NEWTONŮV INTEGRÁL

V předchozích kapitolách byla popsána inverzní operace k derivování. Zatím nebylo jasné, k čemu tento nástroj slouží.

Uvažujme tramvaj, která je poháněna elektřinou a při brždění vyrábí dynamem elektřinu:

Plocha pod první částí grafu funkce se bere s kladným znaménkem, plocha nad druhou částí se záporným. Získá se celková elektrická náročnost.

Definice je vhodná pro integraci funkcí, které mají primitivní funkci. Tím jsou vynechány jednoduché funkce typu signum, monotónní funkce se skoky apod.

V další kapitole bude proto uvedena značně obecnější definice. Výpočet těchto obecnějších integrálů bývá ale většinou sveden k výpočtu integrálů z této kapitoly (nebo jsou použity nějaké triky).

DEFINICE URČITÉHO INTEGRÁLU

DEFINICE. Nechť funkce f je definována na intervalu (a,b) a jsou splněny následující tři podmínky:

1. f má na (a,b) primitivní funkci F;
2. existují $\lim_{x\to a_+} F(x) = F(a_+)$, $\lim_{x\to b_-} F(x) = F(b_-)$;
3. rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ má smysl.

Pak se rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ nazývá Newtonův integrál funkce f na (a,b). Značení

$$F(b_-) - F(a_+) = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,,$$

kde a se nazývá dolní mez a b horní mez integrálu.

Rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ se často značí symbolem $[F(x)]_{x=a}^b$ nebo jen $[F(x)]_a^b$, $[F]_a^b$,.

Dále se formálně definuje

$$(N)\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,,\ \text{pro } b > a\,,\quad (N)\int_c^c f(x)\,\mathrm{dx} = 0 \text{ pro libovolné } c\,.$$

V této kapitole budou probírány jen Newtonovy integrály, a proto bude slovo „Newtonův" a písmeno „N" u integrálu někdy vynecháváno.

Na rozdíl od neurčitého integrálu z kapitoly o primitivních funkcích se tento integrál nazývá *určitý*, protože jeho hodnotou není množina funkcí, ale jedno určité číslo.

Předchozí definice říká, kdy má integrál smysl. Jeho hodnota může být i nevlastní.

Pokud je hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ vlastní, říká se, že integrál konverguje.

POZOROVÁNÍ. Nechť existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

- Jestliže $a \le c < d \le b$, pak existuje $\int_c^d f(x)\,\mathrm{dx}$.
- Jestliže $a < c < d < b$, pak $f \in N(c,d)$.
- Pro každé $c \in (a,b)$ je
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

- Pro každé $x \in (a,b)$ je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} = f(x)\,.$$

Z kapitoly o primitivních funkcí je známo, že každá spojitá funkce na intervalu tam má primitivní funkci (viz větu o konstrukci primitivní funkce).

VĚTA. (Integrál spojité funkce)

1. Každá spojitá omezená funkce na omezeném intervalu náleží do $N(a,b)$.
2. Každá spojitá nezáporná funkce f na intervalu (a,b) má integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ (a ten je nezáporný).

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) (ta existuje). Zbývá ukázat, že existují limity F v krajních bodech a rozdíl těchto limit má smysl. To je zřejmé, pokud je f spojitá na $[a,b]$ (pak je i F spojitá na $[a,b]$).

Pro důkaz prvního tvrzení stačí dokázat, že existuje vlastní $\lim\limits_{x \to a_+} F(x)$ (pro bod b je důkaz obdobný), což znamená, že pro libovolnou posloupnost x_n z (a,b) klesající k a je posloupnost $\{F(x_n)\}$ cauchyovská. To vyplývá z věty o střední hodnotě:

$$|F(x_n) - F(x_m)| \le \sup\{|f(x)|; x \in (a,b)\}|x_n - x_m|\,.$$

Důkaz je též snadný pro druhé tvrzení, neboť F je neklesající (její derivace je nezáporná) a tedy má limity v krajních bodech, což je supremum, resp. infimum, hodnot F a tedy i jejich rozdíl má smysl a je nezáporný.

Nyní bude upřesněna geometrická interpretace z kapitoly o primitivních funkcích.

VĚTA. (Newton versus Riemann) Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $[a,b]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zvoleno nějaké rozdělení $a = x_0 < x_{1,n} < \ldots < x_{k_n,n} = b$ intervalu $[a,b]$ takové, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

Pak pro libovolně zvolená čísla $c_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ je

$$\lim_n \sum_{i=1}^{k_n} f(c_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Důkaz. Nechť ε je libovolné kladné číslo. Podle věty o stejnoměrné spojitosti funkce na kompaktním intervalu existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ jakmile $|x - y| < 1/n$ a $x, y \in [a,b]$. Nyní se vezme libovolné rozdělení $a = x_0 < x_{1,m} < \ldots < x_{k_m,m} = b$ popsané ve znění věty, které má délky intervalů nejvýše $1/n$.

V motivačním úvodu bylo ukázáno, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_{i=1}^{k_m} f(c_i)(x_{i,m} - x_{i-1,m})$ pro nějaké body $c_i \in (x_{i-1,m}, x_{i,m})$ (uvědomte si, že předpoklad nezáporné funkce byl v motivaci použit jen na geometrické znázornění ploch, nikoli na výpočet sumy). Platí tedy

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} - \sum_{i=1}^{k_m} f(c_{i,m})(x_{i,m} - x_{i-1,m})\Big| &\le \\ \sum_{i=1}^{k_m} |f(c_i) - f(c_{i,m})|(x_{i,m} - x_{i-1,m}) &\le \varepsilon(b-a)\,. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{k_n} f(c_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})\,.$$

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

Učení 1

VLASTNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU

Definice integrálu dává i návod, jak integrál počítat.

Jak je vidět z předchozí kapitoly, často je třeba při výpočtu primitivní funkce používat mnoha substitucí a pak je nutné se vracet pomocí inverzních funkcí k původní proměnné těchto substitucí.

Nebo při několika použitích integrace po částech se ve výsledku může hromadit mnoho funkcí.

Následující vlastnosti určitých integrálů naznačují jiný možný postup, totiž, že není třeba se vracet při substituci k výchozí proměnné, nebo při integraci po částech lze aspoň průběžně dosazovat některé hodnoty a zkracovat tím zápis.

Následující vlastnosti budou uvedeny jen pro případy, kdy je Newtonův integrál vlastní. Obecnější případy budou zmíněny v *Poznámkách*.

VĚTA. (Vlastnosti Newtonova integrálu)

1. Jestliže $f, g \in N(a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g \in N(a,b)$ a platí

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

.

2. Nechť $c \in (a,b)$. Náleží-li f do $N(a,c)$ i do $N(c,b)$ a je spojitá v bodě c, pak $f \in N(a,b)$ a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

.

3. Je-li $g, h \in N(a,b)$ a $h \le f \le g$ na (a,b) a f má primitivní funkci na (a,b), pak $f \in N(a,b)$ a

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

.

4. Je-li $f \in N(a,b)$, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \le a_n \le b_n \le b$ a $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

5. Nechť F, G jsou primitivní funkce k f, g resp., na (a,b). Potom

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG\,\mathrm{d}x\,,$$

jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.

6. Nechť f má primitivní funkci na svém definičním oboru. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

je-li jedna strana konečná, kde φ má derivaci na (α,β), a zobrazuje tento interval do $\mathcal{D}(f)$, přičemž $\varphi(\alpha_+) = a, \varphi(\beta_-) = b$.

Důkaz. 1. Důkaz prvního tvrzení proveďte sami.

2. Uvedené podmínky znamenají, že primitivní funkce F_1, F_2 k f na $(a,c), (c,b)$ resp., mají v c vlastní limity. Posunutím např. F_2 o rozdíl těchto limit a dodefinováním příslušné hodnoty v c vznikne primitivní funkce k f na (a,b), pokud je f spojitá v c (kde je potřeba spojitost?). Zbytek důkazu je zřejmý.

3. Nechť F, G, H jsou primitivní funkce pro f, g, h. Z rovností

$$F(b_-) = -(G-F)(b_-) + G(b_-) = (F-H)(b_-) + H(b_-)$$

vyplývá, že $F(b_-)$ existuje a je vlastní (uvědomte si, že funkce $G-F$ a $F-H$ jsou neklesající). Podobně pro $F(a_+)$.

4. Pro $f \in N(a,b)$ plyne výsledek přímo z definice Newtonova integrálu.

5. Nechť H je primitivní funkce k fG na (a,b). Pak $FG - H$ je primitivní funkce k Fg na (a,b). Zbytek důkazu je zřejmý.

6. Nechť F je primitivní funkce k f na $\mathcal{D}(f)$. Pak $F \circ \varphi$ je primitivní funkce k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na α, β.

Jestliže má $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ smysl, plyne rovnost z věty o limitě složené funkce.

Pokud existuje $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$, rovná se $[F \circ \varphi]_\alpha^\beta$, což je totéž jako $[F]_a^b$.

DŮSLEDEK. Nechť funkce f, g jsou definovány na intervalu (a,b).

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$, pokud $f \in N(a,b)$, $f(x) \geq 0$ na (a,b);
2. $\inf\limits_{x \in (a,b)} f(x) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) \cdot (b-a)$, pokud $f \in N(a,b)$ a (a,b) je omezený;
3. $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$, pokud $f, |f| \in N(a,b)$.

Poznámky 2   Příklady 2   Otázky 2

Cvičení 2

Učení 2

EXISTENCE A KONVERGENCE URČITÉHO INTEGRÁLU

Jak bylo uvedeno na začátku kapitoly, rozlišuje se podobně jako u řad existence a konvergence integrálu.

Podobně se též zavádí absolutní konvergence; oproti řadám se přidává podmínka existence primitivní funkce, aby příslušné výrazy měly vůbec smysl:

DEFINICE. Newtonův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ konverguje absolutně, jestliže f má na (a,b) primitivní funkci a $|f| \in N(a,b)$, a konverguje neabsolutně, jestliže $f \in N(a,b)$, $|f| \notin N(a,b)$.

POZNÁMKA. Stejně jako u řad lze i v tomto případě očekávat, že absolutně konvergentní integrál konverguje.

VĚTA. (Absolutní konvergence) Absolutně konvergentní integrál je konvergentní.

Důkaz. Nechť F, G jsou primitivní funkce k $f, |f|$ resp., na (a,b) a nechť $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$ konverguje.

Protože $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$ a $f + |f|$ má primitivní funkci $F + G$, která je neklesající, existuje $\int_a^b (f(x) + |f(x)|)\,\mathrm{dx}$ a podle vlastnosti (3) tento integrál konverguje.

Použitím vlastnosti (1) se dostane konvergence integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

VĚTA. (Kritéria konvergence)

1. Je-li f omezená a spojitá na omezeném intervalu (a, b), konverguje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně.
2. **Srovnávací kritérium:** Nechť funkce f je spojitá na (a, b) a
$0 \le f \le g$ na (a, b). Jestliže $g \in N(a, b)$ pak i $f \in N(a, b)$.
3. Nechť funkce f, g, g' jsou spojité a g je navíc monotónní na $[a, b)$.
Dirichletovo kritérium: Jestliže f má omezenou primitivní funkci na (a, b) a $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) = 0$, pak $fg \in N(a, b)$.
Abelovo kritérium: Jestliže $f \in N(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in N(a, b)$.
4. **Integrální kritérium konvergence řad:**
Nechť f je spojitá a nerostoucí na $[k, \infty)$. Pak $f \in N(k, +\infty)$ právě když $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ konverguje.

Důkaz. 1. Důkaz plyne z věty o Newtonově integrálu spojité funkce.

2. Konvergence $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plyne z existence (viz věty o Newtonově integrálu spojité funkce) a z vlastnosti (3).

3. Jsou splněny předpoklady pro použití integrace per partes:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bod a nečiní potíže. Protože je g monotónní a omezená, má v b vlastní limitu.
V případě Dirichletova kritéria je F omezená a $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) = 0$ a tedy $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)g(x) = 0$.
V případě Abelova kritéria existuje vlastní $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)$ a tedy i $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)g(x)$.

Zbývá ukázat konvergenci $\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. V obou případech je F omezená a tedy $|Fg'| \le K|g'|$ na $[a, b)$. Protože g je monotónní, nemění g' znaménko a $\int_a^b |g'(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když konverguje $\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál se ovšem rovná $\lim\limits_{x\to b_-} g(x) - g(a)$.

4. Podle tvrzení druhého důsledku, je pro každé přirozené $n > k$

$$\sum_{i=k}^{n} f(n) \le \int_k^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=k}^{n} f(n+1)\,.$$

Z těchto nerovností plyne výsledek limitováním všech výrazů pro $n \to \infty$.

DŮSLEDEK.

1. (nelimitní tvar) Nechť f, g jsou spojité a nezáporné na $[a, b)$. Jestliže existují kladná čísla K, L tak, že na $[a, b)$ platí $Kf(x) \le g(x) \le Lf(x)$, pak $f \in N(a, b)$ právě když $g \in N(a, b)$.
2. (limitní tvar) Nechť f, g jsou spojité a nezáporné na $[a, b)$. Jestliže $\lim\limits_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in N(a, b)$ právě když $g \in N(a, b)$.

DŮSLEDEK. Nechť na $[a, b)$ jsou funkce f, g, g', h, h' spojité a $g(x)/h(x)$ konverguje pro $x \to b_-$ monotónně k nenulovému vlastnímu číslu. Pak pak $fg \in N(a, b)$ právě když $fh \in N(a, b)$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

Učení 3