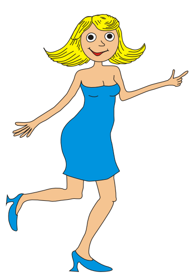
V motivačním úvodu bylo ukázáno, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k_m} f(c_i)(x_{i,m} - x_{i-1,m})$ pro nějaké body $c_i \in (x_{i-1,m}, x_{i,m})$ (uvědomte si, že předpoklad nezáporné funkce byl v motivaci použit jen na geometrické znázornění ploch, nikoli na výpočet sumy). Platí tedy

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{k_m} f(c_{i,m})(x_{i,m} - x_{i-1,m}) \Big| &\le \\ \sum_{i=1}^{k_m} |f(c_i) - f(c_{i,m})|(x_{i,m} - x_{i-1,m}) &\le \varepsilon(b-a)\,. \end{aligned}$$



Příslušné obdélníčky na obrázku odpovídají

$$\sum_{i=1}^{k_n} f(c_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})\,.$$



Pro nespojité funkce nemusí charakterizace v předchozí větě platit, ale přesto může limita uvedených součtů existovat. Tímto způsobem se dá definovat jiný druh integrálu (tzv Riemannův, viz *Poznámky*).

Poznámky 1:

1. Uvědomte si, že určitý integrál je číslo (možná závislé na parametru). kdežto neurčitý integrál je množina funkcí. Tato skutečnost je naznačena slovy „určitý" a „neurčitý".

Je zřejmé, že v označení integrálu není důležité jak je označena proměnná, tj., $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ apod. Pokud nemůže dojít k omylu, může se proměnná vynechat a píše se jen $\int_a^b f$.

Stejně tak nehraje roli, jestli je f definována v krajních bodech nebo ne, a pokud ano, zda je tam spojitá.

V krajních bodech jsou potřeba jen limity.

2. Newtonův integrál $\int_a^b f$ neexistuje (neboli nemá smysl), jestliže buď f nemá na (a,b) primitivní funkcí, nebo tam má primitivní funkci F, ale ta buď nemá limitu v jednom z krajních bodů, nebo tyto limity existují a jejich rozdíl nemá smysl (tj. limity jsou nevlastní se stejnými znaménky).

Všechny tyto případy mohou nastat. U spojité funkce f nemůže nastat první případ.

3. Vlastnost $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se nazývá aditivní vlastnost integrálu.

Indukcí lze tvrzení dokázat pro konečně mnoho sčítanců (na konečně mnoha disjunktních intervalech pokrývajících (a,b) až na konečně mnoho bodů).

4. Geometrický popis integrálu dává možnost jak definovat plochu nějakých oblastí v rovině, a to množin bodů, které se nacházejí mezi osou x a grafem funkce.

Protože integrál ze záporné funkce je záporné číslo, plocha uvedené množiny je integrál z absolutní hodnoty dané funkce.

Odečítáním lze počítat plochy mezi grafy dvou funkcí.

5. Riemannův integrál. Nechť funkce f je definována na kompaktním intervalu $[a,b]$. Jestliže vždy existuje limita součtů ve větě o geometrickém popisu integrálu, nazývá se tato limita Riemannův integrál funkce f na $[a,b]$, značení $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Uvedené součty se nazývají Riemannovy součty.

Dokázaná věta říká, že pro spojité funkce existují Newtonův i Riemannův integrál a jsou si rovny.

Existují však funkce, které mají jeden integrál a nemají druhý. Pokud má funkce oba integrály, jsou si rovny.

Z definice Riemannova integrálu je vidět, že ji lze jen výjimečně použít k výpočtu integrálu.

Navíc v této definici vznikají problémy, pokud f není definována v krajních bodech, nebo je neomezená, nebo celý interval je neomezený.

Proto bude v dalším textu pro výpočet integrálu používán jen Newtonův integrál. Nicméně je dobré mít na paměti přístup k integrálu přes Riemannovy součty, protože ty dávají návod, jak integrál používat v aplikacích (viz kapitolu o aplikacích integrálu).

V definici Riemannova integrálu lze změnit způsob konvergence a dostane se velmi obecný integrál, který nezávisle popsali Kurzweil a Henstock v letech 1955–7.

Známější je Lebesgueův integrál, který je obecnější než Riemannův a speciálnější než Kurzweilův integrál.

Existují funkce, které mají Newtonův integrál a nemají Lebesgueův integrál a obráceně. Zmíněné obecné integrály lze sestrojit i pomocí zobecněných primitivních funkcí (viz následující kapitola).

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Spočtěte pomocí definice:

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{dx} = 2\,,\ \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{dx} = 1\,,\ \int_0^\infty x e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\,,$$

$$\int_0^\infty e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{dx} = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ pro } a>0\,,\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{dx} = \frac{4}{3}\,.$$

2. Pomocí derivace integrálu spočtěte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_s^x e^t\,\mathrm{dt}\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{dt}\,,\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{dt}}{x}\,,\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\int_0^x \sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{dt}}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{dt}}\,.$$

Ukažte, že je-li f kladná spojitá funkce na $[0,+\infty)$, je následující funkce proměnné y rostoucí:

$$\frac{\int_0^y x f(x)\,\mathrm{dx}}{\int_0^y f(x)\,\mathrm{dx}}\,.$$

3. Spočtěte plochu mezi grafem funkce x^3-4x a osou x na intervalu $(-2,2)$ a plochu mezi grafy funkcí $x^2, 2x-1$ na intervalu $(0,2)$.

4. Zkuste spočítat $\int x^2\,\mathrm{dx}$ pomocí limity Riemannových součtů.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Zjistěte, zda existují Newtonovy integrály z následujících funkcí:
1. $\operatorname{sign} x$ na $(-1,1)$;
2. $\frac{\cos x}{x^2}$ na $(0,1)$;
3. x na $(-\infty,+\infty)$;
4. $\frac{1}{x^2}$ na $(-1,1)$.

Existují Riemannovy integrály z předchozích 4 funkcí, použijeme-li příslušné uzavřené intervaly, pokud je to možné?

2. Zjistěte u následujících funkcí, zda existují Newtonův i Riemannův integrál nebo jen jeden, nebo žádný.
1. Dirichletova funkce na $[0,1]$;
2. Riemannova funkce na $[0,1]$;
3. $\operatorname{sign} x$ na $[-1,2]$;
4. f na $[0,1]$, kde $f(0)=0$, $f(x)=(-1)^n$ pro $x\in(1/n+1,1/n]$, $n\in\mathbb{N}$;
5. $f(0)=0$, $f(x)=\sin(1/x)$ pro $x>0$ na $[0,1]$.

3. Uveďte příklad spojité nezáporné funkce na $(0,1)$, která tam má nevlastní Newtonův integrál.

Uveďte příklad spojité omezené funkce na $(0,+\infty)$, která tam má nevlastní Newtonův integrál.

Uveďte příklad spojité neomezené funkce na $(0,1)$, která tam má vlastní Newtonův integrál.

4. Ukažte, že ve větě o existenci integrálu lze předpoklad spojitosti funkce nahradit předpokladem existence primitivní funkce.

5. Zformulujte a dokažte tvrzení o aditivitě integrálu pro libovolný konečný počet integrálů.

6. Uveďte příklad, že rovnost tvrzení o aditivitě integrálu neplatí, předpokládá-li se pouze, že má pravá strana smysl.

7. Uveďte příklad spojité funkce f na (a,b), která tam nemá Newtonův integrál, ale má vlastní Newtonovy integrály $\int_c^d f(x)\,\mathrm{dx}$ pro libovolná $c,d\in(a,b)$.

8. Je-li f lichá a $\int_{-a}^a f$ existuje, pak $\int_{-a}^a f = 0$. Ukažte, že bez předpokladu o existenci integrálu nemusí tvrzení platit a že nestačí předpokládat, že f má primitivní funkci.

Je-li f sudá a $\int_{-a}^{a} f$ existuje, pak $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$. Ukažte, že nestačí předpokládat existence $\int_0^a f$ (stačí, pokud je $\int_0^a f$ vlastní nebo pokud má f primitivní funkci).

Konec otázek 1.

Cvičení 1: Příklad. Spočtěte

$$\int_0^{\pi} \sin x \ \mathrm{dx}\ .$$

Řešení. Pomocí definice spočteme

$$\int_0^{\pi} \sin x \ \mathrm{dx} \ = \ [-\cos x]_0^{\pi} \ = \ \lim_{x\to\pi-} (-\cos x) \ - \ \lim_{x\to 0+} (-\cos x) \ = \ 2\ .$$

Tady se už nikdo nikoho neptá, jak se počítají limity, pozná spojitost, hledá primitivní funkce a sčítají celá čísla . . . . SORRY.

Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce má Riemannův integrál na intervalu $[0,1]$.

Řešení. Nechť je dáno $\varepsilon \in (0,1)$.

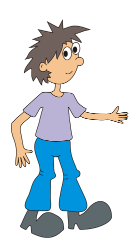
Pouze v konečně mnoha "zlobivých" bodech intervalu $[0,1]$ je Riemannova funkce větší než $\varepsilon/2$. Označme si jejich počet k. Zjevně $k > 0$.

Zvolme n tak malé, aby $2kn < \varepsilon/2$.

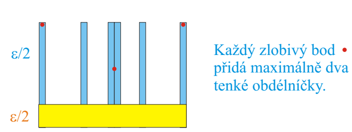
Vezměme rozdělení $0 = x_0 < x_{1,n} < \ldots < x_{k_n,n} = 1$ intervalu $[0,1]$ takové, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

Pak pro libovolně zvolená čísla $c_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ je

$$0 \le \lim_n \sum_{i=1}^{k_n} f(c_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) < \varepsilon\ .$$



PROČ ?



Jasně. Na intervalech neobsahujících "zlobivé" body je funkce nejvýš rovna $\varepsilon/2$, to v součtu přes interval $[0,1]$ dá nejvýš $\varepsilon/2$.

Na intervalech obsahujících "zlobivé" body je funkce nejvýš rovna 1, to v součtu přes maximálně $2k$ intervalů šířky nejvýš $1/n$ dá nanejvýš $2kn < \varepsilon/2$, jak jsme si chytře zařídili.

Dokázali jsme, že k ε jsme našli n tak, že příslušný součet uvažovaný v limitě leží v intervalu $(0, \varepsilon)$.

A to je nulová limita jako Brno.

A ten integrál je asi nulový.

Příklad. Označme

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} .$$

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} S_n .$$

Řešení. Napíšeme

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

a vidíme, že se jedná o riemannovský součet příslušný funkci

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

na intervalu $[0,1]$ při dělení na n dílků.

Tedy podle věty Newton versus Riemann platí

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+x}\;\mathrm{dx} \;=\; [\log(1+x)]_0^1 \;=\; \log 2\,.$$

Tedy, když zdvojnásobíme počet sčítanců v divergentní harmonické řadě, zvedne se částečný součet asi o $\log 2$.

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{dt}}{x}\,.$$

Řešení. Funkce v čitateli i jmenovateli splňují předpoklady l'Hospitalova pravidla typu $0/0$.

Můžeme tedy počítat

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\;\mathrm{dt}}{x} \;\stackrel{l'H}{=}\; \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{1} \;=\; 1\,.$$

Nebát se a počítat.

Příklad. Spočtěte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \left(\int_a^{x^2} \sqrt{1+t^2}\;\mathrm{dt} \right)\,.$$

Řešení. Nechť F je primitivní funkce k f.

Uvědomme si, že

$$\int_a^b f(t)\;\mathrm{dt} \;=\; [F(t)]_a^b \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{db}} \left(\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} \right) = f(b)\,.$$

Podobně

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t)\ \mathrm{dt} = [F(t)]_a^{\varphi(x)} = F(\varphi(x)) - F(a)\,.$$

Tedy podle věty o derivování složené funkce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\ \mathrm{dt} \right) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,.$$

V našem případě

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \left(\int_a^{x^2} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{dt} \right) = \sqrt{1+x^4} \cdot 2x\,.$$

Konec cvičení 1.

Učení 1:

$\int_0^1 x\ \mathrm{dx} \stackrel{?}{=} \frac{x^2}{2}$.

Hanba !!!

$\int_0^1 x\ \mathrm{dx} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}$ **?**

Až na konstantu?

$\int_0^\infty \sin x \ \mathrm{dx} \ = \ \pm 1 \ .$

Primitivní funkce takhle osciluje, ale integrál to nedává ...

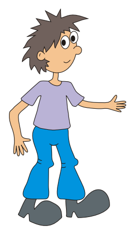
$\int_0^\infty \arcsin x \ \mathrm{dx} \ = \ldots$

Definiční obor již pokořil nejednoho zálesáka.

Konec učení 1.

VLASTNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU

Definice integrálu dává i návod, jak integrál počítat.



Zjistí se primitivní funkce, spočtou se její limity v krajních bodech a jejich rozdíl je hledaný integrál.

Jak je vidět z předchozí kapitoly, často je třeba při výpočtu primitivní funkce používat mnoha substitucí a pak je nutné se vracet pomocí inverzních funkcí k původní proměnné těchto substitucí.

Nebo při několika použitích integrace po částech se ve výsledku může hromadit mnoho funkcí.

Následující vlastnosti určitých integrálů naznačují jiný možný postup, totiž, že není třeba se vracet při substituci k výchozí proměnné, nebo při integraci po částech lze aspoň průběžně dosazovat některé hodnoty a zkracovat tím zápis.

Který z uvedených dvou postupů je lepší, není možné obecně stanovit. Volba postupu závisí na zkušenosti řešitele.

Následující vlastnosti budou uvedeny jen pro případy, kdy je Newtonův integrál vlastní. Obecnější případy budou zmíněny v *Poznámkách*.

VĚTA. (Vlastnosti Newtonova integrálu)

1. Jestliže $f, g \in N(a, b), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g \in N(a, b)$ a platí

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

.

2. Nechť $c \in (a,b)$. Náleží-li f do $N(a,c)$ i do $N(c,b)$ a je spojitá v bodě c, pak $f \in N(a,b)$ a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

.

3. Je-li $g, h \in N(a,b)$ a $h \leq f \leq g$ na (a,b) a f má primitivní funkci na (a,b), pak $f \in N(a,b)$ a

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$$

.

4. Je-li $f \in N(a,b)$, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{dx}$, kde $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ a $\lim a_n = a, \lim b_n = b$.

5. Nechť F, G jsou primitivní funkce k f, g resp., na (a,b). Potom

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG\,\mathrm{dx}\,,$$

jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.

6. Nechť f má primitivní funkci na svém definičním oboru. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}\,,$$

je-li jedna strana konečná, kde φ má derivaci na (α,β), a zobrazuje tento interval do $\mathcal{D}(f)$, přičemž $\varphi(\alpha_+) = a, \varphi(\beta_-) = b$.

Důkaz. 1. Důkaz prvního tvrzení proveďte sami.

2. Uvedené podmínky znamenají, že primitivní funkce F_1, F_2 k f na $(a,c), (c,b)$ resp., mají v c vlastní limity. Posunutím např. F_2 o rozdíl těchto limit a dodefinováním příslušné hodnoty v c vznikne primitivní funkce k f na (a,b), pokud je f spojitá v c (kde je potřeba spojitost?). Zbytek důkazu je zřejmý.

3. Nechť F, G, H jsou primitivní funkce pro f, g, h. Z rovností

$$F(b_-) = -(G-F)(b_-) + G(b_-) = (F-H)(b_-) + H(b_-)$$

vyplývá, že $F(b_-)$ existuje a je vlastní (uvědomte si, že funkce $G-F$ a $F-H$ jsou neklesající). Podobně pro $F(a_+)$.

4. Pro $f \in N(a,b)$ plyne výsledek přímo z definice Newtonova integrálu.

5. Nechť H je primitivní funkce k fG na (a,b). Pak $FG - H$ je primitivní funkce k Fg na (a,b). Zbytek důkazu je zřejmý.

6. Nechť F je primitivní funkce k f na $\mathcal{D}(f)$. Pak $F\circ\varphi$ je primitivní funkce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na α, β.

Jestliže má $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ smysl, plyne rovnost z věty o limitě složené funkce.

Pokud existuje $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$, rovná se $[F\circ\varphi]_\alpha^\beta$, což je totéž jako $[F]_a^b$.

Předchozí věta tvoří základ pro počítání určitých integrálů, tedy počítání délek, povrchů, objemů a všehomíra.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f, g jsou definovány na intervalu (a,b).

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$, pokud $f \in N(a,b)$, $f(x) \geq 0$ na (a,b);
2. $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)\cdot(b-a)$, pokud $f \in N(a,b)$ a (a,b) je omezený;
3. $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$, pokud $f, |f| \in N(a,b)$.

Celkem užitečné odhady.

Poznámky 2:

Následující poznámky k jednotlivým vlastnostem uvedeným ve větě se týkají oslabení předpokladů na existenci místo konvergence a na možnost předpokládat smysl jen jedné strany při rovnostech.

Vlastnost 1. Existence (nebo i konvergence) integrálu na levé straně nemá vliv na existenci pravé strany.

Vezme-li se libovolná funkce f na (a,b) a zvolí se $\alpha = 1, \beta = -1, g = f$, pak integrál na levé straně je roven 0 bez ohledu na existenci $\int f$ nebo smyslu rozdílu $\int f - \int f$.

Má-li smysl pravá strana, má smysl i levá strana a rovnají se.

Vlastnost 2. Snadno se naleznou příklady, kdy rovnost neplatí, jestliže pravá strana má smysl, ale je nevlastní nebo f není spojitá v c.

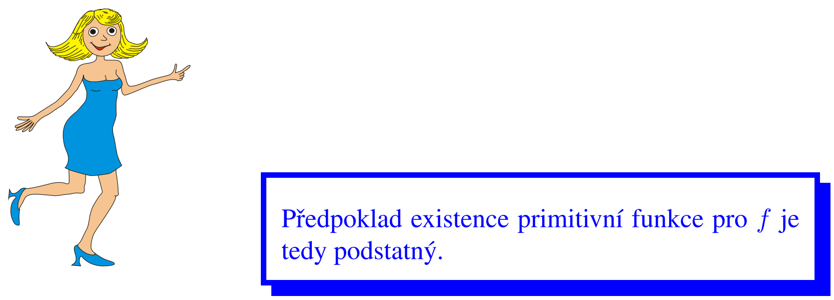
Důležitost této vlastnosti bude vidět v další kapitole, kde bude zobecněn Newtonův integrál.

Vlastnost 3. K této vlastnosti lze jen dodat samozřejmý fakt, že existence uvedených integrálů navzájem nesouvisí a musí se předpokládat. Najděte příklad, kdy $\int_a^b h(x)\,\mathrm{dx} = -\infty$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} = +\infty$ a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ neexistuje. Pokud se předpokládá existence $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$, pak vlastnost 3 platí i pro nevlastní hodnoty integrálů (navíc se zřejmým zjednodušením, např. je-li $\int_a^b h(x)\,\mathrm{dx} = +\infty$ není pro rovnost $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = +\infty$ nutná funkce g).

Vlastnost 4. Tato vlastnost je důležitá a neplatí pro některé jiné integrály (např. pro Riemannův nebo Lebesgueův integrál). Platí i opačné tvrzení, tj. jestliže $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{dx}$ pro libovolná $a \le a_n \le b_n \le b$ s vlastností $\lim a_n = a, \lim b_n = b$, pak existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = A$. Je-li interval (a,b) omezený, stačí podmínku předpokládat jen pro jednu volbu posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$.

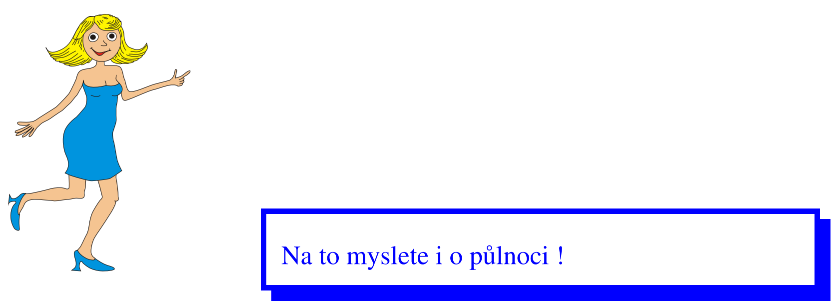
Vlastnost 5. Stačí předpokládat smysl pravé strany, nemusí být vlastní.

Vlastnost 6. Existují příklady, kdy f nemá primitivní funkci a pro vhodnou funkci φ splňující předpoklady konverguje $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$.

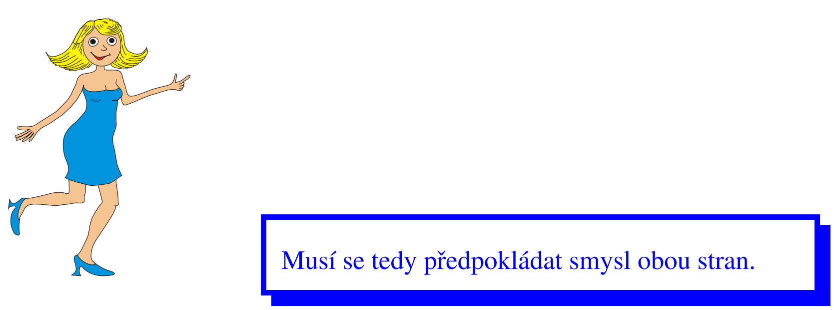


Pokud je f definována na větším intervalu I obsahujícím (a,b) a φ zobrazuje (α,β) do I, přičemž stále platí $\varphi(\alpha_+) = a, \varphi(\beta_-) = b$ nebo a, b prohozené, substituční věta platí.

Pokud se pro výpočet určitého integrálu používá substituce, bývá výhodnější použít substituci pro určitý integrál než pro neurčitý.
Jsou jednodušší předpoklady a není nutné se vracet k původní proměnné pomocí inverzní funkce.



Ve třetím tvrzení Důsledku mohou nastat oba případy, kdy jeden z uvedených integrálů existuje a druhý neexistuje.



Bývá výhodnější použít integraci po částech pro Newtonův integrál než pro neurčitý integrál a to zvláště v případech, kdy tímto použitím výpočet nekončí a jsou nutné další úpravy.

Kdo má praxi, ví svoje.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Spočtěte integrály (po částech nebo substitucí)

$$\int_0^1 \lg x \,\mathrm{d}x\,,\ \int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x\,,\ \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x\,,\ \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x\,,\ \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Kde je chyba v následujícím výpočtu pomocí substituce $\operatorname{tg} x = t$

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 x} = \int_0^0 \frac{1}{1+3/(1+t^2)}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 0\,?$$

3. Kde je chyba v následující úpravě

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

(poslední integrovaná funkce je lichá).

4. Vypočtěte

$$\int_{-2}^2 \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\,,\ \int_{-3}^3 |x|\,\mathrm{d}x\,,\ \int_{-11}^{11} \sin^{11} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Uveďte příklad situace, kdy má smysl $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro nějaké $c \in (a,b)$, ale integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. V jakých případech tato situace může nastat?

2. Najděte příklad funkce f na $(0,1)$, která je nulová až na několik bodů, kde má hodnotu 1 a příklad rostoucí funkce φ zobrazující interval $(0,1)$ na sebe, která má všude derivaci a ta je rovna nule ve vhodných bodech tak, že $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ je nulová funkce.

3. Najděte příklady funkcí f, že existuje pouze jeden z integrálů $\int f$, $\int |f|$.

Konec otázek 2.

Cvičení 2:

Zkusíme per partes pro určitý integrál

Příklad. Spočtěte

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, \mathrm{dx} \, , \; n \geq 0 \, .$$

Řešení. Pro $n = 0$ dostaneme přímým výpočtem

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} \, \mathrm{dx} = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1 \, .$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ počítáme pomocí per partes

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, \mathrm{dx} \stackrel{PP}{=} \left[\begin{array}{cc} f(x) = x^n & g(x) = -e^{-x} \\ f'(x) = nx^{n-1} & g'(x) = e^{-x} \\ x \in \mathbb{R} & x \in \mathbb{R} \end{array} \right] \stackrel{PP}{=}$$

$$\stackrel{PP}{=} \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} \, \mathrm{dx} = n I_{n-1} \, .$$

Dostali jsme rekurentní vztah $I_n = nI_{n-1}$. Tedy matematickou indukcí dostaneme $I_n = n!$.

Hezké.

Substituování je hračka, pokud umíte substituovat. Podíváme se na to.

Příklad. Spočtěte

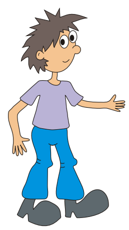
$$\int_0^3 2x \sqrt[3]{1 - x^2} \, \mathrm{dx} \, .$$

Řešení. Substituce je zřejmá:

$$\int_0^3 2x \sqrt[3]{1 - x^2} \, \mathrm{dx} \stackrel{S}{=} \left[\begin{array}{cc} & 1 - x^2 = t \\ \mathrm{S}: & -2x \, \mathrm{dx} = \mathrm{dt} \\ & x \in (0,3), t \in (1,-8) \end{array} \right] \stackrel{S}{=} \int_1^{-8} -\sqrt[3]{t} \, \mathrm{dt} =$$

$$= \left[-\frac{3}{4} \, t^{\frac{4}{3}} \right]_1^{-8} = \frac{3}{4} 8^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4} \, .$$

Tímto zápisem ušetříme "vracení substituce". Je to to samé.



Nešlo použít $x = \sin t$?

Nešlo, jako zkušený jenom vypadáš.

Joke.

Příklad. Spočtěte

$$\int_{-1}^{0} x + |x| \, \mathrm{dx} \, .$$

Řešení. Počítáme

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x+|x| \ \mathrm{dx} \ &\overset{S}{=} \left[\ \mathrm{S}: \quad \begin{matrix} x=\sin t \\ \mathrm{dx}=\cos t \ \mathrm{dt} \\ x\in(-1,0), t\in(-\pi/2,\pi) \end{matrix} \ \right] \overset{S}{=} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi} (\sin t + |\sin t|) \cos t \, \mathrm{dt} \ = \int_{-\pi/2}^{0} (\sin t - \sin t) \cos t \, \mathrm{dt} + \\
&+ \int_{0}^{\pi/2} (\sin t + \sin t) \cos t \, \mathrm{dt} + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin t + \sin t) \cos t \, \mathrm{dt} \ = \\
&= \ 0+1-1 \ = 0\,.
\end{aligned}$$

Všimněte si, že jsme zbytečně integrovali přes interval $[-\pi/2, \pi]$ místo $[-\pi/2, 0]$.

Tím jsme použili hodnoty integrované funkce v intervalu $[0, \pi]$, který nemá co do činění se zadaným integrálem. Jeho vliv se ukázal nulový (1-1=0).

Na intervalu $[0, \pi/2]$ jsme si něco nahrabali, ale na $[\pi/2, \pi]$ jsme to museli vrátit. To je život.

To se u substituce v Newtonově integrálu smí. Jenom musíme mít zaručeno, že funkce f, která se integruje je k dispozici pro integrování všude tam, kam se dostane ta substituce.

Konec cvičení 2.

Učení 2:

$\int_{-1}^{1} \frac{\log x}{x}\, dx \overset{S}{=} [\log x = t] \overset{S}{=} \int_{-0}^{0} t\,\mathrm{dt} = 0$. Dovedu.

Nedovedu.

Konec učení 2.

EXISTENCE A KONVERGENCE URČITÉHO INTEGRÁLU

Jak bylo uvedeno na začátku kapitoly, rozlišuje se podobně jako u řad existence a konvergence integrálu.

Podobně se též zavádí absolutní konvergence; oproti řadám se přidává podmínka existence primitivní funkce, aby příslušné výrazy měly vůbec smysl:

DEFINICE. Newtonův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje absolutně, jestliže f má na (a,b) primitivní funkci a $|f| \in N(a,b)$, a konverguje neabsolutně, jestliže $f \in N(a,b), |f| \notin N(a,b)$.

POZNÁMKA. Stejně jako u řad lze i v tomto případě očekávat, že absolutně konvergentní integrál konverguje.

VĚTA. (Absolutní konvergence) Absolutně konvergentní integrál je konvergentní.

Důkaz. Nechť F, G jsou primitivní funkce k $f, |f|$ resp., na (a,b) a nechť $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Protože $0 \le f + |f| \le 2|f|$ a $f + |f|$ má primitivní funkci $F + G$, která je neklesající, existuje $\int_a^b (f(x) + |f(x)|)\,\mathrm{d}x$ a podle vlastnosti (3) tento integrál konverguje.

Použitím vlastnosti (1) se dostane konvergence integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Opak neplatí.

Platí pro nezáporné funkce, samozřejmě.

VĚTA. (Kritéria konvergence)

1. Je-li f omezená a spojitá na omezeném intervalu (a,b), konverguje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně.
2. **Srovnávací kritérium:** Nechť funkce f je spojitá na (a,b) a $0 \le f \le g$ na (a,b). Jestliže $g \in N(a,b)$ pak i $f \in N(a,b)$.
3. Nechť funkce f, g, g' jsou spojité a g je navíc monotónní na $[a,b)$.

   Dirichletovo kritérium: Jestliže f má omezenou primitivní funkci na (a,b) a $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) = 0$, pak $fg \in N(a,b)$.

   Abelovo kritérium: Jestliže $f \in N(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in N(a,b)$.
4. **Integrální kritérium konvergence řad:**

   Nechť f je spojitá a nerostoucí na $[k,\infty)$. Pak $f \in N(k,+\infty)$ právě když $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ konverguje.

Důkaz. 1. Důkaz plyne z věty o Newtonově integrálu spojité funkce.

2. Konvergence $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plyne z existence (viz věty o Newtonově integrálu spojité funkce) a z vlastnosti (3).

3. Jsou splněny předpoklady pro použití integrace per partes:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bod a nečiní potíže. Protože je g monotónní a omezená, má v b vlastní limitu.

V případě Dirichletova kritéria je F omezená a $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) = 0$ a tedy $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)g(x) = 0$.

V případě Abelova kritéria existuje vlastní $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)$ a tedy i $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)g(x)$.

Zbývá ukázat konvergenci $\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. V obou případech je F omezená a tedy $|Fg'| \le K|g'|$ na $[a,b)$. Protože g je monotónní, nemění g' znaménko a $\int_a^b |g'(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když konverguje $\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál se ovšem rovná $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) - g(a)$.

4. Podle tvrzení druhého důsledku, je pro každé přirozené $n > k$

$$\sum_{i=k}^{n} f(n) \le \int_k^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=k}^{n} f(n+1)\,.$$

Z těchto nerovností plyne výsledek limitováním všech výrazů pro $n \to \infty$.

Na sta je způsobů konvergence, kritéria si musíme pečlivě volit.

Následující důsledky (první je důsledkem srovnávacího kritéria, druhý Abelova kritéria) uvádějí ekvivalence pro konvergenci integrálů.

DŮSLEDEK.

1. (nelimitní tvar) Nechť f, g jsou spojité a nezáporné na $[a, b)$. Jestliže existují kladná čísla K, L tak, že na $[a, b)$ platí $Kf(x) \leq g(x) \leq Lf(x)$, pak $f \in N(a, b)$ právě když $g \in N(a, b)$.

2. (limitní tvar) Nechť f, g jsou spojité a nezáporné na $[a, b)$. Jestliže $\lim\limits_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in N(a, b)$ právě když $g \in N(a, b)$.

Ještě je tu "symetrická verze" Abelova kritéria.

DŮSLEDEK. Nechť na $[a, b)$ jsou funkce f, g, g', h, h' spojité a $g(x)/h(x)$ konverguje pro $x \to b_-$ monotónně k nenulovému vlastnímu číslu. Pak pak $fg \in N(a, b)$ právě když $fh \in N(a, b)$.

Poznámky 3:

Pro zjištění konvergence integrálu $\int_a^b f$ pro funkci f spojitou na (a, b) je vhodný následující postup :

1. Jestliže jsou body a, b vlastní a f v nich má vlastní limity, $\int_a^b f$ konverguje podle prvního tvrzení věty.

2. Pokud nenastane případ v 1, rozdělí se (je-li to nutné) (a, b) nějakým vnitřním bodem na dva intervaly, aby pouze jeden z krajních bodů nových intervalů byl *špatný*, tj. buď to byl nevlastní bod nebo vlastní a integrovaná funkce v něm neměla vlastní limitu.

Nechť je a dobrý bod a b špatný.

a. Jestliže f nemění o b zleva znaménko, je vhodné se snažit použít srovnávací kritérium, např. srovnat f s $(x - b)^p$.

b. Jestliže f mění u b zleva nekonečněkrát znaménko, je vhodné použít Dirichletovo nebo Abelovo kritérium.

Je nutné si uvědomit, že srovnávací kritérium a Abelovo kritérium mají (viz Důsledky) formulace s ekvivalencí – to není u Dirichletova kritéria.

Integrální kritérium se spíše používá pro zjištění konvergence řady pomocí známé konvergence integrálu.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Funkce e^{-x^2} má na $(0, +\infty)$ jediný špatný bod, a to $+\infty$.

U tohoto bodu je funkce kladná. Ke srovnání se použije nerovnost $e^{-x^2} \le e^{-x}$ pro $x \ge 1$, takže lze za funkci g ze srovnávacího kritéria zvolit

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & \text{pro } 0 \le x \le 1; \\ e^{-x}, & \text{pro } x \ge 1. \end{cases}$$

2. V integrálu $\int_0^{+\infty} (x + x^4)^{-1/3}\, \mathrm{dx}$ se interval $(0, +\infty)$ rozdělí např. bodem 1.

V intervalu $(0, 1)$ je špatný bod 0, kde funkce nemění znaménko a v Důsledku srovnávacího kritéria lze za g volit $x^{-1/3}$ – tato funkce má na $(0, 1)$ konvergentní integrál.

V intervalu $(1, +\infty)$ je špatným bodem nevlastní bod, u kterého funkce nemění znaménko a v Důsledku srovnávacího kritéria lze za g volit $x^{-4/3}$ – tato funkce má na $(1, +\infty)$ konvergentní integrál. Podle aditivní vlastnosti integrálu je i původní integrál konvergentní.

3. V integrálu $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{dx}$ je špatná jedině horní mez a u ní funkce stále mění znaménko.

Použije se Dirichletovo kritérium. Za funkci f se vezme $\sin x$, která má omezenou primitivní funkci $\cos x$. Za funkci g se vezme $1/x$, která monotónně konverguje k 0 v $+\infty$. Výsledkem je konvergence původního integrálu.

4. Zjistěte, pro jaké parametry (reálná čísla $\alpha, \beta, \ldots$) konvergují integrály

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{dx}\,, \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{arctg}^\beta x\, \mathrm{dx}\,, \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, \mathrm{dx}\,.$$

5. Ukažte, že integrál $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, \mathrm{dx}$ konverguje pro $p > 0$.

6. Ukažte, že integrál $\int_0^{+\infty} x^\beta\, \mathrm{arctg}(\alpha x)\, \mathrm{dx}$ konverguje pro $\alpha = 0$ nebo $\beta \in (-2, -1)$.

7. Podle integrálního kritéria ověřte pro která p konvergují řady $\sum n^p$, $\sum 1/(n \lg^p n)$.

Nezapomínejte ověřit podmínky kritéria (monotónnost!).

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

1. Dokažte podrobně oba důsledky srovnávacího a Abelova kritéria.

2. Najděte příklad, že integrální kritérium neplatí, vynechá-li se v předpokladech podmínka monotónnosti funkce f.

Mně to někdy vynechává různé věci.

Konec otázek 3.

Cvičení 3:

Budeme zkoumat konvergenci integrálů.

Příklad. Zjistěte konvergenci

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{dx}\,.$$

Řešení. Integrovaná funkce f je spojitá na intervalu $[0,\infty)$. Tím je zaručena existence primitivní funkce F na $[0,\infty)$ a existence konečné hodnoty $F(0+)$. Zbývá zjistit existenci a konečnost $F(\infty-)$.

Budeme zkoumat konvergenci integrálu pomocí srovnávacího kritéria na $[1,\infty)$.
Zvolíme $g(x)=\frac{1}{x^3}$. Funkce g je spojitá na intervalu $[1,\infty)$. Tím je zaručena existence primitivní funkce G na $[1,\infty)$.
Spočteme

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^\infty = 0-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

Tedy $g \in N(1,\infty)$.

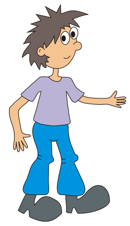
Funkce f a g jsou na okolí ∞ obě nezáporné. Spočítáme limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1+x^3} \overset{l'H}{=} 1\,.$$

Pomocí limitní verze srovnávacího kritéria $f\in N(1,\infty)$ právě když $g\in N(1,\infty)$. Tedy $f\in N(1,\infty)$ a existuje konečná limita $F(\infty-)$.
Tedy $f\in N(0,\infty)$.

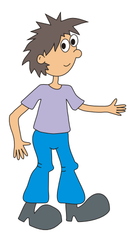
Bylo předem vidět, že funkce se chová u nekonečna jako $1/x^3$ a o té je známo, že její integrál u nekonečna konverguje.

Místo počítání limity f/g stačilo udělat odhad $0\le f\le g$.



Já bych tu f prostě zintegroval (mám moře času).

Celkově to bylo moc upovídané. Stačí říct, že u nuly je to spojité a u nekonečna se to chová jako konvergentní $1/x^3$.



A asi na požádání napsat ...

Existuje velice užitečná škála funkcí, se kterými neznámé funkce srovnáváme:

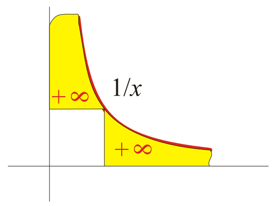
U nekonečna nezlobí velké exponenty:

$$\alpha > 1 \iff \frac{1}{x^\alpha} \in N(1,\infty)\,.$$

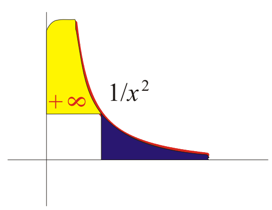
U nuly nezlobí malé exponenty:

$$\alpha < 1 \iff \frac{1}{x^\alpha} \in N(0,1)\,.$$

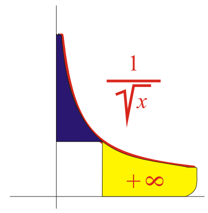
Funkce $1/x$ zlobí všude:



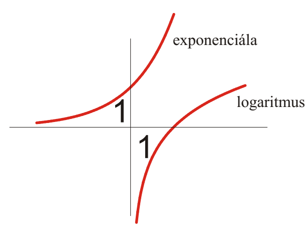
Funkce $1/x^2$ zlobí u nuly:



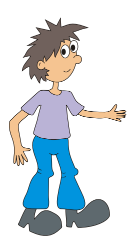
Funkce $1/\sqrt{x}$ zlobí u nekonečna:



Funkce logaritmus a exponenciála jsou hodné, (pokud nemusí jinak zlobit).



Podíváme se na absolutní konvergenci.



Absolutní trefa . . .

Příklad. Zjistěte, pro které hodnoty parametru α konverguje (absolutně) integrál

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} \, \mathrm{dx} \, .$$

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$ na intervalu $[\pi, \infty)$ spojitá, označme si její primitivní funkci F. Bude nás zajímat chování f a F u nekonečna.

Budeme zkoumat 3 případy:

PŘÍPAD 1:

Pro $\alpha > 1$ máme triviální odhad

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

a absolutní konvergenci hledaného integrálu podle srovnávacího kritéria (pro $\alpha > 1$ je $1/x^\alpha \in \mathbb{N}(\pi, \infty)$).

PŘÍPAD 2:

Pro $\alpha \leq 0$ máme odhad

$$\begin{aligned} |F((n+1)\pi) - F(n\pi)| &= \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\ \mathrm{dx} \right| = \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\ \mathrm{dx} \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\ \mathrm{dx} = 2\,. \end{aligned}$$

Tedy funkce F nemá konečnou limitu v nekonečnu a integrál nekonverguje.

Of topic : Má F nevlastní limitu?

PŘÍPAD 3:

Pro $\alpha \in (0, 1]$ je funkce f rovna součinu dvou činitelů:

První činitel je $\sin x$ a má omezenou primitivní funkci na $[\pi, \infty)$.

Druhý činitel je funkce $1/x^\alpha$, která je na $[\pi, \infty)$ spojitá a monotónní s limitou 0.

Podle Dirichletova kritéria pro konvergenci integrálu má funkce f konvergentní integrál na $[\pi, \infty)$.

V případě 3 zbývá zkusit, zda je konvergence absolutní.

Označme $G(x) = \int_\pi^x |f(t)| \; dt$.
Odhadneme

$$\begin{aligned} G((n+1)\pi) - G(n\pi) &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \, \mathrm{dx} \; \geq \\ &\geq \frac{1}{((n+1)\pi)^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \; \mathrm{dx} \geq \frac{2}{(n+1)\pi} \,. \end{aligned}$$

Tedy monotónní funkce G nemá konečnou limitu:

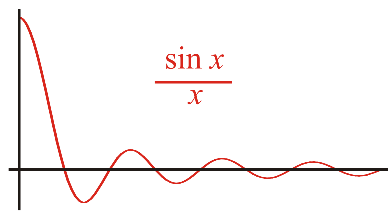
$$G(n\pi) \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \to \infty, \quad \text{pro } \; n \to \infty \,.$$

Tedy $|f| \notin N(\pi, \infty)$. Pro $\alpha \in (0, 1]$ integrál z f konverguje na $[\pi, \infty)$ neabsolutně.

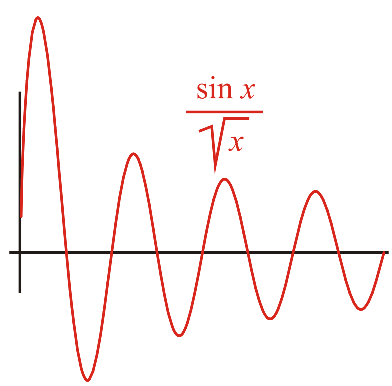
Jde jenom o pozornost a zkušenost.

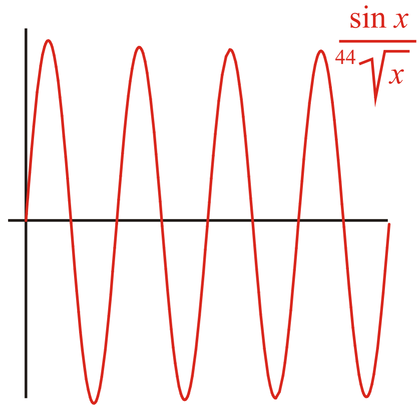
Když Dirichletovo kritérium nic neříká, musíme to zkusit jinak, nebo ověřit divergenci.

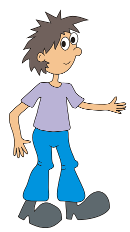
Takhla vypadá funkce pro $\alpha = 1$. Neabsolutní konvergence. Kopečky se u nekonečna skoro vyrovnávají:



To samé platí i pro další dva obrázky, kde se graf funkce s klesajícím α pěkně "nafukuje".





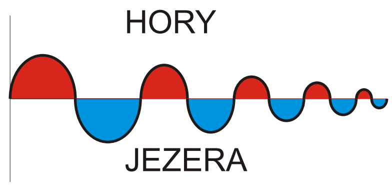


O co vlastně u té absolutní a neabsolutní konvergence jde?

Jde o konečnou plochu kopečků, které dělá funkce nad a pod osou. Když mají kladné kopečky konečnou plochu a záporné také, jde o absolutní konvergenci.

Když mají kladné kopečky nekonečnou plochu a záporné také, jde o neabsolutní konvergenci.

Tento obrázek ukazuje hory a jezera. Komise měla zjistit, jestli mají větší objem hory než jezera. Začala zleva hory bourat a zasypávat jezera. V nekonečnu to zjistí . . .



Jestli mají hory i jezera nekonečný objem, bude záležet na tom, jak jsou hory a jezera rozmístěna.

Absolutní konvergenci řad jsem úspěšně zapomněl, ale tohle mi něco připomíná.

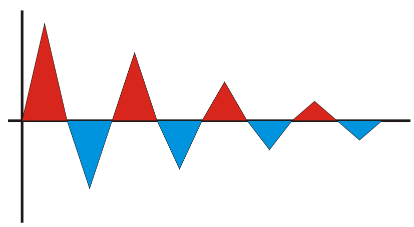
V příkladu

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} \,\mathrm{dx}\,.$$

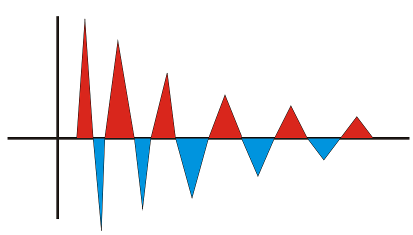
se pomocí α různým způsobem nafukovaly kopečky funkce sinus. Výpočty nebyly jednoduché.

Já místo funkce sinus používám šikovné trojúhelníčky, které utíkají k nekonečnu.

Šikovnou volbou velikosti trojúhelníčků sestrojíme funkci, která má (ne)absolutně konvergentní integrál u nekonečna:



Šikovnou volbou velikosti trojúhelníčků sestrojíme funkci, která má (ne)absolutně konvergentní integrál u nuly nebo nekonečna podle potřeby:



Příklad. Zjistěte, zda konverguje (absolutně) integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x \, \mathrm{dx} .$$

Řešení. Integrál převedeme substitucí $e^x = t$ na

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{dt}\ .$$

U nuly jde integrovaná funkce spojitě dodefinovat, u nekonečna podle Dirichleta. Tedy neabsolutní konvergence jako minule.

Konec cvičení 3.

Učení 3:

Není neabsolutně nekonvergentní?

Ach ty definice . . .

Konec učení 3.