# OBECNÝ URČITÝ INTEGRÁL

Zobecnění Newtonova nebo Riemannova integrálu se definují různým způsobem a dostanou se někdy různé, někdy stejné pojmy.

V tomto textu bude postup volen jako zobecnění Newtonova integrálu, protože je to vhodný postup pro výpočet integrálů.

Funkce signum nemá primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$, ale funkce $|x|$ je spojitá a primitivní k signum na $(-\infty, 0)$ i na $(0, +\infty)$.

Vztah

$$\int_a^b \operatorname{sign} t \,\mathrm{dt} = |b| - |a| \,,$$

zřejmě i v tomto případě odpovídá tomu, co se v předchozí části pod integrálem chápalo (např. vyjádření plochy s příslušnými znaménky).

Co je vlastně potřebné pro funkci $F$, aby definice

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{dx} = F(b) - F(a)$$

zobecňovala Newtonův integrál?

Protože se jedná o zobecnění, musí být $F' = f$ na intervalech, kde $F'$ existuje.

## NULOVÉ MNOŽINY

Asi by nemělo smysl, kdyby $F'$ neexistovala na velké množině, např. na nějakém intervalu.

Jde o to určit vhodně význam malé množiny. Lze pochopit, že konečné množiny jsou malé (vzhledem k intervalům).

Jsou malé i spočetné množiny? To už tak jasné není, protože množina racionálních čísel je spočetná a v jistém smyslu vytváří všechna reálná čísla.

**DEFINICE.** Množina $C$ reálných čísel se nazývá nulová, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existují intervaly $(a_n, b_n)$ takové, že

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \supset C$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Říká se, že vlastnost V platí skoro všude (zkratka s.v.) na nějaké množině $M \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje nulová množina $C$ a V platí na $M \setminus C$.

**POZOROVÁNÍ.**

1. Každá nejvýše spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ je nulová.
2. Podmnožina nulové množiny je nulová množina.
3. Spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina.
4. Interval není nulová množina.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

# J-INTEGRÁL

## J-PRIMITIVNÍ FUNKCE

Podle předchozího pozorování jsou konečné a spočetné množiny nulové.

Nespočetné množiny mohou ale nemusejí být nulové.

To naznačuje možnost, že nejvýše spočetné množiny tvoří specifickou třídu nulových množin a že zobecněné primitivní funkce definované na základě této třídy by mohly být také nějak specifické.

V předchozím příkladě pro signum by se dostala jiná hodnota integrálu, pokud by místo zobecněné primitivní funkce $|x|$ byla použita např. funkce $|x| + 1$ na $(-\infty, 0)$ a $|x|$ na $(0, +\infty)$.

**DEFINICE.** Funkce $F$ na intervalu $I$ se nazývá J-primitivní funkce k $f$ na $I$, jestliže

1. $F'(x) = f(x)$ na $I$ až na nejvýše spočetnou množinu;
2. $F$ je spojitá na $I$.

Spočetná množina $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$ se nazývá výjimečná množina funkce $f$.

**POZOROVÁNÍ.**

1. Každá spojitá funkce na intervalu $I$ má na $I$ J-primitivní funkci.
2. Je-li $F$ J-primitivní funkce k $f$ na $I$, má tutéž vlastnost i $F + k$ pro libovolné $k \in \mathbb{R}$.
3. Jsou-li $F, G$ J-primitivní funkce k $f, g$ na $I$, je $\alpha F + \beta G$ J-primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na $I$.

**VĚTA. (Jednoznačnost)** Dvě J–primitivní funkce k $f$ na $I$ se liší o konstantu.

**LEMMA.** Nechť kompaktní interval $[a, b]$ je pokryt systémem $\mathcal{S}$ otevřených intervalů. Pak existuje konečný podsystém $\{S_1, ..., S_k\}$, který pokrývá $[a, b]$ a $S_i, S_j$ se protínají jen pokud $|i - j| \leq 1$..

**Důkaz.** Označí se $p = \sup\{x \in [a, b]; [a, x]$ lze pokrýt konečným podsystémem systému $\mathcal{S}\}$. Kdyby $p < b$, stačí vzít jednu množinu z $\mathcal{S}$, např. $(r, s)$, obsahující $p$ a potom lze pokrýt konečným podsystémem i interval $[a, q]$ pro $q \in (p, s)$, což je spor.

Lze předpokládat, že získaný podsystém je minimální, tj. po odebrání libovolného jeho prvku zbylý systém už $[a, b]$ nepokrývá.

Nechť se získaný konečný podsoubor skládá z intervalů $S_1, S_2, ..., S_k$ se středy $s_1, s_2, ..., s_k$ přičemž $s_1 < s_2 < ... < s_k$.

Ukažte, že z minimality vyplývá žádaná vlastnost: intervaly $S_i, S_j$ se protínají jedině když $|i - j| \leq 1$.

**Důkaz. věty.** Tvrzení stačí dokázat pro otevřený interval $I = (a, b)$.

Nechť $C$ je spočetná množina bodů $c_n, n = 1, 2, ...$ z $(a, b)$, $F$ je spojitá na $(a, b)$ a $F'(x) = 0$ pro $x \in I \setminus C$. Má se dokázat, že $F$ je konstantní na $(a, b)$.

Nechť $r, s \in (a, b), r < s$. Stačí ukázat, že $|F(r) - F(s)|$ je libovolně malé. Buď tedy $\varepsilon > 0$. Může se předpokládat, že $r, s \in C$ (jinak se $C$ o tyto body doplní).

Pro každé $x \in (a,b)$ existuje okolí $U_x = (x-\delta_x, x+\delta_x) \subset (a,b)$ tak, že $|F(y)-F(x)| \le \varepsilon|y-x|$ pro $y \in U_x$ pokud $x \notin C$ (protože $F'(x) = 0$) a tak, že $|F(y)-F(x)| \le \varepsilon/2^n$ pro $y \in U_x$ pokud $x = c_n$ (protože $F$ je v $c_n$ spojitá).

Podle předchozího lemmatu lze najít body $x_1 < x_2 < ... < x_k$ tak, že $\{U_{x_i}\}_1^k$ pokrývá $[r,s]$ a protínají se pouze sousední intervaly.

Pro každé $i$ existuje $y_i \in U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \cap (x_i, x_{i+1})$, přičemž $y_1$ lze zvolit větší než $r$ a $y_{k-1}$ menší než $s$. Nyní se položí $y_0 = r, y_k = s$ a tedy je $y_i < y_{i+1}$ pro $i = 0, ..., k-1$.

Potom

$$|F(r)-F(s)| \le \sum_{i=0}^{k-1} |F(y_{i+1}) - F(y_i)|\,.$$

Protože oba sousední body $y_i, y_{i+1}$ leží v $U_{x_i}$ po obou stranách jeho středu (kromě, možná, prvního a posledního intervalu), je $|F(y_{i+1}) - F(y_i)|$ buď nejvýše $\varepsilon(y_{i+1} - y_i)$ pokud $x_i \notin C$ a nejvýše $\varepsilon/2^n$ pokud $x_i = c_n$.

Odtud vyplývá, že

$$|F(r)-F(s)| \le \sum_{i=0}^{k-1} |F(y_{i+1}) - F(y_i)| \le \varepsilon((s-r)+2)\,.$$

Zřejmě funkce typu signum a jejich posunutí a lineární kombinace (tzv. jednoduché nebo schodovité funkce, mající jen konečně mnoho hodnot, které nabývají na konečně mnoha intervalech).

**VĚTA.** Každá monotónní funkce (a tedy i jejich lineární kombinace) na intervalu $I$ má na tomto intervalu J-primitivní funkci.

**Důkaz.** Nechť $f$ je např. neklesající funkce na $I$ a $C = \{c_n\}$ je spočetná množina jejích bodů nespojitosti (skoků).

Označí-li se $s_n$ velikost skoku v bodě $c_n$, pak nezáporná funkce $s$, která má v $x \in I$ hodnotu $\sum\{s_n; c_n < x\}$, se nazývá funkce skoků. Rozdíl $f - s$ je spojitá funkce na $I$, která tedy má primitivní funkci na $I$.

Snadno se zjistí, že $S(x) = \sum\{s_n(x - c_n); c_n < x\}$ je J-primitivní funkce k $s$ na $I$ s výjimečnou množinou $C$. Tedy i funkce $f$ má J-primitivní funkci.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

## J-INTEGRÁL

Nyní lze definovat integrál stejným způsobem, jako u Newtonova integrálu.

**DEFINICE.** Nechť jsou splněny následující tři podmínky pro funkci $f$ a interval $I$ s hraničními body $a < b$:

1. funkce $f$ má na $I$ J-primitivní funkci $F$;
2. existují limity $F(a_+), F(b_-)$;
3. rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ má smysl.

Potom se definuje se J-integrál funkce $f$:

$$(J)\int_a^b f\,\mathrm{dx} = F(b_-) - F(a_+)\,.$$

Podobně jako u Newtonova integrálu se definují $(J)\int_a^a = 0\,,\,(J)\int_b^a = -(J)\int_a^b$

Množina všech funkcí, které mají vlastní J-integrál $(J)\int_a^b f\,\mathrm{dx}$, se značí $J(a,b)$. Funkce z $J(a,b)$ se nazývají J-integrovatelné, nebo se říká, že jejich J-integrál konverguje (na rozdíl od termínu *existuje*, kdy může být hodnota integrálu nevlastní).

Ze symbolu pro integrál není vidět na jakém typu intervalu $I$ (např. otevřeném, uzavřeném) je integrál definován. Není to totiž podstatné, protože z definice je vidět, že hodnota integrálu nezávisí na tom, zda koncové body intervalu $I$ náleží do $I$.

V dalším textu bude proto často bez újmy na obecnosti brán otevřený interval $I$.

**VĚTA. (Souhrn vlastností J-integrálu)**

1. $N(a,b) \subset J(a,b)$.
2. Pro každou monotónní funkci na $(a,b)$ existuje J-integrál z $f$ na $(a,b)$.
3. $J(a,b)$ je lineární podprostor prostoru všech funkcí na $(a,b)$ a $(J)\int_a^b$ je lineární zobrazení $J(a,b)$ do $\mathbb{R}$.
4. (a) Je-li $(c,d) \subset (a,b)$, je $J(a,b) \subset J(c,d)$, kde poslední inkluzí se míní zúžení funkcí.
   (b) Je-li $c \in (a,b)$, je $J(a,b) = J(a,c) \cap J(c,b)$.
5. Je-li $f \in J(a,b)$ je $(J)\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ J-primitivní funkce k $f$ na $(a,b)$.
6. Je-li $f$ nezáporná funkce na $(a,b)$ (kromě, možná, spočetné množiny), která tam má J-primitivní funkci, pak existuje $\int_a^b f \geq 0$.
7. Je-li $f \in J(a,b)$, je $(J)\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty} (J)\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{dx}$, kde $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ a $\lim a_n = a, \lim b_n = b$.
8. Nechť $F, G$ jsou J-primitivní funkce k $f, g$ resp., na $(a,b)$. Potom $(J)\int_a^b Fg = [FG]_a^b - (J)\int_a^b fG\,\mathrm{dx}$, jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.
9. Nechť $f$ má J-primitivní funkci na intervalu $I$. Nechť existuje spočetná množina $C$ a funkce $\varphi$ tak, že
   - $\varphi$ zobrazuje ryze monotónně $(\alpha,\beta)$ do $I$;
   - $\varphi'$ existuje na $(\alpha,\beta)\setminus C$;

   Potom $(J)\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\,\mathrm{dx} = (J)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$, je-li jedna strana konečná.

**Důkaz.** Vlastnosti 1 – 5 se dokáží přímo z definic. Pro ověření vlastnosti 6 je nutné si uvědomit, že spojitá funkce, která má nezápornou derivaci všude na intervalu kromě nejvýše spočetné množiny, je neklesající (viz návod v *Otázkách*).

Vlastnosti 7 – 9 se dokazují stejně jako podobné vlastnosti pro Newtonovy integrály. substituce?

**DŮSLEDEK.** Nechť funkce $f, g$ jsou definovány na intervalu $(a,b)$ kromě nejvýše spočetné množiny.

1. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, pokud $f, g \in J(a,b)$, $f(x) \leq g(x)$ na $(a,b)$ kromě nejvýše spočetné množiny;
2. $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$, pokud $f, |f| \in J(a,b)$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

# K-INTEGRÁL

## K-PRIMITIVNÍ FUNKCE

Pro obecnější integrál než je J-integrál, je nejdříve nutné definovat obecnější primitivní funkci, která musí mít opět obvyklé vlastnosti.

V definicích bude místo písmene J použito písmene K podle jména Jaroslav Kurzweil, který okolo r.1955 tento integrál definoval (nezávisle použil stejnou definici a ve stejné době R.Henstock). Oba postupovali pomocí zobecnění Riemannovy metody.

Primitivní funkce byla zobecněna na J-primitivní tím, že se předpokládala existence derivace nikoli všude, ale až na spočetnou množinu.

Jak vidět z příkladu Cantorovy funkce (viz *Otázky*), v tomto případě nestačí předpokládat spojitost zobecněné primitivní funkce (neplatila by totiž základní věta o primitivních funkcích, že dvě zobecněné primitivní funkce k téže funkci se liší o konstantu).

Z důkazu základní věty o J-primitivních funkcích je vidět, co je potřeba, aby podobná věta platila i pro jiné než spočetné výjimečné množiny $C$; potřebná vlastnost je zformulována v následující definici.

**DEFINICE.** Nechť $C$ je podmnožina intervalu $I$. Funkce $F$ definovaná na $I$ se nazývá absolutně spojitá na $I$ okolo $C$, jestliže pro každý interval $[r, s] \subset I$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný soubor disjunktních intervalů $\{(a_n, b_n)\}_1^k$ v $I$ protínajících $C \cap [r, s]$ platí

$$\sum_{n=1}^{k} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n=1}^{k} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon .$$

Jestliže $C = I$, říká se, že $f$ je absolutně spojitá funkce na $I$.

**POZOROVÁNÍ.**

1. Je-li $f$ absolutně spojitá na $I$ okolo množiny $C$, je absolutně spojitá na $I$ okolo každé podmnožiny $C$.
2. Každá spojitá funkce na intervalu $I$ je absolutně spojitá okolo každé spočetné podmnožiny $I$.
3. Absolutně spojitá funkce okolo $C$ je spojitá v každém bodě množiny $C$.
4. Existuje spojitá funkce na $[0, 1]$, která není absolutně spojitá (viz *Otázky*).
5. Množina absolutně spojitých funkcí na $(a, b)$ je uzavřená na lineární kombinace, součiny a absolutní hodnoty.

**DEFINICE.** Funkce $F$ na intervalu $I$ se nazývá K–primitivní funkce k $f$ na $I$, jestliže

1. $F'(x) = f(x)$ s.v. na $I$;
2. $F$ je absolutně spojitá okolo $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$.

Množina $\{x \in I; F'(x) \neq f(x)\}$ se nazývá výjimečná množina funkce $f$.

**POZOROVÁNÍ.**

1. Každá J-primitivní funkce k $f$ na $I$ je K-primitivní funkce k $f$ na $I$.
2. Je-li $F$ K-primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$, má tutéž vlastnost i $F + k$ pro libovolné $k \in \mathbb{R}$.
3. Jsou-li $F, G$ K-primitivní funkce k $f, g$ na $(a, b)$, je $\alpha F + \beta G$ K-primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na $(a, b)$.

**VĚTA.** **(Jednoznačnost)** Dvě K-primitivní funkce k $f$ na $I$ se liší o konstantu.

**Důkaz.** je podobný důkazu obdobného tvrzení pro J-primitivní funkce. Nejdříve je nutné si uvědomit, že lze důkaz opět převést na funkce s nulovou derivací. Jestliže $F, G$ jsou dvě K-primitivní funkce k $f$, s výjimečnými množinami $C, D$, pak $F - G$ je absolutně spojitá okolo $C \cup D$ a $(F - G)' = 0$ na $I \setminus (C \cup D)$. Jedině absolutní spojitost $F - G$ okolo $C \cup D$ nemusí být zřejmá. Stačí si však uvědomit, že pokud interval $(a_n, b_n)$ z definice např. neprotíná $D$, pak $G(a_n) = G(b_n)$.

Stačí tedy ukázat, že pokud je $F$ absolutně spojitá okolo nulové množiny $C \subset I$ a $F' = 0$ na $I \setminus C$, je $F$ konstantní na $I$. Zřejmě můžeme opět předpokládat, že $I$ je otevřený interval $(a, b)$.

Nechť $[r, s] \subset (a, b)$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $x \in (a, b)$ existuje okolí $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$ tak, že $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon |y - x|$ pro $y \in U_x$ pokud $x \notin C$ (protože $F'(x) = 0$). Protože $f$ je absolutně spojitá okolo $C$, existuje $\delta > 0$ tak, že platí příslušná vlastnost z definice absolutní spojitosti pro zvolené $\varepsilon$.

Pro nalezené $\delta$ existuje pokrytí $\{(a_n, b_n)\}$ množiny $C$ podintervaly z $(a, b)$ takové, že $\sum (b_n - a_n) < \delta$. Z pokrytí $\{(a_n, b_n)\} \cup \{U_x; x \notin C\}$ intervalu $[r, s]$ se podle pokrývacího lemmatu vybere konečné pokrytí $\{I_i\}_{i=1}^k$.

Stejně jako pro J-primitivní funkce se najdou body $y_0, ..., y_k$ tak, že dva sousední body $y_i, y_{i+1}$ leží v $I_i$. V případě, že $U_i = U_x$ pro nějaké $x \notin C$, je $|F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon (y_{i+1} - y_i)$. Zbývající intervaly $I_{i_l}$ náleží do souboru $\{(a_n, b_n)\}$ a tedy součet $\sum_{i=i_l} (y_{i+1} - y_i) < \delta$. Z absolutní spojitosti vyplývá $\sum_{i=i_l} |F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon$ a tedy dohromady

$$|F(r) - F(s)| \leq \sum_{i_l} |F(y_i) - F(y_{i+1})| < \varepsilon (1 + s - r) \,.$$

Poznámky 4 Otázky 4

Cvičení 4

Učení 4

## K-INTEGRÁL

**DEFINICE.** Nechť jsou splněny následující tři podmínky pro funkci $f$ a interval $(a, b)$:

1. funkce $f$ má na $(a, b)$ K-primitivní funkci $F$;
2. existují limity $F(a_+), F(b_-)$;
3. rozdíl $F(b_-) - F(a_+)$ má smysl.

Potom se definuje se K-integrál funkce $f$:

$$(K) \int_a^b f = F(b_-) - F(a_+) \,.$$

Podobně jako u předchozích integrálů se definují $(K) \int_a^a = 0 \,, (K) \int_b^a = -(K) \int_a^b$
Množina všech funkcí na intervalu $(a, b)$, které mají vlastní K-integrál, se značí $K(a, b)$ a prvky této množiny se nazývají K-integrovatelné funkce, nebo se říká, že jejich K-integrál konverguje (na rozdíl od termínu *existuje*, kdy může být hodnota integrálu nevlastní).

**VĚTA.** **(Souhrn vlastností K-integrálu)**

1. $N(a, b) \subset J(a, b) \subset K(a, b)$.
2. $K(a, b)$ je lineární podprostor prostoru všech funkcí na $(a, b)$ a $(K) \int_a^b$ je lineární zobrazení $K(a, b)$ do $\mathbb{R}$.

3. (a) Je-li $(c,d) \subset (a,b)$, je $K(a,b) \subset K(c,d)$, kde poslední inkluzí se míní zúžení funkcí.

   (b) Je-li $c \in (a,b)$, je $K(a,b) = K(a,c) \cap K(c,b)$.

4. Je-li $f \in K(a,b)$, je $(K)\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ K-primitivní funkce k $f$.

5. Je-li $f$ nezáporná funkce s.v. na $(a,b)$, která tam má K-primitivní funkci, pak existuje $\int_a^b f \geq 0$.

6. Je-li $f \in K(a,b)$, je $(K)\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty}(K)\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{dx}$, kde $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ a $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

7. Nechť $F, G$ jsou K-primitivní funkce k $f, g$ resp., na $(a,b)$. Potom $(K)\int_a^b Fg = [FG]_a^b - (K)\int_a^b fG\,\mathrm{dx}$, jestliže pravá strana má smysl a je vlastní.

8. Nechť $f$ má K-primitivní funkci na intervalu $I$. Potom $(K)\int_{\varphi(\alpha+)}^{\varphi(\beta-)} f(x)\,\mathrm{dx} = (K)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$, je-li jedna strana konečná a $\varphi$ zobrazuje ryze monotónně $(\alpha,\beta)$ do $I$.

**DŮSLEDEK.** Nechť funkce $f, g$ jsou definovány na intervalu $(a,b)$.

1. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, pokud $f, g \in K(a,b)$, $f(x) \leq g(x)$ s.v. na $(a,b)$;
2. $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$, pokud $f, |f| \in K(a,b)$.

Poznámky 5 Otázky 5

## KONVERGENCE A EXISTENCE K-INTEGRÁLU

Postup v této části je obdobný jako v příslušné části pro Newtonovy integrály.

**VĚTA. (Kritéria konvergence K-integrálu)**

1. (**Srovnávací kritérium**) Nechť $f$ má K-primitivní funkci na $(a,b)$. Jestliže existují $g, h \in K(a,b)$ tak, že $g \leq f \leq h$ s.v. na $(a,b)$, pak $f \in K(a,b)$.
2. Nechť funkce $g$ je monotónní na $[a,b)$.

   (**Dirichletovo kritérium**) Jestliže $f$ má omezenou K-primitivní funkci na $(a,b)$ a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, pak $(K)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx}$ konverguje.

   (**Abelovo kritérium**) Jestliže $f \in K(a,b)$ a $g$ je omezená, pak $fg \in K(a,b)$.

**Důkaz.** 1. Jsou-li $F, G, H$ K-primitivní funkce k $f, g, h$ na $(a,b)$, je $F - G$ neklesající a $F - H$ nerostoucí. Odtud a z existence vlastních limit funkcí $G, H$ v krajních bodech plynou i existence vlastních limit v krajních bodech funkcí $F - G, F - H$, a tedy i funkce $F$.

2. Protože $g$ je monotónní, má s.v. derivaci (viz *Otázky*). Jsou tedy splněny předpoklady pro použití integrace per partes:

$$(K)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = [F(x)g(x)]_a^b - (K)\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Bod $a$ nečiní potíže. Protože je $g$ monotónní a vždy omezená, má v $b$ vlastní limitu.

V případě Dirichletova kritéria je $F$ omezená a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$ a tedy $\lim_{x\to b_-} F(x)g(x) = 0$.

V případě Abelova kritéria existuje vlastní $\lim_{x\to b_-} F(x)$ a tedy i $\lim_{x\to b_-} F(x)g(x)$.

Zbývá ukázat konvergenci $(K)\int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. V obou případech je $F$ omezená a tedy $|Fg'| \leq K|g'|$ na $[a,b)$. Protože $g$ je monotónní, nemění $g'$ znaménko a $(K)\int_a^b |g'(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když konverguje $(K)\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x$. Poslední integrál se rovná $g(b)-g(a)$.

Následující důsledky (první je důsledkem srovnávacího kritéria, druhý Abelova kritéria) uvádějí ekvivalence pro konvergenci integrálů.

**DŮSLEDEK.**

1. (nelimitní) Nechť nezáporné funkce $f,g$ mají K-primitivní funkce na $[a,b)$. Jestliže existují kladná čísla $K,L$ tak, že na $[a,b)$ platí s.v. $Kf(x) \leq g(x) \leq Lf(x)$, pak $(K)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když $(K)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

2. (limitní) Nechť $f,g$ jsou nezáporné s.v. na $[a,b)$ a mají tam K-primitivní funkce. Jestliže $\lim\limits_{x\to b_-}\frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $(K)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když $(K)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

**DŮSLEDEK.** Nechť na $[a,b)$ jsou definovány funkce $f,g,h$, přičemž $g(x)/h(x)$ konverguje pro $x\to b_-$ monotónně k nenulovému vlastnímu číslu.Pak $(K)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě když $(K)\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

## LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Pro K-integrál lze stejně jako pro Newtonův integrál definovat absolutní konvergenci a dokázat stejné základní tvrzení.

**DEFINICE.** K-integrál funkce $f$ na $(a,b)$ konverguje absolutně, jestliže $f$ má na $(a,b)$ K-primitivní funkci a $|f|\in K(a,b)$, a konverguje neabsolutně, jestliže $f\in K(a,b)$ a $|f|\notin K(a,b)$.

**VĚTA.** Absolutně konvergentní K-integrál je konvergentní.

U K-primitivní funkce se může hůře zjišťovat, zda je absolutně spojitá okolo nějaké nulové množiny.

Jednodušší mohou být případy, kdy je K-primitivní funkce absolutně spojitá na celém intervalu $(a,b)$.

**DEFINICE.** Funkce $F$ se nazývá L-primitivní k $f$ na $(a,b)$, jestliže

1. $F'(x)=f(x)$ s.v. na $(a,b)$;
2. $F$ je absolutně spojitá na $(a,b)$.

Zřejmě je každá L-primitivní funkce i K-primitivní funkcí, ale existují funkce, které mají K-primitivní funkci a nemají L-primitivní funkci.

Podobně jako J-integrál a K-integrál se dá pomocí L-primitivních funkcí definovat L-integrál a příbuzné pojmy. I tento integrál má podobné vlastnosti, jako ty předchozí.

**VĚTA.** $f\in L(a,b)$ právě když $f,|f|\in K(a,b)$.

**DŮSLEDEK.** $f\in L(a,b)$ právě když $f$ má absolutně konvergentní K-integrál.

Podle předchozího důsledku se Lebesgueův integrál nazývá absolutně konvergentní integrál.

Otázky 7

Cvičení 7