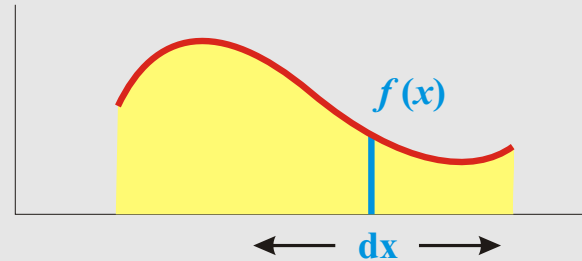


# OBECNÝ URČITÝ INTEGRÁL

Zobecnění Newtonova nebo Riemannova integrálu se definují různým způsobem a dostanou se někdy různé, někdy stejné pojmy.

V tomto textu bude postup volen jako zobecnění Newtonova integrálu, protože je to vhodný postup pro výpočet integrálů.



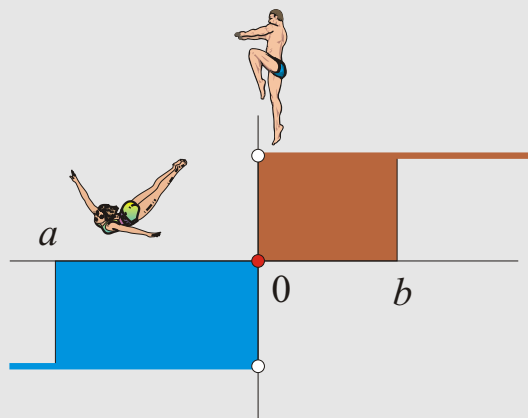
Funkce signum nemá primitivní funkci na celém  $\mathbb{R}$ , ale funkce  $|x|$  je spojitá a primitivní k signum na  $(-\infty, 0)$  i na  $(0, +\infty)$ .

Vztah

$$\int_a^b \text{sign } t \, dt = |b| - |a|,$$

zřejmě i v tomto případě odpovídá tomu, co se v předchozí části pod integrálem chápalo (např. vyjádření plochy s příslušnými znaménky).

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Co je vlastně potřebné pro funkci  $F$ , aby definice

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

zobecňovala Newtonův integrál?

Protože se jedná o zobecnění, musí být  $F' = f$  na intervalech, kde  $F'$  existuje.

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní
- konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# NULOVÉ MNOŽINY

Asi by nemělo smysl, kdyby  $F'$  neexistovala na velké množině, např. na nějakém intervalu.

Jde o to určit vhodně význam malé množiny. Lze pochopit, že konečné množiny jsou malé (vzhledem k intervalům).

Jsou malé i spočetné množiny? To už tak jasné není, protože množina racionálních čísel je spočetná a v jistém smyslu vytváří všechna reálná čísla.

**DEFINICE.** Množina  $C$  reálných čísel se nazývá **nulová**, jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existují intervaly  $(a_n, b_n)$  takové, že

1.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \supset C$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$ .

Říká se, že vlastnost  $V$  platí **skoro všude** (zkratka s.v.) na nějaké množině  $M \subset \mathbb{R}$ , jestliže existuje nulová množina  $C$  a  $V$  platí na  $M \setminus C$ .

## POZOROVÁNÍ.

1. Každá nejvýše spočetná podmnožina  $\mathbb{R}$  je nulová.
2. Podmnožina nulové množiny je nulová množina.
3. Spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina.
4. Interval není nulová množina.

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo  $C$
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní
- konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1 Učení 1

obecný integrál

nulová množina

skoro všude

vlastnosti n.m.

J-primitivní funkce

vlastnosti J-p.f.

J-korektnost

pokryvací lemma

monotónní funkce

J-integrál

vlastnosti J-i.

J-srovnávání

absolutní spoj.okolo C

K-primitivní funkce

vlastnosti K-p.f.

K-korektnost

K-integrál

vlastnosti K-i.

K-srovnávání

existence K-integralu

kritéria

ekvivalence konver-

gence

absolutni

konvergence

L-primitivní funkce

L-integrál

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# J-INTEGRÁL

obecný integrál

nulová množina

skoro všude

vlastnosti n.m.

J-primitivní funkce

vlastnosti J-p.f.

J-korektnost

pokrývací lemma

monotónní funkce

J-integrál

vlastnosti J-i.

J-srovnávání

absolutní spoj.okolo C

K-primitivní funkce

vlastnosti K-p.f.

K-korektnost

K-integrál

vlastnosti K-i.

K-srovnávání

existence K-integralu

kritéria

ekvivalence konver-

gence

absolutní

konvergence

L-primitivní funkce

L-integrál

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# J-PRIMITIVNÍ FUNKCE

Podle předchozího pozorování jsou konečné a spočetné množiny nulové.

Nespočetné množiny mohou ale nemusejí být nulové.

To naznačuje možnost, že nejvýše spočetné množiny tvoří specifickou třídu nulových množin a že zobecněné primitivní funkce definované na základě této třídy by mohly být také nějak specifické.

V předchozím příkladě pro signum by se dostala jiná hodnota integrálu, pokud by místo zobecněné primitivní funkce  $|x|$  byla použita např. funkce  $|x| + 1$  na  $(-\infty, 0)$  a  $|x|$  na  $(0, +\infty)$ .

**DEFINICE.** Funkce  $F$  na intervalu  $I$  se nazývá **J-primitivní funkce k  $f$  na  $I$** , jestliže

1.  $F'(x) = f(x)$  na  $I$  až na nejvýše spočetnou množinu;
2.  $F$  je spojitá na  $I$ .

Spočetná množina  $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$  se nazývá **výjimečná množina funkce  $f$** .

## POZOROVÁNÍ.

1. Každá spojitá funkce na intervalu  $I$  má na  $I$  J-primitivní funkci.
2. Je-li  $F$  J-primitivní funkce k  $f$  na  $I$ , má tutéž vlastnost i  $F + k$  pro libovolné  $k \in \mathbb{R}$ .
3. Jsou-li  $F, G$  J-primitivní funkce k  $f, g$  na  $I$ , je  $\alpha F + \beta G$  J-primitivní funkce k  $\alpha f + \beta g$  na  $I$ .

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**VĚTA. (Jednoznačnost)** Dvě J–primitivní funkce k  $f$  na  $I$  se liší o konstantu.

**LEMMA.** Necht' kompaktní interval  $[a, b]$  je pokryt systémem  $\mathcal{S}$  otevřených intervalů. Pak existuje konečný podsystém  $\{S_1, \dots, S_k\}$ , který pokrývá  $[a, b]$  a  $S_i, S_j$  se protínají jen pokud  $|i - j| \leq 1$ .

**Důkaz.** Označí se  $p = \sup\{x \in [a, b]; [a, x] \text{ lze pokrýt konečným podsystémem systému } \mathcal{S}\}$ . Kdyby  $p < b$ , stačí vzít jednu množinu z  $\mathcal{S}$ , např.  $(r, s)$ , obsahující  $p$  a potom lze pokrýt konečným podsystémem i interval  $[a, q]$  pro  $q \in (p, s)$ , což je spor.

Lze předpokládat, že získaný podsystém je minimální, tj. po odebrání libovolného jeho prvku zbylý systém už  $[a, b]$  nepokrývá.

Necht' se získaný konečný podsoubor skládá z intervalů  $S_1, S_2, \dots, S_k$  se středy  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , přičemž  $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ .

Ukažte, že z minimality vyplývá žádaná vlastnost: intervaly  $S_i, S_j$  se protínají jedinečně když  $|i - j| \leq 1$ .

**Důkaz. věty.** Tvrzení stačí dokázat pro otevřený interval  $I = (a, b)$ .

Necht'  $C$  je spočetná množina bodů  $c_n, n = 1, 2, \dots$  z  $(a, b)$ ,  $F$  je spojitá na  $(a, b)$  a  $F'(x) = 0$  pro  $x \in I \setminus C$ . Má se dokázat, že  $F$  je konstantní na  $(a, b)$ .

Necht'  $r, s \in (a, b), r < s$ . Stačí ukázat, že  $|F(r) - F(s)|$  je libovolně malé. Bud' tedy  $\varepsilon > 0$ . Může se předpokládat, že  $r, s \in C$  (jinak se  $C$  o tyto body doplní).

Pro každé  $x \in (a, b)$  existuje okolí  $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$  tak, že  $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon|y - x|$  pro  $y \in U_x$  pokud  $x \notin C$  (protože  $F'(x) = 0$ ) a tak, že  $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon/2^n$  pro  $y \in U_x$  pokud  $x = c_n$  (protože  $F$  je v  $c_n$  spojitá).

- obecný integrál
- libovolná množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- K-rovňování
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-rovňování
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle předchozího lemmatu lze najít body  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$  tak, že  $\{U_{x_i}\}_1^k$  pokrývá  $[r, s]$  a protínají se pouze sousední intervaly.

Pro každé  $i$  existuje  $y_i \in U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \cap (x_i, x_{i+1})$ , přičemž  $y_1$  lze zvolit větší než  $r$  a  $y_{k-1}$  menší než  $s$ . Nyní se položí  $y_0 = r, y_k = s$  a tedy je  $y_i < y_{i+1}$  pro  $i = 0, \dots, k - 1$ .

Potom

$$|F(r) - F(s)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |F(y_{i+1}) - F(y_i)|.$$

Protože oba sousední body  $y_i, y_{i+1}$  leží v  $U_{x_i}$  po obou stranách jeho středu (kromě, možná, prvního a posledního intervalu), je  $|F(y_{i+1}) - F(y_i)|$  buď nejvýše  $\varepsilon(y_{i+1} - y_i)$  pokud  $x_i \notin C$  a nejvýše  $\varepsilon/2^n$  pokud  $x_i = c_n$ .

Odtud vyplývá, že

$$|F(r) - F(s)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |F(y_{i+1}) - F(y_i)| \leq \varepsilon((s - r) + 2).$$

Zřejmě funkce typu signum a jejich posunutí a lineární kombinace (tzv. jednoduché nebo schodovité funkce, mající jen konečně mnoho hodnot, které nabývají na konečně mnoha intervalech).

**VĚTA.** Každá monotónní funkce (a tedy i jejich lineární kombinace) na intervalu  $I$  má na tomto intervalu J-primitivní funkci.

**Důkaz.** Necht'  $f$  je např. neklesající funkce na  $I$  a  $C = \{c_n\}$  je spočetná množina jejích bodů nespojitosti (skoků).

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integrálu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní
- konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Označí-li se  $s_n$  velikost skoku v bodě  $c_n$ , pak nezáporná funkce  $s$ , která má v  $x \in I$  hodnotu  $\sum \{s_n; c_n < x\}$ , se nazývá funkce skoků. Rozdíl  $f - s$  je spojitá funkce na  $I$ , která tedy má primitivní funkci na  $I$ .

Snadno se zjistí, že  $S(x) = \sum \{s_n(x - c_n); c_n < x\}$  je J-primitivní funkce k  $s$  na  $I$  s výjimečnou množinou  $C$ . Tedy i funkce  $f$  má J-primitivní funkci.

[Poznámky 2](#) [Příklady 2](#) [Otázky 2](#)

[Cvičení 2](#)

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní
- konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# J-INTEGRÁL

Nyní lze definovat integrál stejným způsobem, jako u Newtonova integrálu.

**DEFINICE.** Necht' jsou splněny následující tři podmínky pro funkci  $f$  a interval  $I$  s hraničními body  $a < b$ :

1. funkce  $f$  má na  $I$  J-primitivní funkci  $F$ ;
2. existují limity  $F(a_+)$ ,  $F(b_-)$ ;
3. rozdíl  $F(b_-) - F(a_+)$  má smysl.

Potom se definuje se **J-integrál** funkce  $f$ :

$$({J}) \int_a^b f \, dx = F(b_-) - F(a_+).$$

Podobně jako u Newtonova integrálu se definují  $(J) \int_a^a = 0$ ,  $(J) \int_b^a = -(J) \int_a^b$

Množina všech funkcí, které mají vlastní J-integrál  $(J) \int_a^b f \, dx$ , se značí  $J(a, b)$ . Funkce z  $J(a, b)$  se nazývají **J-integrovatelné**, nebo se říká, že jejich J-integrál **konverguje** (na rozdíl od termínu *existuje*, kdy může být hodnota integrálu nevlastní).

Ze symbolu pro integrál není vidět na jakém typu intervalu  $I$  (např. otevřeném, uzavřeném) je integrál definován. Není to totiž podstatné, protože z definice je vidět, že hodnota integrálu nezávisí na tom, zda koncové body intervalu  $I$  náležejí do  $I$ .

V dalším textu bude proto často bez újmy na obecnosti brán otevřený interval  $I$ .

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integrálu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## VĚTA. (Souhrn vlastností J-integrálu)

1.  $N(a, b) \subset J(a, b)$ .
2. Pro každou monotónní funkci na  $(a, b)$  existuje J-integrál z  $f$  na  $(a, b)$ .
3.  $J(a, b)$  je lineární podprostor prostoru všech funkcí na  $(a, b)$  a  $(J) \int_a^b$  je lineární zobrazení  $J(a, b)$  do  $\mathbb{R}$ .
4. (a) Je-li  $(c, d) \subset (a, b)$ , je  $J(a, b) \subset J(c, d)$ , kde poslední inkluze se míní zúžení funkcí.  
(b) Je-li  $c \in (a, b)$ , je  $J(a, b) = J(a, c) \cap J(c, b)$ .
5. Je-li  $f \in J(a, b)$  je  $(J) \int_a^x f(t) dt$  J-primitivní funkce k  $f$  na  $(a, b)$ .
6. Je-li  $f$  nezáporná funkce na  $(a, b)$  (kromě, možná, spočetné množiny), která tam má J-primitivní funkci, pak existuje  $\int_a^b f \geq 0$ .
7. Je-li  $f \in J(a, b)$ , je  $(J) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (J) \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$ , kde  $a \leq a_n \leq b_n \leq b$  a  $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ .
8. Necht'  $F, G$  jsou J-primitivní funkce k  $f, g$  resp., na  $(a, b)$ . Potom  $(J) \int_a^b Fg = [FG]_a^b - (J) \int_a^b fG dx$ , jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.
9. Necht'  $f$  má J-primitivní funkci na intervalu  $I$ . Necht' existuje spočetná množina  $C$  a funkce  $\varphi$  tak, že
  - $\varphi$  zobrazuje ryze monotónně  $(\alpha, \beta)$  do  $I$ ;
  - $\varphi'$  existuje na  $(\alpha, \beta) \setminus C$ ;

Potom  $(J) \int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)} f(x) dx = (J) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ , je-li jedna strana konečná.

obecný integrál
nulová množina
skoro všude
vlastnosti n.m.
J-primitivní funkce
vlastnosti J-p.f.
J-korektnost
pokryvací lemma
monotónní funkce
J-integrál
vlastnosti J-i.
J-srovnávání
absolutní spoj.okolo C
K-primitivní funkce
vlastnosti K-p.f.
K-korektnost
K-integrál
vlastnosti K-i.
K-srovnávání
existence K-integrálu
kritéria
ekvivalence konver-
gence
absolutní
konvergence
L-primitivní funkce
L-integrál
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Důkaz.** Vlastnosti 1 – 5 se dokáží přímo z definic. Pro ověření vlastnosti 6 je nutné si uvědomit, že spojitá funkce, která má nezápornou derivaci všude na intervalu kromě nejvýše spočetné množiny, je neklesající (viz návod v *Otázkách*).

Vlastnosti 7 – 9 se dokazují stejně jako podobné vlastnosti pro [Newtonovy integrály](#).

substitute?

**DŮSLEDEK.** Necht' funkce  $f, g$  jsou definovány na intervalu  $(a, b)$  kromě nejvýše spočetné množiny.

1.  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ , pokud  $f, g \in J(a, b)$ ,  $f(x) \leq g(x)$  na  $(a, b)$  kromě nejvýše spočetné množiny;

2.  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ , pokud  $f, |f| \in J(a, b)$ .

[Poznámky 3](#) [Příklady 3](#) [Otázky 3](#)

[Cvičení 3](#)

obecný integrál  
nulová množina  
skoro všude  
vlastnosti n.m.  
J-primitivní funkce  
vlastnosti J-p.f.  
J-korektnost  
pokryvací lemma  
monotónní funkce  
J-integrál  
vlastnosti J-i.  
J-srovnávání  
absolutní spoj.okolo C  
K-primitivní funkce  
vlastnosti K-p.f.  
K-korektnost  
K-integrál  
vlastnosti K-i.  
K-srovnávání  
existence K-integralu  
kritéria  
ekvivalence konvergence  
absolutní  
konvergence  
L-primitivní funkce  
L-integrál  
Poznámky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Příklady  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Otázky  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Cvičení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9  
Učení  
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# K-INTEGRÁL

obecný integrál	
nulová množina	
skoro všude	
vlastnosti n.m.	
J-primitivní funkce	
vlastnosti J-p.f.	
J-korektnost	
pokryvací lemma	
monotónní funkce	
J-integrál	
vlastnosti J-i.	
J-srovnávání	
absolutní spoj.okolo C	
K-primitivní funkce	
vlastnosti K-p.f.	
K-korektnost	
K-integrál	
vlastnosti K-i.	
K-srovnávání	
existence K-integralu	
kritéria	
ekvivalence konver-	
gence	
absolutni	
konvergence	
L-primitivní funkce	
L-integrál	
Poznámky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Příklady	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Otázky	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Cvičení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Učení	
1 2 3 4 5 6 7 8 9	

# K-PRIMITIVNÍ FUNKCE

Pro obecnější integrál než je J-integrál, je nejdříve nutné definovat obecnější primitivní funkci, která musí mít opět obvyklé vlastnosti.

V definicích bude místo písmene J použito písmene K podle jména Jaroslav Kurzweil, který okolo r.1955 tento integrál definoval (nezávisle použil stejnou definici a ve stejné době R.Henstock). Oba postupovali pomocí zobecnění Riemannovy metody.

Primitivní funkce byla zobecněna na J-primitivní tím, že se předpokládala existence derivace nikoli všude, ale až na spočetnou množinu.

Jak vidět z příkladu Cantorovy funkce (viz *Otázky*), v tomto případě nestačí předpokládat spojitost zobecněné primitivní funkce (neplatila by totiž základní věta o primitivních funkcích, že dvě zobecněné primitivní funkce k téže funkci se liší o konstantu).

Z důkazu [základní věty o J-primitivních funkcích](#) je vidět, co je potřeba, aby podobná věta platila i pro jiné než spočetné výjimečné množiny  $C$ ; potřebná vlastnost je zformulována v následující definici.

**DEFINICE.** Necht'  $C$  je podmnožina intervalu  $I$ . Funkce  $F$  definovaná na  $I$  se nazývá **absolutně spojitá na  $I$  okolo  $C$** , jestliže pro každý interval  $[r, s] \subset I$  a libovolné  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každý konečný soubor disjunktních intervalů  $\{(a_n, b_n)\}_1^k$  v  $I$  protínajících  $C \cap [r, s]$  platí

$$\sum_{n=1}^k (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n=1}^k |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon.$$

Jestliže  $C = I$ , říká se, že  $f$  je **absolutně spojitá funkce na  $I$** .

**POZOROVÁNÍ.**

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Je-li  $f$  absolutně spojitá na  $I$  okolo množiny  $C$ , je absolutně spojitá na  $I$  okolo každé podmnožiny  $C$ .
2. Každá spojitá funkce na intervalu  $I$  je absolutně spojitá okolo každé spočetné podmnožiny  $I$ .
3. Absolutně spojitá funkce okolo  $C$  je spojitá v každém bodě množiny  $C$ .
4. Existuje spojitá funkce na  $[0, 1]$ , která není absolutně spojitá (viz *Otázky*).
5. Množina absolutně spojitých funkcí na  $(a, b)$  je uzavřená na lineární kombinace, součiny a absolutní hodnoty.

**DEFINICE.** Funkce  $F$  na intervalu  $I$  se nazývá **K-primitivní funkce k  $f$  na  $I$** , jestliže

1.  $F'(x) = f(x)$  s.v. na  $I$ ;
2.  $F$  je absolutně spojitá okolo  $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$ .

Množina  $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$  se nazývá **výjimečná množina funkce  $f$** .

## POZOROVÁNÍ.

1. Každá J-primitivní funkce k  $f$  na  $I$  je K-primitivní funkce k  $f$  na  $I$ .
2. Je-li  $F$  K-primitivní funkce k  $f$  na  $(a, b)$ , má tutéž vlastnost i  $F + k$  pro libovolné  $k \in \mathbb{R}$ .
3. Jsou-li  $F, G$  K-primitivní funkce k  $f, g$  na  $(a, b)$ , je  $\alpha F + \beta G$  K-primitivní funkce k  $\alpha f + \beta g$  na  $(a, b)$ .

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## VĚTA. (Jednoznačnost) Dvě K-primitivní funkce k $f$ na $I$ se liší o konstantu.

**Důkaz.** je podobný důkazu obdobného tvrzení pro **J-primitivní funkce**. Nejdříve je nutné si uvědomit, že lze důkaz opět převést na funkce s nulovou derivací. Jestliže  $F, G$  jsou dvě K-primitivní funkce k  $f$ , s výjimečnými množinami  $C, D$ , pak  $F - G$  je absolutně spojitá okolo  $C \cup D$  a  $(F - G)' = 0$  na  $I \setminus (C \cup D)$ . Jedině absolutní spojitost  $F - G$  okolo  $C \cup D$  nemusí být zřejmá. Stačí si však uvědomit, že pokud interval  $(a_n, b_n)$  z **definice** např. neprotíná  $D$ , pak  $G(a_n) = G(b_n)$ .

Stačí tedy ukázat, že pokud je  $F$  absolutně spojitá okolo nulové množiny  $C \subset I$  a  $F' = 0$  na  $I \setminus C$ , je  $F$  konstantní na  $I$ . Zřejmě můžeme opět předpokládat, že  $I$  je otevřený interval  $(a, b)$ .

Nechť  $[r, s] \subset (a, b)$  a  $\varepsilon > 0$ . Pro každé  $x \in (a, b)$  existuje okolí  $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$  tak, že  $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon|y - x|$  pro  $y \in U_x$  pokud  $x \notin C$  (protože  $F'(x) = 0$ ). Protože  $f$  je absolutně spojitá okolo  $C$ , existuje  $\delta > 0$  tak, že platí příslušná vlastnost z **definice absolutní spojitosti** pro zvolené  $\varepsilon$ .

Pro nalezené  $\delta$  existuje pokrytí  $\{(a_n, b_n)\}$  množiny  $C$  podintervaly z  $(a, b)$  takové, že  $\sum(b_n - a_n) < \delta$ . Z pokrytí  $\{(a_n, b_n)\} \cup \{U_x; x \notin C\}$  intervalu  $[r, s]$  se podle **pokrývacího lemmatu** vybere konečné pokrytí  $\{I_i\}_{i=1}^k$ .

Stejně jako pro J-primitivní funkce se najdou body  $y_0, \dots, y_k$  tak, že dva sousední body  $y_i, y_{i+1}$  leží v  $I_i$ . V případě, že  $U_i = U_x$  pro nějaké  $x \notin C$ , je  $|F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon(y_{i+1} - y_i)$ . Zbývající intervaly  $I_{i_l}$  náležejí do souboru  $\{(a_n, b_n)\}$  a tedy součet  $\sum_{i=i_l} (y_{i+1} - y_i) < \delta$ . Z absolutní spojitosti vyplývá  $\sum_{i=i_l} |F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon$  a tedy dohromady

$$|F(r) - F(s)| \leq \sum_{i_l} |F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon(1 + s - r).$$

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokrývací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integrálu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní
- konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



## Poznámky 4   Otázky 4

## Cvičení 4   Učení 4

obecný integrál
nulová množina
skoro všude
vlastnosti n.m.
J-primitivní funkce
vlastnosti J-p.f.
J-korektnost
pokryvací lemma
monotónní funkce
J-integrál
vlastnosti J-i.
J-srovnávání
absolutní spoj.okolo C
K-primitivní funkce
vlastnosti K-p.f.
K-korektnost
K-integrál
vlastnosti K-i.
K-srovnávání
existence K-integralu
kritéria
ekvivalence konver-
gence
absolutní
konvergence
L-primitivní funkce
L-integrál
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

# K-INTEGRÁL

**DEFINICE.** Necht' jsou splněny následující tři podmínky pro funkci  $f$  a interval  $(a, b)$ :

1. funkce  $f$  má na  $(a, b)$  K-primitivní funkci  $F$ ;
2. existují limity  $F(a_+)$ ,  $F(b_-)$ ;
3. rozdíl  $F(b_-) - F(a_+)$  má smysl.

Potom se definuje se **K-integrál** funkce  $f$ :

$$({K}) \int_a^b f = F(b_-) - F(a_+).$$

Podobně jako u předchozích integrálů se definují  $(K) \int_a^a = 0$ ,  $(K) \int_b^a = -(K) \int_a^b$ . Množina všech funkcí na intervalu  $(a, b)$ , které mají vlastní K-integrál, se značí  $K(a, b)$  a prvky této množiny se nazývají **K-integrovatelné** funkce, nebo se říká, že jejich K-integrál **konverguje** (na rozdíl od termínu *existuje*, kdy může být hodnota integrálu nevlastní).

**VĚTA. (Souhrn vlastností K-integrálu)**

1.  $N(a, b) \subset J(a, b) \subset K(a, b)$ .
2.  $K(a, b)$  je lineární podprostor prostoru všech funkcí na  $(a, b)$  a  $(K) \int_a^b$  je lineární zobrazení  $K(a, b)$  do  $\mathbb{R}$ .

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integrálu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. (a) Je-li  $(c, d) \subset (a, b)$ , je  $K(a, b) \subset K(c, d)$ , kde poslední inkluzí se míní zúžení funkcí.

(b) Je-li  $c \in (a, b)$ , je  $K(a, b) = K(a, c) \cap K(c, b)$ .

4. Je-li  $f \in K(a, b)$ , je  $(K) \int_a^x f(t) dt$  K-primitivní funkce k  $f$ .

5. Je-li  $f$  nezáporná funkce s.v. na  $(a, b)$ , která tam má K-primitivní funkci, pak existuje  $\int_a^b f \geq 0$ .

6. Je-li  $f \in K(a, b)$ , je  $(K) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$ , kde  $a \leq a_n \leq b_n \leq b$  a  $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ .

7. Necht'  $F, G$  jsou K-primitivní funkce k  $f, g$  resp., na  $(a, b)$ . Potom  $(K) \int_a^b Fg = [FG]_a^b - (K) \int_a^b fG dx$ , jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.

8. Necht'  $f$  má K-primitivní funkci na intervalu  $I$ . Potom  $(K) \int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)} f(x) dx = (K) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ , je-li jedna strana konečná a  $\varphi$  zobrazuje ryze monotónně  $(\alpha, \beta)$  do  $I$ .

**DŮSLEDEK.** Necht' funkce  $f, g$  jsou definovány na intervalu  $(a, b)$ .

1.  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ , pokud  $f, g \in K(a, b), f(x) \leq g(x)$  s.v. na  $(a, b)$ ;

2.  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ , pokud  $f, |f| \in K(a, b)$ .

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní
- konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

# KONVERGENCE A EXISTENCE K-INTEGRÁLU

Postup v této části je obdobný jako v příslušné části pro **Newtonovy integrály**.

## VĚTA. (Kritéria konvergence K-integrálu)

1. (**Srovnávací kritérium**) Necht'  $f$  má K-primitivní funkci na  $(a, b)$ . Jestliže existují  $g, h \in K(a, b)$  tak, že  $g \leq f \leq h$  s.v. na  $(a, b)$ , pak  $f \in K(a, b)$ .

2. Necht' funkce  $g$  je monotónní na  $[a, b)$ .

(**Dirichletovo kritérium**) Jestliže  $f$  má omezenou K-primitivní funkci na  $(a, b)$  a  $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$ , pak  $(K) \int_a^b f(x)g(x) dx$  konverguje.

(**Abelovo kritérium**) Jestliže  $f \in K(a, b)$  a  $g$  je omezená, pak  $fg \in K(a, b)$ .

**Důkaz.** 1. Jsou-li  $F, G, H$  K-primitivní funkce k  $f, g, h$  na  $(a, b)$ , je  $F - G$  neklesající a  $F - H$  nerostoucí. Odtud a z existence vlastních limit funkcí  $G, H$  v krajních bodech plynou i existence vlastních limit v krajních bodech funkcí  $F - G, F - H$ , a tedy i funkce  $F$ .

2. Protože  $g$  je monotónní, má s.v. derivaci (viz *Otázky*). Jsou tedy splněny předpoklady pro použití integrace per partes:

$$(K) \int_a^b f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - (K) \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

Bod  $a$  nečiní potíže. Protože je  $g$  monotónní a vždy omezená, má v  $b$  vlastní limitu.

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integrálu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní
- konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

V případě Dirichletova kritéria je  $F$  omezená a  $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$  a tedy  $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)g(x) = 0$ .

V případě Abelova kritéria existuje vlastní  $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$  a tedy i  $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)g(x)$ .

Zbývá ukázat konvergenci  $(K) \int_a^b F(x)g'(x) dx$ . V obou případech je  $F$  omezená a tedy  $|Fg'| \leq K|g'|$  na  $[a, b)$ . Protože  $g$  je monotónní, nemění  $g'$  znaménko a  $(K) \int_a^b |g'(x)| dx$  konverguje právě když konverguje  $(K) \int_a^b g'(x) dx$ . Poslední integrál se rovná  $g(b) - g(a)$ .

Následující důsledky (první je důsledkem srovnávacího kritéria, druhý Abelova kritéria) uvádějí ekvivalence pro konvergenci integrálů.

## DŮSLEDEK.

- (nelimitní) Necht' nezáporné funkce  $f, g$  mají  $K$ -primitivní funkce na  $[a, b)$ . Jestliže existují kladná čísla  $K, L$  tak, že na  $[a, b)$  platí s.v.  $Kf(x) \leq g(x) \leq Lf(x)$ , pak  $(K) \int_a^b f(x) dx$  konverguje právě když  $(K) \int_a^b g(x) dx$  konverguje.
- (limitní) Necht'  $f, g$  jsou nezáporné s.v. na  $[a, b)$  a mají tam  $K$ -primitivní funkce. Jestliže  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$ , pak  $(K) \int_a^b f(x) dx$  konverguje právě když  $(K) \int_a^b g(x) dx$  konverguje.

**DŮSLEDEK.** Necht' na  $[a, b)$  jsou definovány funkce  $f, g, h$ , přičemž  $g(x)/h(x)$  konverguje pro  $x \rightarrow b-$  monotónně k nenulovému vlastnímu číslu. Pak  $(K) \int_a^b f(x)g(x) dx$  konverguje právě když  $(K) \int_a^b f(x)h(x) dx$  konverguje.

obecný integrál	
nulová množina	
skoro všude	
vlastnosti n.m.	
J-primitivní funkce	
vlastnosti J-p.f.	
J-korektnost	
pokryvací lemma	
monotónní funkce	
J-integrál	
vlastnosti J-i.	
J-srovnávání	
absolutní spoj.okolo C	
K-primitivní funkce	
vlastnosti K-p.f.	
K-korektnost	
K-integrál	
vlastnosti K-i.	
K-srovnávání	
existence K-integrálu	
kritéria	
ekvivalence konver-	
gence	
absolutní	
konvergence	
L-primitivní funkce	
L-integrál	
Poznámky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení	1 2 3 4 5 6 7 8 9

# LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Pro K-integrál lze stejně jako pro Newtonův integrál definovat absolutní konvergenci a dokázat stejné základní tvrzení.

**DEFINICE.** K-integrál funkce  $f$  na  $(a, b)$  konverguje absolutně, jestliže  $f$  má na  $(a, b)$  K-primitivní funkci a  $|f| \in K(a, b)$ , a konverguje neabsolutně, jestliže  $f \in K(a, b)$  a  $|f| \notin K(a, b)$ .

**VĚTA.** Absolutně konvergentní K-integrál je konvergentní.

U K-primitivní funkce se může hůře zjišťovat, zda je absolutně spojitá okolo nějaké nulové množiny.

Jednodušší mohou být případy, kdy je K-primitivní funkce absolutně spojitá na celém intervalu  $(a, b)$ .

**DEFINICE.** Funkce  $F$  se nazývá L-primitivní k  $f$  na  $(a, b)$ , jestliže

1.  $F'(x) = f(x)$  s.v. na  $(a, b)$ ;
2.  $F$  je absolutně spojitá na  $(a, b)$ .

Zřejmě je každá L-primitivní funkce i K-primitivní funkcí, ale existují funkce, které mají K-primitivní funkci a nemají L-primitivní funkci.

Podobně jako J-integrál a K-integrál se dá pomocí L-primitivních funkcí definovat L-integrál a příbuzné pojmy. I tento integrál má podobné vlastnosti, jako ty předchozí.

**VĚTA.**  $f \in L(a, b)$  právě když  $f, |f| \in K(a, b)$ .

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**DŮSLEDEK.**  $f \in L(a, b)$  právě když  $f$  má absolutně konvergentní K-integrál.

Podle předchozího důsledku se Lebesgueův integrál nazývá absolutně konvergentní integrál.

Otázky 7

Cvičení 7

- obecný integrál
- nulová množina
- skoro všude
- vlastnosti n.m.
- J-primitivní funkce
- vlastnosti J-p.f.
- J-korektnost
- pokryvací lemma
- monotónní funkce
- J-integrál
- vlastnosti J-i.
- J-srovnávání
- absolutní spoj.okolo C
- K-primitivní funkce
- vlastnosti K-p.f.
- K-korektnost
- K-integrál
- vlastnosti K-i.
- K-srovnávání
- existence K-integralu
- kritéria
- ekvivalence konvergence
- absolutní konvergence
- L-primitivní funkce
- L-integrál
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9