

NĚKTERÁ POUŽITÍ INTEGRÁLU



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

NĚKTERÁ POUŽITÍ INTEGRÁLU



V této kapitole budou ukázány jednoduché aplikace integrálu.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

NĚKTERÁ POUŽITÍ INTEGRÁLU



V této kapitole budou ukázány jednoduché aplikace integrálu.



Důležitější než výsledné vzorce jsou však postupy, které k nim vedou.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

NĚKTERÁ POUŽITÍ INTEGRÁLU



V této kapitole budou ukázány jednoduché aplikace integrálu.



Důležitější než výsledné vzorce jsou však postupy, které k nim vedou.



Základem tu je představa integrálu pomocí Riemannova přístupu. Pro výpočet výsledných vzorců se pak používá Newtonův přístup. Vzájemně se tu tak snoubí oba přístupy.

LEKCE15-IAP

| | |
|-------------------|--|
| délka | |
| obsah | |
| obsah-param | |
| obsah-polar | |
| objem | |
| objem rotace 1 | |
| objem rotace 2 | |
| délka | |
| povrch | |
| povrch rotace | |
| pohyb | |
| těžiště | |
| těžiště drátu | |
| Guldin plocha | |
| těžiště desky | |
| Guldin objem | |
| práce | |
| Poznámky | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Příklady | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Otázky | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Cvičení | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Učení | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |



GEOMETRICKÉ APLIKACE



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GEOMETRICKÉ APLIKACE



Geometrické aplikace se soustředí na obsahy geometrických obrazců v rovině, na objemy těles a na délky křivek v rovině.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

GEOMETRICKÉ APLIKACE



Geometrické aplikace se soustředí na obsahy geometrických obrazců v rovině, na objemy těles a na délky křivek v rovině.



A to je semeniště problémů (příkladů).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBSAH NĚKTERÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBSAH NĚKTERÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ



Měření obecných podmnožin Euklidovských prostorů je obtížné (a v některých případech nemožné). Touto situací a přesným matematickým přístupem se zabývá teorie míry (viz kapitolu 30). Některé ne zcela přesné části této kapitoly budou upřesněny i v kapitolách o funkcích více proměnných.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBSAH NĚKTERÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ



Měření obecných podmnožin Euklidovských prostorů je obtížné (a v některých případech nemožné). Touto situací a přesným matematickým přístupem se zabývá teorie míry (viz kapitolu 30). Některé ne zcela přesné části této kapitoly budou upřesněny i v kapitolách o funkcích více proměnných.



Zde bude pojednáno o měření jednodušších a speciálních množin, které však jsou základem pro většinu případů objevujících se v praxi.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBSAH NĚKTERÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ



Měření obecných podmnožin Euklidovských prostorů je obtížné (a v některých případech nemožné). Touto situací a přesným matematickým přístupem se zabývá teorie míry (viz kapitolu 30). Některé ne zcela přesné části této kapitoly budou upřesněny i v kapitolách o funkcích více proměnných.



Zde bude pojednáno o měření jednodušších a speciálních množin, které však jsou základem pro většinu případů objevujících se v praxi.



Pro „velikost“ některých podmnožin \mathbb{R}^n se používá různých termínů, např. délka pro intervaly v \mathbb{R} , obsah pro geometrické obrazce v \mathbb{R}^2 , objem pro tělesa v \mathbb{R}^3 .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBSAH NĚKTERÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ



Měření obecných podmnožin Euklidovských prostorů je obtížné (a v některých případech nemožné). Touto situací a přesným matematickým přístupem se zabývá teorie míry (viz kapitolu 30). Některé ne zcela přesné části této kapitoly budou upřesněny i v kapitolách o funkcích více proměnných.



Zde bude pojednáno o měření jednodušších a speciálních množin, které však jsou základem pro většinu případů objevujících se v praxi.



Pro „velikost“ některých podmnožin \mathbb{R}^n se používá různých termínů, např. délka pro intervaly v \mathbb{R} , obsah pro geometrické obrazce v \mathbb{R}^2 , objem pro tělesa v \mathbb{R}^3 .



Při nerozlišování dimenze a druhu množin je lépe používat termín *míra*.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Začíná se měřením podmnožin \mathbb{R} .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Začíná se měřením podmnožin \mathbb{R} .



Mírou intervalu I na přímce s koncovými body a, b je jeho délka $|b - a|$ bez ohledu na to, zda je to interval otevřený, uzavřený nebo polootevřený (tj, hranice tu nehraje žádnou roli).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Začíná se měřením podmnožin \mathbb{R} .



Mírou intervalu I na přímce s koncovými body a, b je jeho délka $|b - a|$ bez ohledu na to, zda je to interval otevřený, uzavřený nebo polootevřený (tj, hranice tu nehraje žádnou roli).



Stejný vzorec lze použít i pro bod (degenerovaný interval $[a, a]$), což znamená, že míra bodu (přesněji míra jednobodové množiny) je 0.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Začíná se měřením podmnožin \mathbb{R} .



Mírou intervalu I na přímce s koncovými body a, b je jeho délka $|b - a|$ bez ohledu na to, zda je to interval otevřený, uzavřený nebo polootevřený (tj, hranice tu nehraje žádnou roli).



Stejný vzorec lze použít i pro bod (degenerovaný interval $[a, a]$), což znamená, že míra bodu (přesněji míra jednobodové množiny) je 0.



V *Poznámkách* je návod, jak určit míru některých složitějších množin reálných čísel.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Začíná se měřením podmnožin \mathbb{R} .



Mírou intervalu I na přímce s koncovými body a, b je jeho délka $|b - a|$ bez ohledu na to, zda je to interval otevřený, uzavřený nebo polootevřený (tj, hranice tu nehraje žádnou roli).



Stejný vzorec lze použít i pro bod (degenerovaný interval $[a, a]$), což znamená, že míra bodu (přesněji míra jednobodové množiny) je 0.



V *Poznámkách* je návod, jak určit míru některých složitějších množin reálných čísel.



Pro představu i použití však stačí mít na mysli jen intervaly a body, snad někdy jejich konečná sjednocení.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jestli je v měření délek,
ploch a objemů nějaký zá-
sadní problém, objevuje se
už v \mathbb{R} . A on tam opravdu je
;-)



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

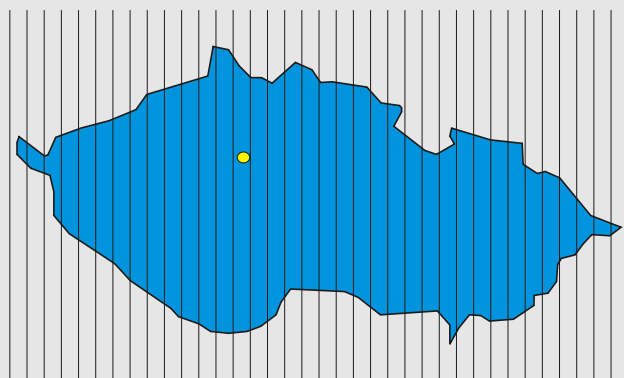
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak postupovat při měření velikosti množin v rovině?

Množina se rozřeže rovnoběžnými řezy na úzké proužky, které se dají při jejich velmi malé šířce považovat za obdélníky a lze tedy spočítat jejich obsah.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

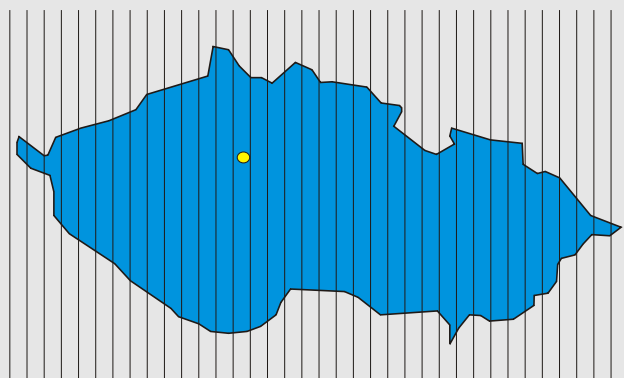
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak postupovat při měření velikosti množin v rovině?

Množina se rozřeže rovnoběžnými řezy na úzké proužky, které se dají při jejich velmi malé šířce považovat za obdélníky a lze tedy spočítat jejich obsah.



Sečtením ploch těchto obdélníků se dostane zhruba obsah obrazce.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozřezáním množiny na proužky a sečtením obsahů obdélníků aproximujících jednotlivé řezy se dostane zhruba míra množiny A .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rozřezáním množiny na proužky a sečtením obsahů obdélníků aproximujících jednotlivé řezy se dostane zhruba míra množiny A .



Pokud se bude šířka obdélníků zužovat, bude výsledné číslo míru lépe vyjadřovat. V limitě, tj. pro nekonečně malou šířku obdélníků, se dostane hledaná míra.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

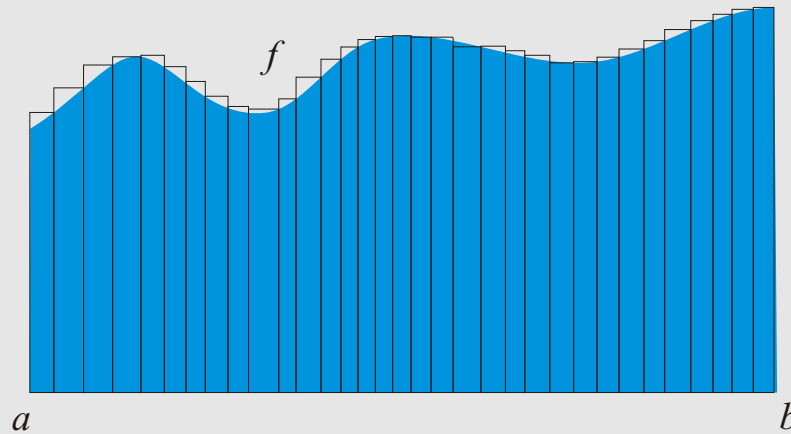
Rozřezáním množiny na proužky a sečtením obsahů obdélníků aproximujících jednotlivé řezy se dostane zhruba míra množiny A .



Pokud se bude šířka obdélníků zužovat, bude výsledné číslo míru lépe vyjadřovat. V limitě, tj. pro nekonečně malou šířku obdélníků, se dostane hledaná míra.



Nepřipomíná to Riemannův přístup definice integrálu?



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označí-li se $A(t)$ míra průniku množiny A s kolmicí na osu x v bodě t , pak se může $\int_{-\infty}^{\infty} A(x) dx$ považovat za míru množiny A , pokud vše použité rozumně existuje.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

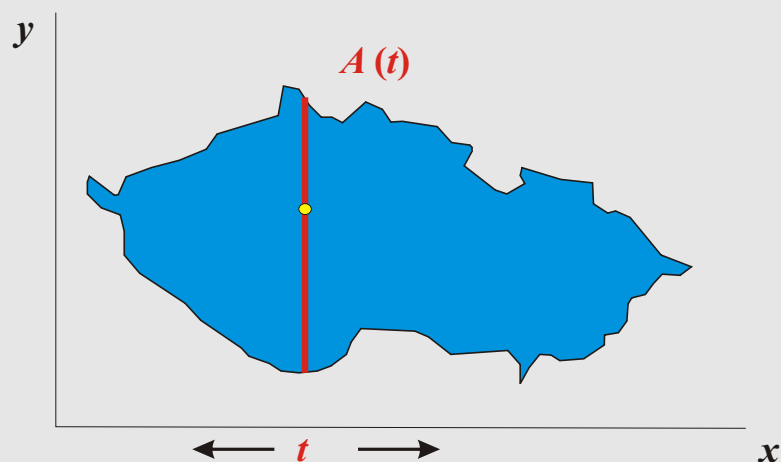
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označí-li se $A(t)$ míra průniku množiny A s kolmicí na osu x v bodě t , pak se může $\int_{-\infty}^{\infty} A(x) dx$ považovat za míru množiny A , pokud vše použité rozumně existuje.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

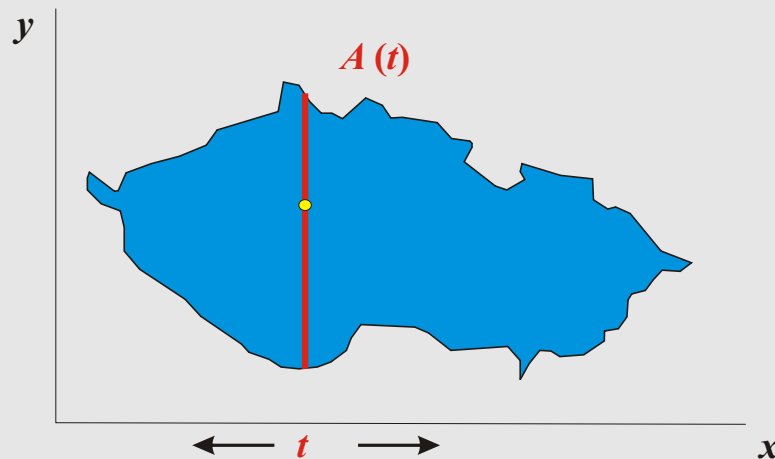
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označí-li se $A(t)$ míra průniku množiny A s kolmicí na osu x v bodě t , pak se může $\int_{-\infty}^{\infty} A(x) dx$ považovat za míru množiny A , pokud vše použité rozumně existuje.



Bod t si pobíhá po reálné ose s "množinometrem", který mu hlásí míru řezu.

LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9





To dává smysl pro velmi
obecné množiny.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To dává smysl pro velmi obecné množiny.



Pro pochopení stačí se omezit na jednodušší množiny určené křivkami, jako např. množiny bodů ležící mezi grafy dvou funkcí nebo vnitřky uzavřených křivek.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To dává smysl pro velmi obecné množiny.



Pro pochopení stačí se omezit na jednodušší množiny určené křivkami, jako např. množiny bodů ležící mezi grafy dvou funkcí nebo vnitřky uzavřených křivek.



Navíc jen takové, že použité řezy jsou intervaly a body (možná někdy jejich sjednocení).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$, je podle předchozího postupu obsahem množiny $\{(x, y); x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ integrál $\int_a^b f(x) dx$, což je v souladu s dřívějším **popisem Newtonova integrálu**.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

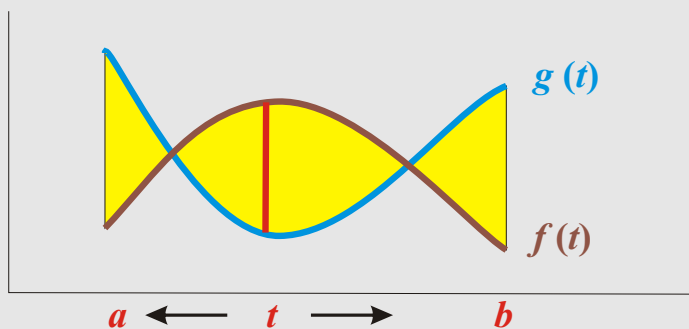
Je-li $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$, je podle předchozího postupu obsahem množiny $\{(x, y); x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ integrál $\int_a^b f(x) dx$, což je v souladu s dřívějším **popisem Newtonova integrálu**.



Obsah množiny bodů ležících mezi grafy dvou spojitých funkcí f, g na intervalu $[a, b]$ je

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Protože nebyla uvedena žádná definice obsahu rovinného obrazce, lze poslední rovnost chápat jako definici obsahu uvedených množin.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro množinu určenou parametricky zadanou křivkou $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ pro $t \in (a, b)$ se použije předchozí vzorec $P = \int_a^b y \, dx (= \int_a^b f(x) \, dx)$ a dostane se

$$P = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) \, dt .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro množinu určenou parametricky zadanou křivkou $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ pro $t \in (a, b)$ se použije předchozí vzorec $P = \int_a^b y dx (= \int_a^b f(x) dx)$ a dostane se

$$P = \int_a^b \psi(t)\varphi'(t) dt .$$



Všimněte si, že jsme do integrálu dosadili $dx = \varphi'(t) dt$, což je "zderivovaná verze" $x = \varphi(t)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro množinu určenou parametricky zadanou křivkou $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ pro $t \in (a, b)$ se použije předchozí vzorec $P = \int_a^b y dx (= \int_a^b f(x) dx)$ a dostane se

$$P = \int_a^b \psi(t)\varphi'(t) dt .$$



Všimněte si, že jsme do integrálu dosadili $dx = \varphi'(t) dt$, což je "zderivovaná verze" $x = \varphi(t)$.



Já ty dé-iks miluju.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Vzorec

$$P = \left| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t) dt \right|$$

vyjadřuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a intervalem na ose x , který obsahuje průmět křivky. Absolutní hodnotou odstraníme možné záporné znaménko.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzorec

$$P = \left| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t) dt \right|$$

vyjadřuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a intervalem na ose x , který obsahuje průmět křivky. Absolutní hodnotou odstraníme možné záporné znaménko.



Některé části jsou však brány se záporným znaménkem a odečítají se! To nastane na intervalu, na kterém je φ klesající a ψ kladná nebo φ rostoucí a ψ záporná (viz *Poznámky*).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

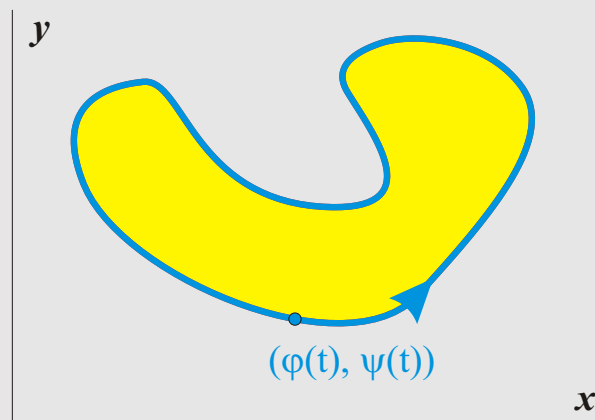
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li grafem jednoduchá uzavřená křivka (pro přesnou definici viz kapitolu 22), udává vzorec

$$P = \left| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t) dt \right|$$

obsah vnitřku této křivky.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

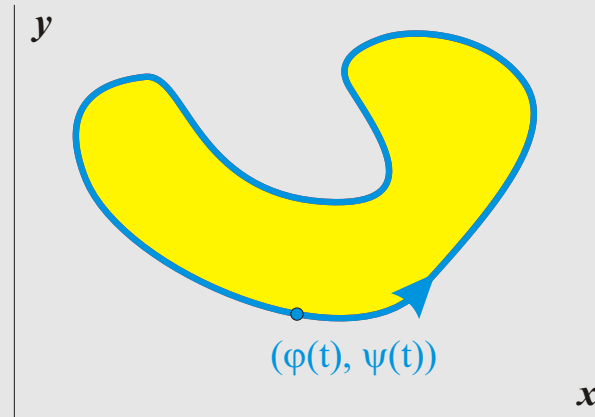
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li grafem jednoduchá uzavřená křivka (pro přesnou definici viz kapitolu 22), udává vzorec

$$P = \left| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t) dt \right|$$

obsah vnitřku této křivky.



Šla by udělat elipsa otevřená, nebo je vždy uzavřená?

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U polárně zadaných křivek ($r = \rho(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$) je proměnnou úhel a hodnotou vzdálenost bodu od počátku.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

U polárně zadaných křivek ($r = \rho(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$) je proměnnou úhel a hodnotou vzdálenost bodu od počátku.



Při velmi malé změně dt úhlu t změna r vyplní „křivý“ trojúhelník s vrcholem v počátku, úhlem při vrcholu rovným dt a výškou z počátku na protilehlou stranu rovnou r .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

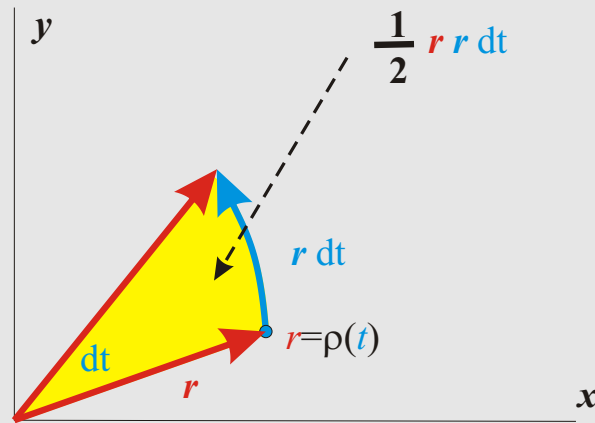
U polárně zadaných křivek ($r = \rho(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$) je proměnnou úhel a hodnotou vzdálenost bodu od počátku.



Při velmi malé změně dt úhlu t změna r vyplní „křivý“ trojúhelník s vrcholem v počátku, úhlem při vrcholu rovným dt a výškou z počátku na protilehlou stranu rovnou r .



Velikost protilehlé strany je, pro velmi malý úhel dt , rovna $r dt$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obsah vzniklého trojúhelníka je tedy roven $(1/2) \cdot r \cdot r dt$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

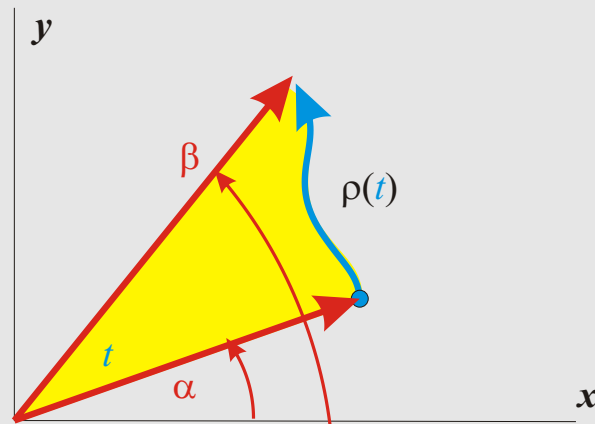
Obsah vzniklého trojúhelníka je tedy roven $(1/2) \cdot r \cdot r dt$.



Součet všech těchto obsahů, tj. integrál

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt, \quad \text{pro } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi,$$

určuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a přímkami procházejícími počátkem a svírajícími s kladnou částí osy x úhly α, β , resp.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

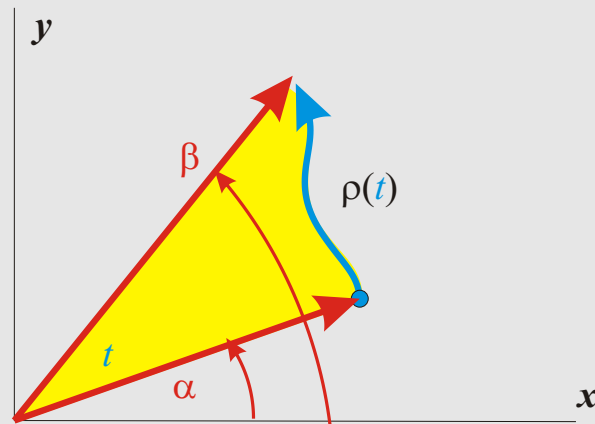
Obsah vzniklého trojúhelníka je tedy roven $(1/2) \cdot r \cdot r dt$.



Součet všech těchto obsahů, tj. integrál

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt, \quad \text{pro } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi,$$

určuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a přímkami procházejícími počátkem a svírajícími s kladnou částí osy x úhly α, β , resp.



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je-li $\beta > \alpha + 2\pi$, počítají se některé části plochy vícekrát!



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A by samozřejmě neměla záviset od jejího posunutí nebo otočení.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A by samozřejmě neměla záviset od jejího posunutí nebo otočení.



Nezávislost předchozího přístupu na posunutí se ukáže snadno (viz *Otázky*).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

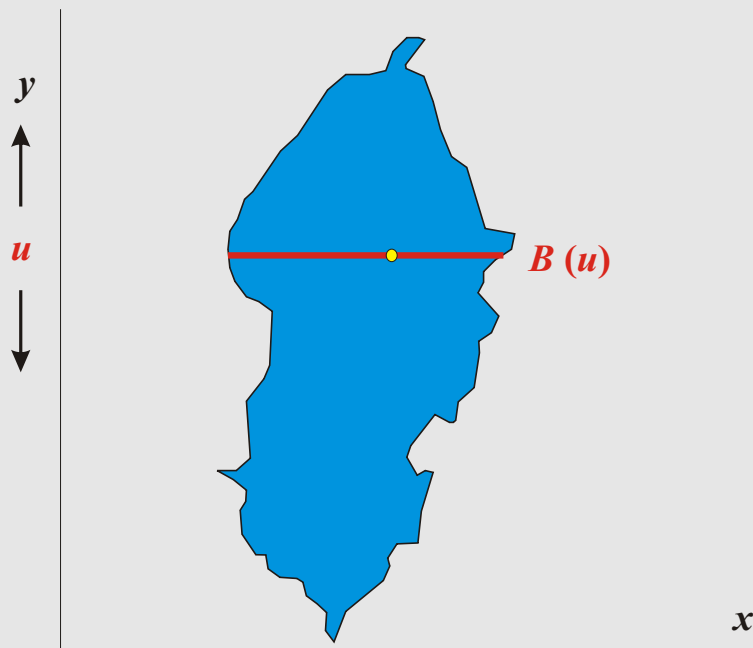
Míra množiny A by samozřejmě neměla záviset od jejího posunutí nebo otočení.



Nezávislost předchozího přístupu na posunutí se ukáže snadno (viz *Otázky*).



Pro otočení je to složitější. Speciálním případem otočení (o 90°) je postup, kdy se vezme projekce A na osu y a použijí se míry $B(u)$ řezů rovnoběžných s osou x , tj. průniku A s kolmicí na osu y v bodě u .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





I když otočíme republiku
doleva nebo doprava, ne-
zvětší se.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



I když otočíme republiku
doleva nebo doprava, ne-
zvětší se.



To si raději přepočítám.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

To znamená, že integrál

$$P_y = \int_c^d B(u) du$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

To znamená, že integrál

$$P_y = \int_c^d B(u) du$$



by se měl rovnat integrálu

$$P_x = \int_a^b A(t) dt$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

To znamená, že integrál

$$P_y = \int_c^d B(u) du$$



by se měl rovnat integrálu

$$P_x = \int_a^b A(t) dt$$



Pro množiny, používané v této části to opravdu platí (je to speciální případ tzv. Fubiniovy věty).

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

1. Měření délek v \mathbb{R} . Je přirozené, že míra sjednocení dvou (nebo konečně mnoha) disjunktů intervalů je součet jejich délek. Může to být vhodné i pro protínající se intervaly (otevřené, uzavřené)?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

1. Měření délek v \mathbb{R} . Je přirozené, že míra sjednocení dvou (nebo konečně mnoha) disjunktních intervalů je součet jejich délek. Může to být vhodné i pro protínající se intervaly (otevřené, uzavřené)?



Předchozí úvaha se dá zobecnit: míra sjednocení spočetně mnoha disjunktních intervalů je součet jejich délek.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

1. Měření délek v \mathbb{R} . Je přirozené, že míra sjednocení dvou (nebo konečně mnoha) disjunktních intervalů je součet jejich délek. Může to být vhodné i pro protínající se intervaly (otevřené, uzavřené)?



Předchozí úvaha se dá zobecnit: míra sjednocení spočetně mnoha disjunktních intervalů je součet jejich délek.



Má smysl na \mathbb{R} uvažovat případ nespočetného systému disjunktních intervalů?

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





To znamená, že velikost
spočetné množiny je vždy
nula.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To znamená, že velikost
spočetné množiny je vždy
nula.



S tím, že každá spočetná množina je v jistém smyslu nulová, jste se setkali v kapitole
o obecném integrálu.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



To znamená, že velikost spočetné množiny je vždy nula.



S tím, že každá spočetná množina je v jistém smyslu nulová, jste se setkali v kapitole o obecném integrálu.



Opravdu, tyto nulové množiny mají míru rovnou nule a tedy existují nespočetné množiny (např. Cantorova množina), které mají míru rovnou nule.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



2. V definici obsahu rovinné množiny se může integrovat přes libovolný interval obsahující průmět množiny a krajní body intervalu lze odebrat.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. V definici obsahu rovinné množiny se může integrovat přes libovolný interval obsahující průmět množiny a krajní body intervalu lze odebrat.



Řezy lze také brát bez krajních bodů (předpokládáme podle předchozí části, že řezy jsou intervaly či body, nebo jejich sjednocení).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. V definici obsahu rovinné množiny se může integrovat přes libovolný interval obsahující průmět množiny a krajní body intervalu lze odebrat.



Řezy lze také brát bez krajních bodů (předpokládáme podle předchozí části, že řezy jsou intervaly či body, nebo jejich sjednocení).



V úvodní kapitole o funkcích více proměnných budou definovány otevřené podmnožiny roviny a prostoru. Právě tyto množiny (případně s přidanou hranicí) jsou nejvhodnější pro interpretaci obsahu pomocí integrálu.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je vhodné si uvědomit, že i pro „hezké" množiny A nemusí být funkce $A(t)$ spojitá. Nicméně, bude mít za body nespojitosti jen skoky a bude mít vždy K -primitivní funkci.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je vhodné si uvědomit, že i pro „hezké“ množiny A nemusí být funkce $A(t)$ spojitá. Nicméně, bude mít za body nespojitosti jen skoky a bude mít vždy K-primitivní funkci.



Aby měl integrál použitý pro popis míry smysl, měly by být míry $A(t)$ řezů konečné.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je vhodné si uvědomit, že i pro „hezké“ množiny A nemusí být funkce $A(t)$ spojitá. Nicméně, bude mít za body nespojitosti jen skoky a bude mít vždy K -primitivní funkci.



Aby měl integrál použitý pro popis míry smysl, měly by být míry $A(t)$ řezů konečné.



Nebylo však řečeno, jaký integrál se používá. Pokud Newtonův, pak všechny řezy musí mít konečnou míru. Pokud použijete K -integrál, pak na nulové množině mohou mít řezy nekonečnou míru (proč?). Pokud budou mít nekonečnou míru na nenulové množině, lze chápat míru množiny A jako nekonečnou.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je vhodné si uvědomit, že i pro „hezké“ množiny A nemusí být funkce $A(t)$ spojitá. Nicméně, bude mít za body nespojitosti jen skoky a bude mít vždy K-primitivní funkci.



Aby měl integrál použitý pro popis míry smysl, měly by být míry $A(t)$ řezů konečné.



Nebylo však řečeno, jaký integrál se používá. Pokud Newtonův, pak všechny řezy musí mít konečnou míru. Pokud použijete K-integrál, pak na nulové množině mohou mít řezy nekonečnou míru (proč?). Pokud budou mít nekonečnou míru na nenulové množině, lze chápat míru množiny A jako nekonečnou.



Předchozí odstavec byl vlastně jen teoretický. V praxi jsou množiny A omezené, výjimečně neomezené, ale pak jsou „hezké“ složené z omezených množin.

Konec poznámek 1.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Spočtěte obsah elipsy a to jak pomocí jejího implicitního vyjádření $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, tak pomocí parametrického vyjádření $x = a \cos t, y = b \sin t$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte obsah kruhu pomocí polárního vyjádření $\rho = r$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtěte míru množiny $\{(x, y); y \geq 0, x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Použijte oba možné postupy (řezy kolmé na osu x , resp. na osu y).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Pro parametrické vyjádření kružnice o středu v $(0, r)$ a poloměru r lze vzít $x = r \sin t, y = r(1 + \cos t), t \in [0, 2\pi]$. Pro $t \in [0, \pi/2]$ je \sin rostoucí a s rostoucím t v tomto intervalu jdete po horní polokružnici po směru hodinových ručiček od bodu $(0, 2r)$ k bodu (r, r) a příslušný integrál popisuje plochu pod touto čvrtkružnicí (k ose x).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Pro parametrické vyjádření kružnice o středu v $(0, r)$ a poloměru r lze vzít $x = r \sin t, y = r(1 + \cos t), t \in [0, 2\pi]$. Pro $t \in [0, \pi/2]$ je \sin rostoucí a s rostoucím t v tomto intervalu jdete po horní polokružnici po směru hodinových ručiček od bodu $(0, 2r)$ k bodu (r, r) a příslušný integrál popisuje plochu pod touto čvrtkružnicí (k ose x).



Pro $t \in [\pi/2, \pi]$ je \sin klesající a s rostoucím t v tomto intervalu jdete po horní polokružnici po směru hodinových ručiček od bodu (r, r) k bodu $(0, 0)$ a příslušný integrál popisuje plochu pod touto čvrtkružnicí (k ose x). Vzhledem k proměnné x se integruje od r k 0 a tedy se ona plocha odečítá. Výsledkem na intervalu $t \in [0, \pi]$ je plocha pravého půlkruhu.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Pro parametrické vyjádření kružnice o středu v $(0, r)$ a poloměru r lze vzít $x = r \sin t, y = r(1 + \cos t), t \in [0, 2\pi]$. Pro $t \in [0, \pi/2]$ je \sin rostoucí a s rostoucím t v tomto intervalu jdete po horní polokružnici po směru hodinových ručiček od bodu $(0, 2r)$ k bodu (r, r) a příslušný integrál popisuje plochu pod touto čvrtkružnicí (k ose x).



Pro $t \in [\pi/2, \pi]$ je \sin klesající a s rostoucím t v tomto intervalu jdete po horní polokružnici po směru hodinových ručiček od bodu (r, r) k bodu $(0, 0)$ a příslušný integrál popisuje plochu pod touto čvrtkružnicí (k ose x). Vzhledem k proměnné x se integruje od r k 0 a tedy se ona plocha odečítá. Výsledkem na intervalu $t \in [0, \pi]$ je plocha pravého půlkruhu.



Dodělejte sami oběh bodu kolem celé kružnice.

Konec příkladů 1.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že každý disjunktní systém intervalů v \mathbb{R} je nejvýše spočetný.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Uveďte příklad neomezené otevřené podmnožiny \mathbb{R} , která má konečnou míru.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Ukažte, že míra μ některých podmnožin reálné přímky nezávisí na posunutí. Např., je-li $p \in \mathbb{R}$ a A interval nebo konečné sjednocení intervalů nebo spočetná množina, pak $\mu(A) = \mu(A + p)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte platnost předchozího tvrzení pro zde použité speciální podmnožiny roviny, např. pro množiny určené křivkami.

Konec otázek 1.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Jakou rychlostí musí odpálit pálkař, aby měl jistý "homerun"?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Jakou rychlostí musí odpálit pálkař, aby měl jistý "homerun"?



Řešení. Budeme chtít zjistit rychlost v_0 takovou, aby míč o hmotnosti m překonal přitažlivost Země a doletěl alespoň na Měsíc. Zanedbáme tření.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

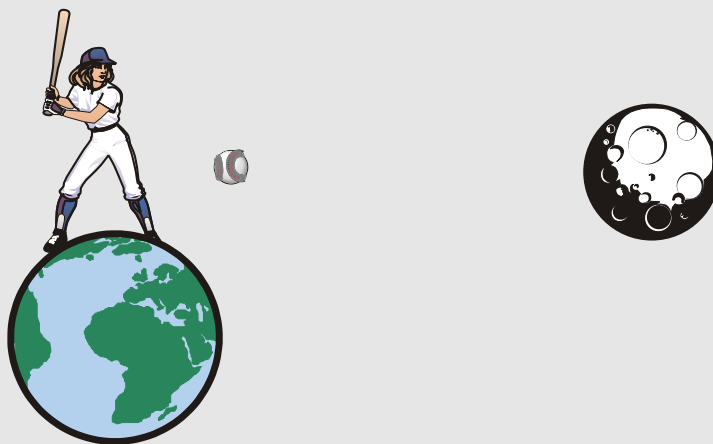
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Jakou rychlostí musí odpálit pálkař, aby měl jistý "homerun"?



Řešení. Budeme chtít zjistit rychlost v_0 takovou, aby míč o hmotnosti m překonal přitažlivost Země a doletěl alespoň na Měsíc. Zanedbáme tření.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Proměnnou gravitační sílu po dráze k Měsíci musíme překonat kinetickou energií udělenou při startu.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Proměnnou gravitační sílu po dráze k Měsíci musíme překonat kinetickou energií udělenou při startu.



Tedy spočítáme práci, kterou vykonáme proti gravitační síle F

$$\int_R^{\infty} F(r) \, dr$$

a porovnáme s kinetickou energií při startu.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle gravitačního zákona je míč přitahován k Zemi silou F závisující na vzdálenosti r od Země

$$F(r) = c \frac{Mm}{r^2},$$

kde M je hmotnost Země a c je konstanta.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle gravitačního zákona je míč přitahován k Zemi silou F závisující na vzdálenosti r od Země

$$F(r) = c \frac{Mm}{r^2},$$

kde M je hmotnost Země a c je konstanta.



Označme R poloměr Země. Pak platí $F(R) = mg$, kde g je gravitační zrychlení. Tím se zbavíme konstanty c a máme

$$F(r) = mg \frac{R^2}{r^2}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud má míč vylétnout nekonečně daleko, musí být jeho kinetická energie na počátku

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

alespoň rovna práci, kterou na jeho brždění vykoná gravitační síla Země

$$\int_R^\infty mg \frac{R^2}{r^2} dr = \lim_{r \rightarrow \infty} mgR^2 \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) = mgR.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud má míč vylétnout nekonečně daleko, musí být jeho kinetická energie na počátku

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

alespoň rovna práci, kterou na jeho brždění vykoná gravitační síla Země

$$\int_R^\infty mg \frac{R^2}{r^2} dr = \lim_{r \rightarrow \infty} mgR^2 \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) = mgR.$$



Tedy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR, \text{ čili } v_0 = \sqrt{2gR}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud má míč vylétnout nekonečně daleko, musí být jeho kinetická energie na počátku

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

alespoň rovna práci, kterou na jeho brždění vykoná gravitační síla Země

$$\int_R^\infty mg \frac{R^2}{r^2} dr = \lim_{r \rightarrow \infty} mgR^2 \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) = mgR.$$



Tedy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR, \text{ čili } v_0 = \sqrt{2gR}.$$



Přibližně dostaneme rychlost odpalu 11,2 km/s (pro konstanty $R = 6,37 \cdot 10^6 m$, $g = 9,83 m \cdot s^{-2}$).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud má míč vylétnout nekonečně daleko, musí být jeho kinetická energie na počátku

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

alespoň rovna práci, kterou na jeho brždění vykoná gravitační síla Země

$$\int_R^\infty mg \frac{R^2}{r^2} dr = \lim_{r \rightarrow \infty} mgR^2 \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) = mgR.$$



Tedy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR, \text{ čili } v_0 = \sqrt{2gR}.$$



Přibližně dostaneme rychlost odpalu 11,2 km/s (pro konstanty $R = 6,37 \cdot 10^6 m$, $g = 9,83 m \cdot s^{-2}$).



Už jsem viděl rychlejší odpaly.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' se naučíme měřit v rovině.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' se naučíme měřit v rovině.



Bude stačit pravítko?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' se naučíme měřit v rovině.



Bude stačit pravítko?



Ano.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte míru množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, y > x - 2, y < x/2\}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte míru množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, y > x - 2, y < x/2\}.$$



Řešení. Jde o průnik tří polorovin. Při bližším zkoumání vidíme, že množinu A tvoří trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 2)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

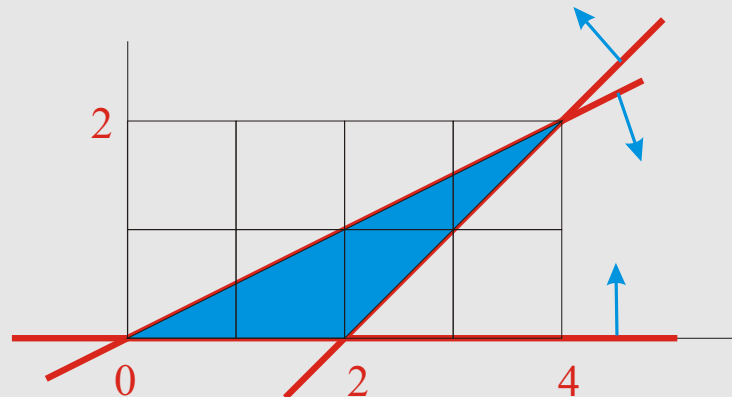
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte míru množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, y > x - 2, y < x/2\}.$$



Řešení. Jde o průnik tří polorovin. Při bližším zkoumání vidíme, že množinu A tvoří trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 2)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dejte si pozor, tady se to bude řezat.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dejte si pozor, tady se to bude řezat.



Jak na to půjdeme?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A se spočte integrací přes osu x , přičemž musíme zjistit míru řezů $A(t)$ odpovídajících libovolnému $t \in \mathbb{R}$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A se spočte integrací přes osu x , přičemž musíme zjistit míru řezů $A(t)$ odpovídajících libovolnému $t \in \mathbb{R}$.



Pro některá t jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(t)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 4)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

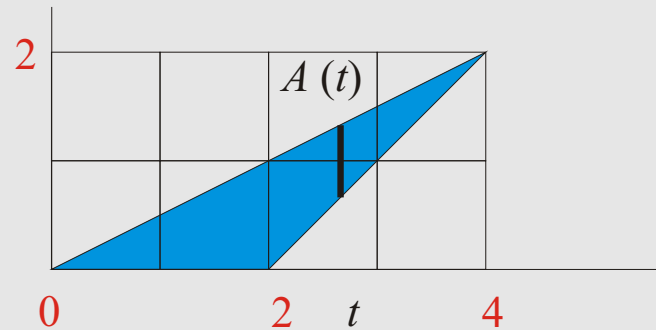
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A se spočte integrací přes osu x , přičemž musíme zjistit míru řezů $A(t)$ odpovídajících libovolnému $t \in \mathbb{R}$.



Pro některá t jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(t)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 4)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

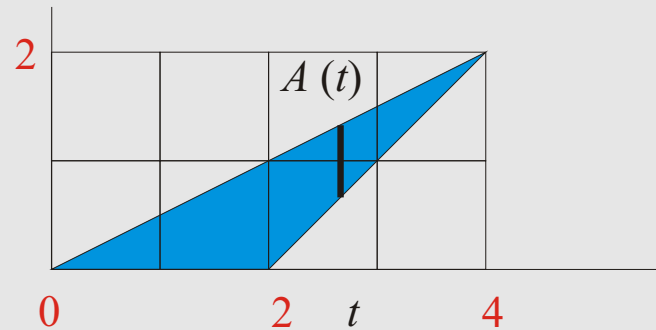
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A se spočte integrací přes osu x , přičemž musíme zjistit míru řezů $A(t)$ odpovídajících libovolnému $t \in \mathbb{R}$.



Pro některá t jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(t)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 4)$.



Na intervalu $(0, 2)$ je $A(t) = t/2$, protože řezem je interval $(0, t/2)$.



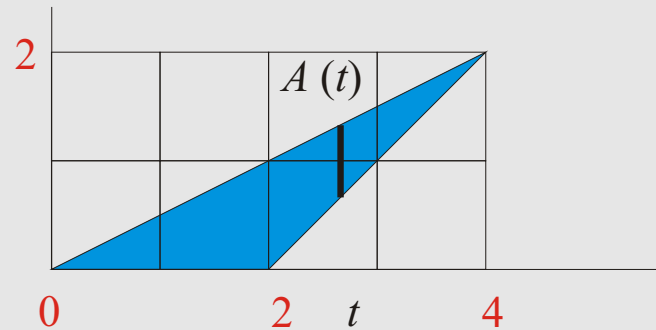
LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A se spočte integrací přes osu x , přičemž musíme zjistit míru řezů $A(t)$ odpovídajících libovolnému $t \in \mathbb{R}$.



Pro některá t jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(t)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 4)$.



Na intervalu $(0, 2)$ je $A(t) = t/2$, protože řezem je interval $(0, t/2)$.



Na intervalu $(2, 4)$ je $A(t) = t/2 - (t - 2)$, protože řezem je interval $(t - 2, t/2)$.



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hledaná míra množiny A se rovná integrálu

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt = \int_0^2 A(t) dt + \int_2^4 A(t) dt .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

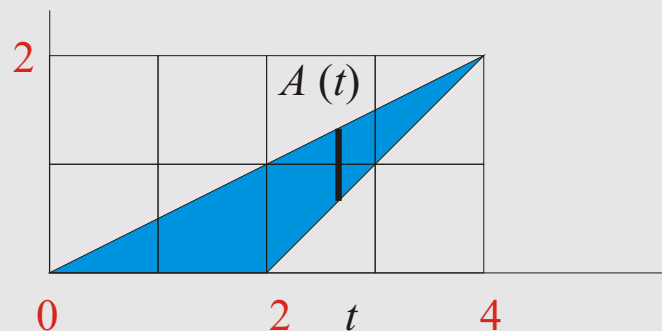
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hledaná míra množiny A se rovná integrálu

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt = \int_0^2 A(t) dt + \int_2^4 A(t) dt .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

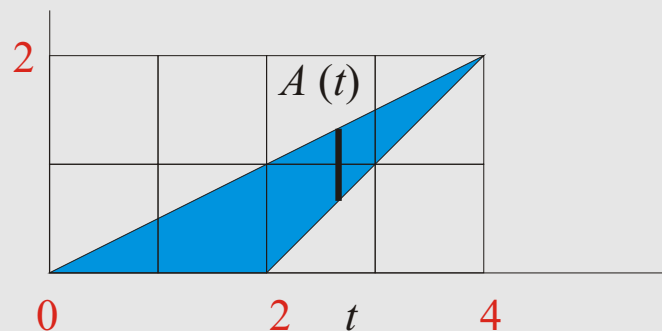
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hledaná míra množiny A se rovná integrálu

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt = \int_0^2 A(t) dt + \int_2^4 A(t) dt .$$



Tedy

$$P_x = \int_0^2 \frac{t}{2} dt + \int_2^4 \left(\frac{t}{2} - t + 2 \right) dt = 1 + 1 = 2 .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak se spočte to $A(t)$?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak se spočte to $A(t)$?



Jak vypadá pro dané t řez A_t se zjistí snadno. Dosa-
díme do definice množiny
jako parametr t a je hotovo.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak se spočte to $A(t)$?



Jak vypadá pro dané t řez A_t se zjistí snadno. Dosa-
díme do definice množiny
jako parametr t a je hotovo.



$$A_t = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, y > t - 2, y < t/2\}.$$

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Řezem je úsečka, její míru
umíme spočítat.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řezem je úsečka, její míru
umíme spočítat.



Dvakrát se integrovalo, to je
normální?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Řezem je úsečka, její míru
umíme spočítat.



Dvakrát se integrovalo, to je
normální?



Ne, šikulové se tomu mohou
vyhnout integrováním přes
vodorovné řezy:

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A se nyní spočte integrací přes osu y , přičemž musíme zjistit míru řezů $A(u)$ odpovídajících libovolnému $u \in \mathbb{R}$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

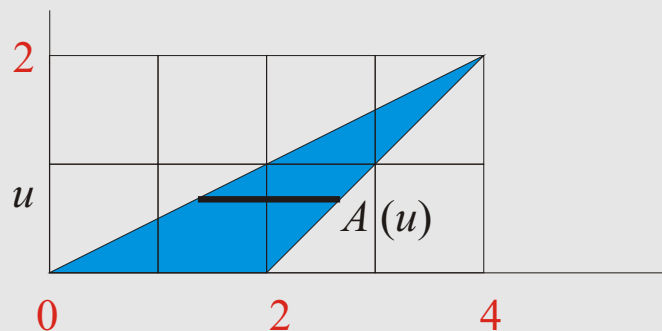
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Míra množiny A se nyní spočte integrací přes osu y , přičemž musíme zjistit míru řezů $A(u)$ odpovídajících libovolnému $u \in \mathbb{R}$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro některá u jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(u)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 2)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro některá u jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(u)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 2)$.



Na intervalu $(0, 2)$ je $A(u) = u + 2 - 2u$, protože řezem je interval $(2u, u + 2)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

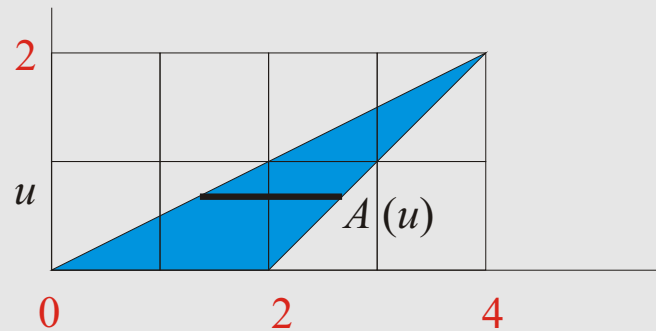
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro některá u jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(u)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 2)$.



Na intervalu $(0, 2)$ je $A(u) = u + 2 - 2u$, protože řezem je interval $(2u, u + 2)$.



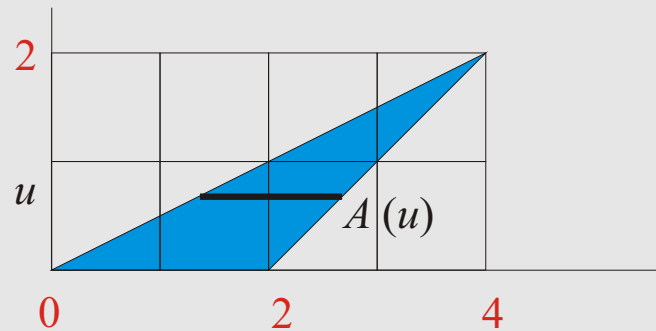
LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro některá u jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(u)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 2)$.



Na intervalu $(0, 2)$ je $A(u) = u + 2 - 2u$, protože řezem je interval $(2u, u + 2)$.



Hledaná míra množiny A se rovná integrálu

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(u) \, du = \int_0^2 A(u) \, du = \int_0^2 (u + 2 - 2u) \, du = 2.$$



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak se spočte to $A(u)$?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak se spočte to $A(u)$?



Jak vypadá pro dané u řez A_u se zjistí snadno. Dosa-
díme do definice množiny
jako parametr u a je hotovo.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$A_u = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2, u \geq 0, u > x - 2, u < x/2\}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

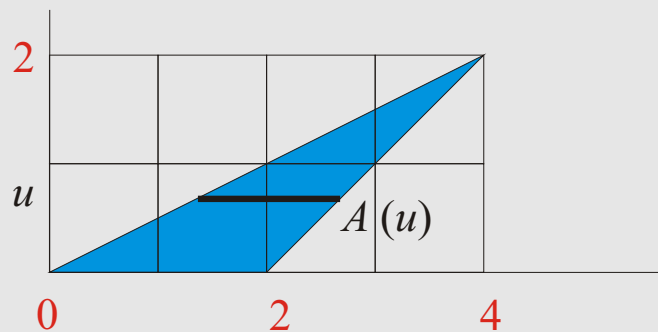
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$A_u = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2, u \geq 0, u > x - 2, u < x/2\}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

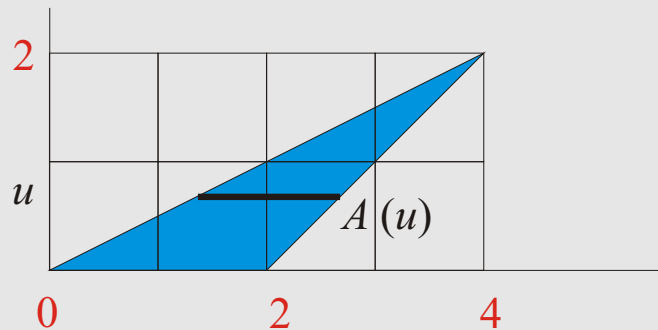
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$A_u = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2, u \geq 0, u > x - 2, u < x/2\}.$$



Řezem je úsečka, její míru
umíme spočítat.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Při hledání velikosti řezů samozřejmě zjistíme i to, které řezy se musí uvažovat při integrování.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Při hledání velikosti řezů samozřejmě zjistíme i to, které řezy se musí uvažovat při integrování.



To se prověří.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Do třetice spočítáme míru
jako rozdíl dvou integrálů



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Do třetice spočítáme míru
jako rozdíl dvou integrálů

$$\int_0^4 \frac{t}{2} dt - \int_2^4 (t - 2) dt = 4 - 2 = 2.$$

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

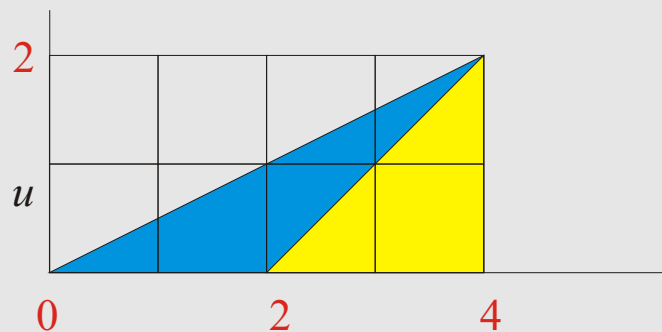
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Do třetice spočítáme míru
jako rozdíl dvou integrálů

$$\int_0^4 \frac{t}{2} dt - \int_2^4 (t-2) dt = 4 - 2 = 2.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





To je síla.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak praví klasik: Na sta je podob integrování, způsoby je třeba volit.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak praví klasik: Na sta je podob integrování, způsoby je třeba volit.



Všimněte si, že se integruje od jedné funkce do druhé. Při vodorovných a svislých řezech se jedná o jiné funkce.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jak praví klasik: Na sta je podob integrování, způsoby je třeba volit.



Všimněte si, že se integruje od jedné funkce do druhé. Při vodorovných a svislých řezech se jedná o jiné funkce.



A některé jsou potvory inverzní ;-)

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBJEM NĚKTERÝCH TĚLES



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBJEM NĚKTERÝCH TĚLES



Stejně jako se počítal obsah dvoudimenzionálního (tj. rovinného) obrazce pomocí velikostí jednodimenzionálních řezů, počítá se objem trojdimenzionálního tělesa pomocí dvoudimenzionálních řezů.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBJEM NĚKTERÝCH TĚLES



Stejně jako se počítal obsah dvoudimenzionálního (tj. rovinného) obrazce pomocí velikostí jednodimenzionálních řezů, počítá se objem trojdimenzionálního tělesa pomocí dvoudimenzionálních řezů.



Následující popis je opět vhodný pro velmi obecné podmnožiny \mathbb{R}^3 , ale je lépe mít na mysli jen geometrická tělesa.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' A je podmnožina prostoru \mathbb{R}^3 , jejíž průmět na osu x leží v intervalu (a, b) .
Necht' pro každé $t \in (a, b)$ je $A(t)$ míra průniku množiny A s rovinou kolmou na osu x v bodě t . Pak **míra** množiny A je

$$V = \int_a^b A(x) dx .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' A je podmnožina prostoru \mathbb{R}^3 , jejíž průmět na osu x leží v intervalu (a, b) .
Necht' pro každé $t \in (a, b)$ je $A(t)$ míra průniku množiny A s rovinou kolmou na osu x v bodě t . Pak **míra** množiny A je

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

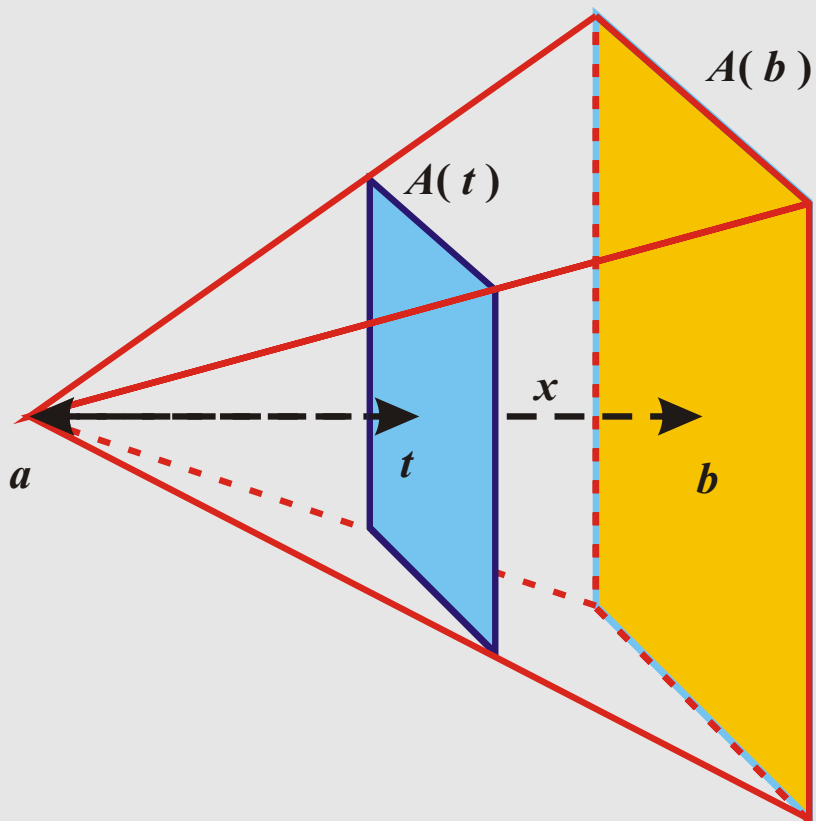
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nakloníme pyramidu a řežeme. Dostaneme čtvercové řezy. Pohoda.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kouzlo spočívá v tom, jak najít pěkné řezy.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

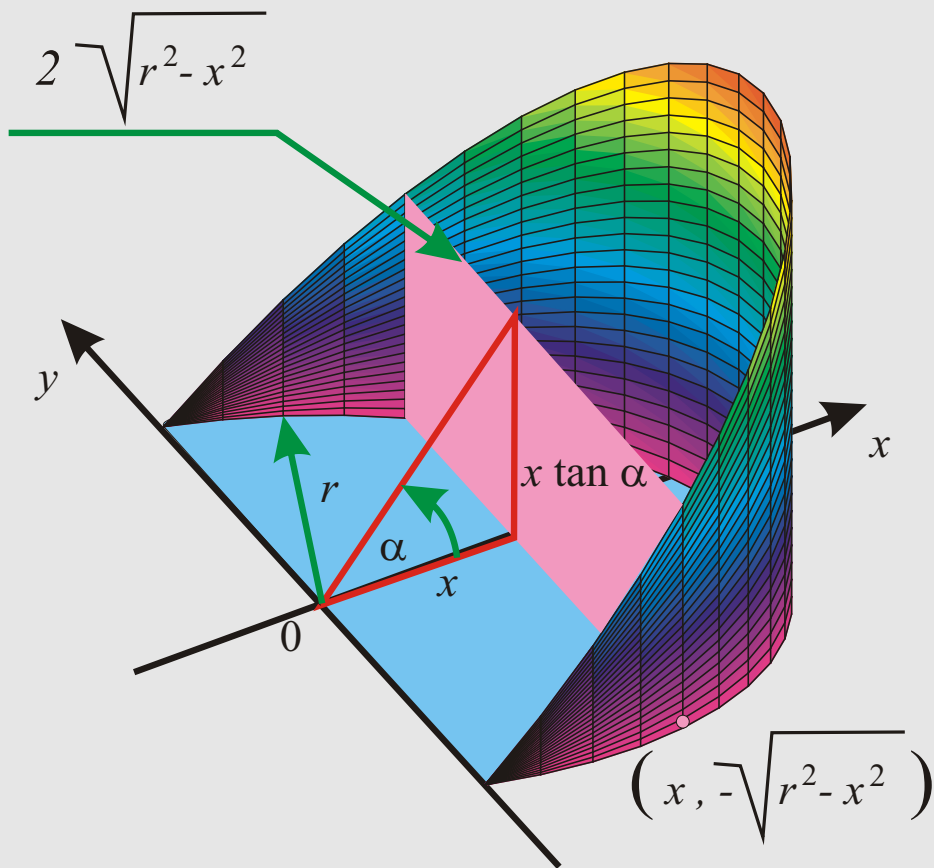
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobně jako u rovinných obrazců je i v prostoru někdy vhodnější použít místo osy x jinou osu. **Fubiniova věta** opět tvrdí, že se pro hezké množiny dostane stejný výsledek.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

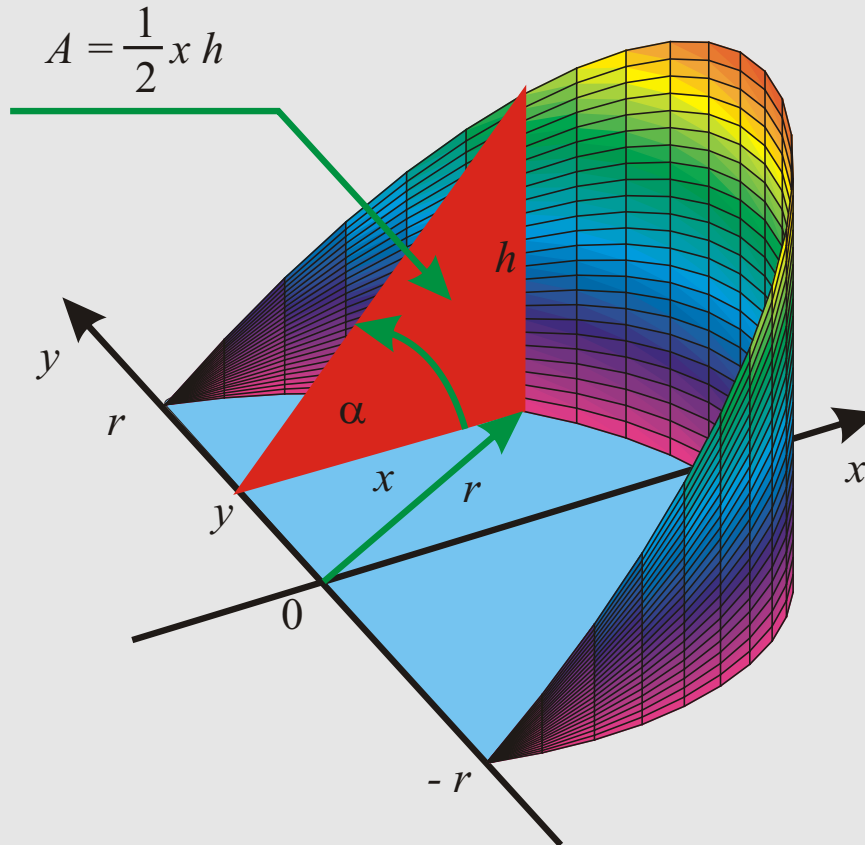
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako u rovinných obrazců je i v prostoru někdy vhodnější použít místo osy x jinou osu. **Fubiniova věta** opět tvrdí, že se pro hezké množiny dostane stejný výsledek.



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

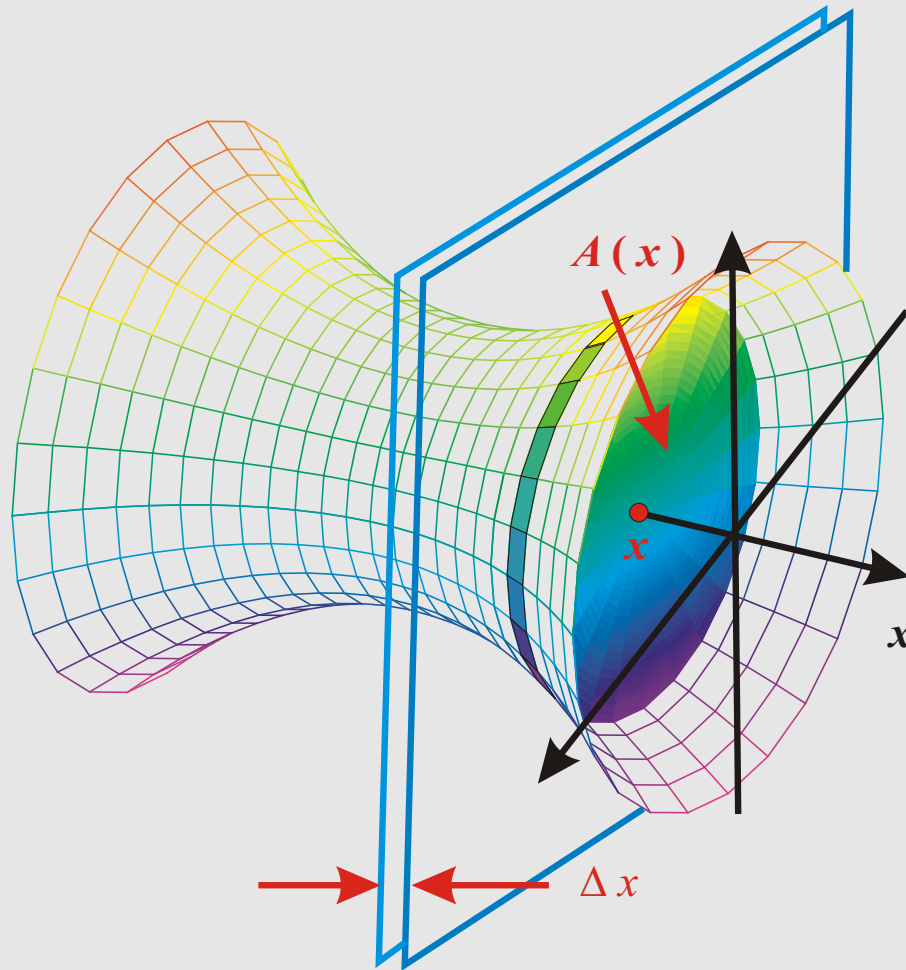
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li A rotační těleso, je počítání objemu jednodušší, protože je snadné spočítat plochu příslušných řezů (tj. kruhů).



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Necht' těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x . Pak jeho objem je dán vzorcem

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x . Pak jeho objem je dán vzorcem

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Je vidět ze vzorce i z geometrického pohledu, že nezáleží na tom, jestli má funkce kladné i záporné hodnoty.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

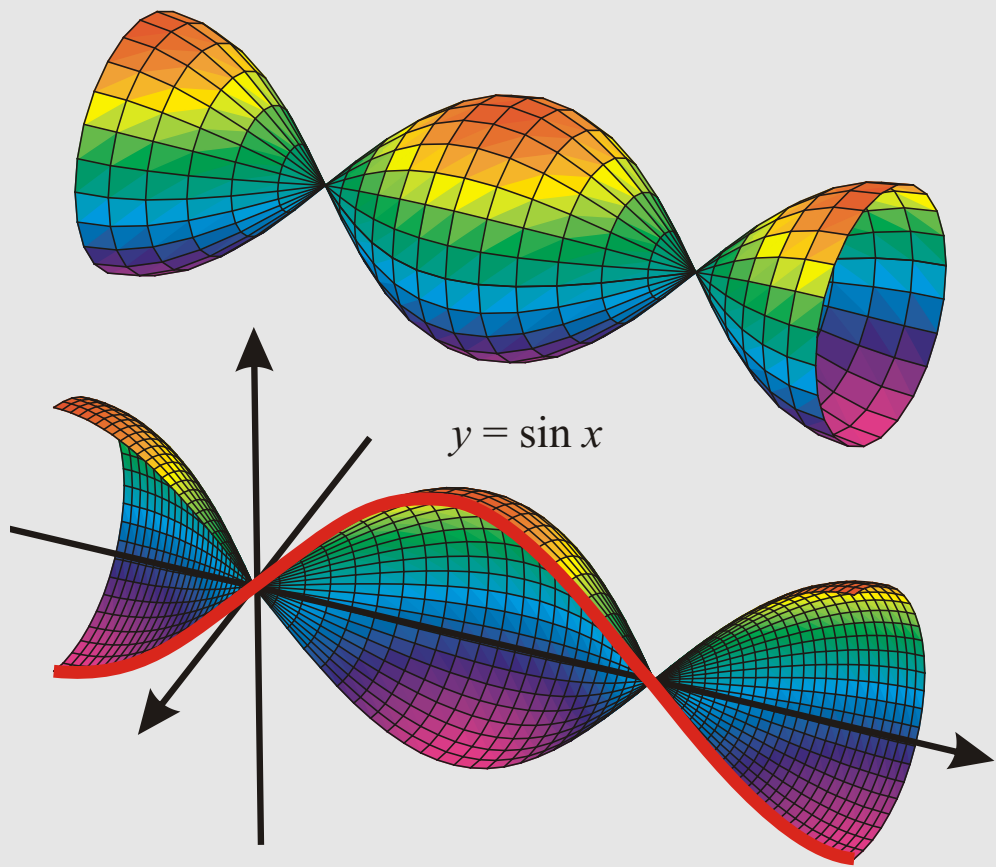
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a, b)$), dostane se dosazením za x, y do vzorce

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

parametrický tvar

$$V = \pi \int_a^b \psi^2(t) \varphi'(t) dt.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Má-li rotační těleso „díru“, tj, vznikne rotací okolo osy x plochy ležící mezi grafy funkcí $|g| \leq |f|$, odečte se od objemu pro funkci f objem pro funkci g :

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Má-li rotační těleso „díru“, tj, vznikne rotací okolo osy x plochy ležící mezi grafy funkcí $|g| \leq |f|$, odečte se od objemu pro funkci f objem pro funkci g :

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

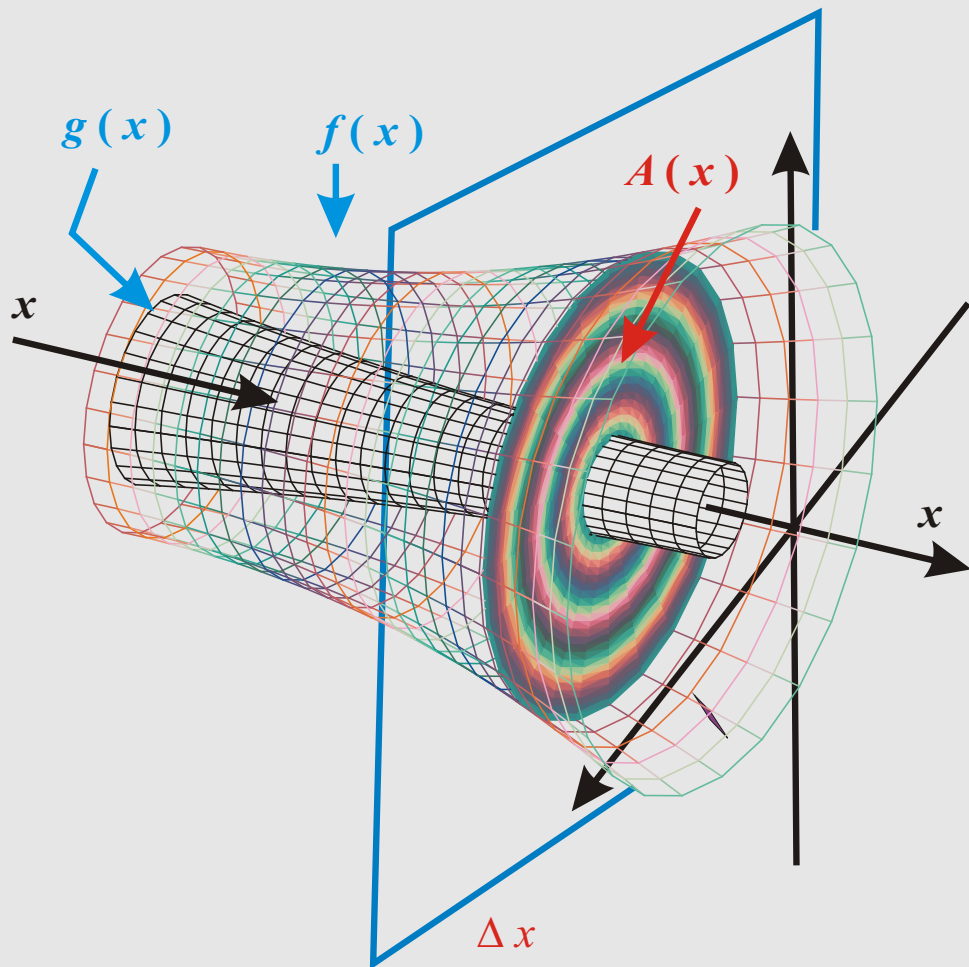
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Uvedenému postupu pro získání předešlých vzorců se říká **metoda disků nebo mezikruží** a je odvozen z postupu pro objem obecných těles.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

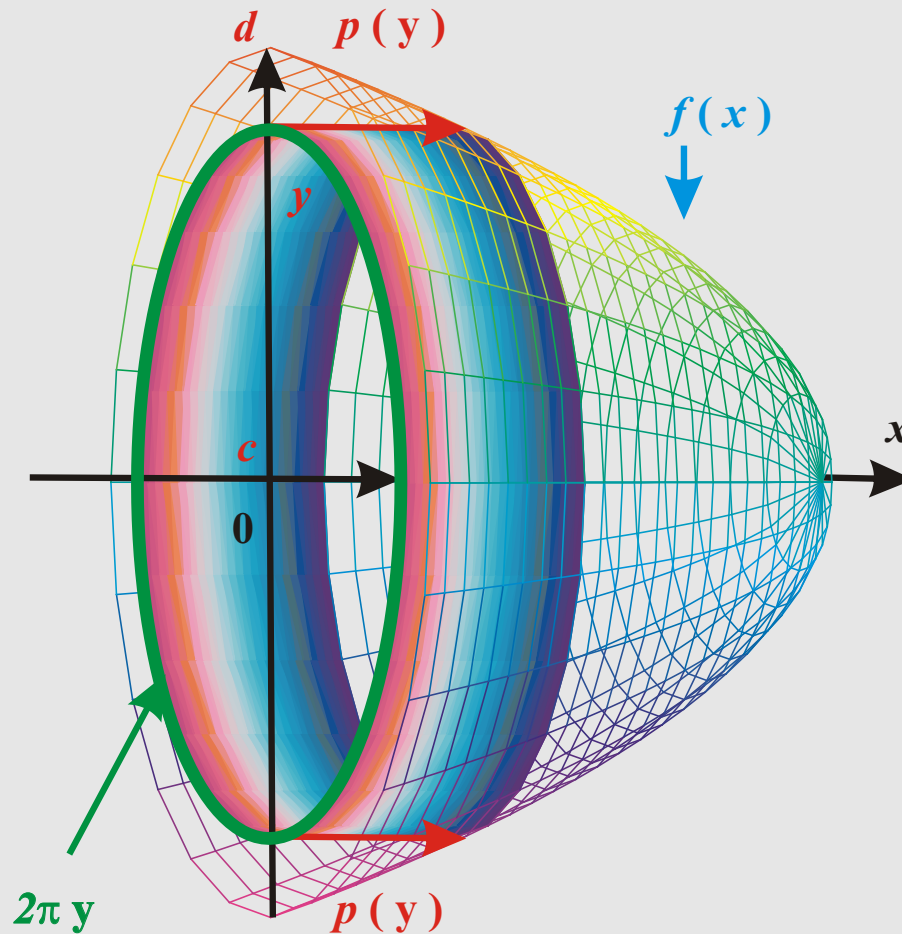
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedenému postupu pro získání předešlých vzorců se říká **metoda disků nebo mezikruží** a je odvozen z postupu pro objem obecných těles.



Pro rotační tělesa lze zvolit i jiný postup, tzv. **metodu válců**, kdy těleso chápeme jako sjednocení tenkých válců s osou stejnou jako je rotační osa tělesa.



LEKCE15-IAP

| | |
|-------------------|--|
| délka | |
| obsah | |
| obsah-param | |
| obsah-polar | |
| objem | |
| objem rotace 1 | |
| objem rotace 2 | |
| délka | |
| povrch | |
| povrch rotace | |
| pohyb | |
| těžiště | |
| těžiště drátu | |
| Guldin plocha | |
| těžiště desky | |
| Guldin objem | |
| práce | |
| Poznámky | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Příklady | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Otázky | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Cvičení | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |
| Učení | |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | |



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x . Pak jeho objem je dán vzorcem

$$2\pi \int_0^d y p(y) dy ,$$

kde d je maximum funkce $|f|$ na (a, b) a $p(t)$ je délka průniku přímky $y = t$ s množinou $\{(x, y); 0 \leq y \leq |f(x)|\}$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x . Pak jeho objem je dán vzorcem

$$2\pi \int_0^d y p(y) dy ,$$

kde d je maximum funkce $|f|$ na (a, b) a $p(t)$ je délka průniku přímky $y = t$ s množinou $\{(x, y); 0 \leq y \leq |f(x)|\}$.



Výraz $2\pi y p(y)$ je povrch válcovitého řezu o výšce $p(y)$ a poloměru y .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x . Pak jeho objem je dán vzorcem

$$2\pi \int_0^d y p(y) dy ,$$

kde d je maximum funkce $|f|$ na (a, b) a $p(t)$ je délka průniku přímky $y = t$ s množinou $\{(x, y); 0 \leq y \leq |f(x)|\}$.



Výraz $2\pi y p(y)$ je povrch válcovitého řezu o výšce $p(y)$ a poloměru y .



Slyšel jsem správně: 2 pípy?

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Z předchozích postupů byste měli snadno odvodit vzorce pro objemy těles vzniklých rotací nějaké jednodušší plochy kolem osy y nebo kolem přímky rovnoběžné s nějakou osou.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Z předchozích postupů byste měli snadno odvodit vzorce pro objemy těles vzniklých rotací nějaké jednodušší plochy kolem osy y nebo kolem přímky rovnoběžné s nějakou osou.



„Sčítají“ se obsahy mezikruží, jejichž poloměry jsou určeny vzdálenostmi hranice k ose rotace.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Pokud si zapamatujete obecný popis objemu tělesa („součet“ příslušných řezů), snadno a rychle odvodíte ostatní uvedené vzorce. Není pak nutné si tyto vzorce pamatovat. Navíc uvedený popis umožní spočítat i objemy nestandardních těles.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Není jednoduché dokázat rovnost integrálů pro objem rotačních těles získaných metodou disků a metodou válců.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Není jednoduché dokázat rovnost integrálů pro objem rotačních těles získaných metodou disků a metodou válců.



Ve vzorci získaném metodou válců se samozřejmě může vzít za horní mez jakékoli číslo větší nebo rovno maximu $|f|$. Proč se nemůže vzít za integrační meze krajní body f -obrazu intervalu (a, b) ?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Není jednoduché dokázat rovnost integrálů pro objem rotačních těles získaných metodou disků a metodou válců.



Ve vzorci získaném metodou válců se samozřejmě může vzít za horní mez jakékoli číslo větší nebo rovno maximu $|f|$. Proč se nemůže vzít za integrační meze krajní body f -obrazu intervalu (a, b) ?



Pro podobný vzorec rotačního tělesa s dírou (viz *Otázky*) určenou funkcí g se místo 0 může za dolní mez vzít jakékoli číslo menší nebo rovné minimu funkce $|g|$.

Konec poznámek 2.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Spočtete podle integrálního popisu objemu tělesa objem jehlanu (umístěte jehlan vhodně do souřadnic; nejlépe tak, že výška leží na ose z a podstava v rovině x, y).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočtěte objem průniku válců $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočtěte objem průniku válců $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$.



Vhodné je vzít řezy kolmé na osu y .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Spočtěte objem rotačního elipsoidu vyjádřeného implicitně i parametricky a metodou disků i metodou válců.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočtete objem anuloidu, což je těleso vzniklé rotací kruhu (mapř. o poloměru a) kolem osy disjunktní s kružnicí (tj. ve vzdálenosti $b > a$ od středu kružnice).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočtete objem anuloidu, což je těleso vzniklé rotací kruhu (mapř. o poloměru a) kolem osy disjunktní s kružnicí (tj. ve vzdálenosti $b > a$ od středu kružnice).



Opět je prvním krokem vhodné umístění situace do souřadnicových os.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Spočtěte objem rotačního tělesa vzniklého rotací omezené plochy mezi grafy funkcí x, x^2 okolo osy y .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Spočtěte objem rotačního tělesa vzniklého rotací omezené plochy mezi grafy funkcí \sqrt{x} , $x = 4$, $y = 1$ okolo přímky $y = 1$.

Konec příkladů 2.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Odvod' te metodou válců vzorec pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x, y); g(x) \leq y \leq f(x), x \in (a, b)\}$ kolem osy x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Odvod' te vzorce pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x, y); g(x) \leq y \leq f(x), x \in (a, b)\}$ kolem osy y . Předpoládejte, že f, g jsou rostoucí funkce.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Odvod' te vzorce pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x, y); g(x) \leq y \leq f(x), x \in (a, b)\}$ kolem přímky $y = a$.

Konec otázek 2.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočteme objem koule.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočteme objem koule.



Řešení. Zvolíme jednotkovou kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočteme objem koule.



Řešení. Zvolíme jednotkovou kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 .$$



Budeme řezat rovinami kolnými k ose x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočteme objem koule.



Řešení. Zvolíme jednotkovou kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 .$$



Budeme řezat rovinami kolmými k ose x .



Takto získáme kruhové řezy.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Spočteme objem koule.



Řešení. Zvolíme jednotkovou kouli

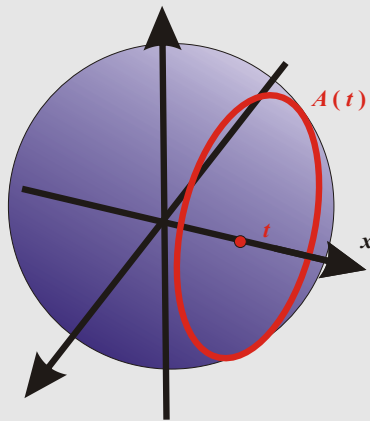
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 .$$



Budeme řezat rovinami kolnými k ose x .



Takto získáme kruhové řezy.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

K danému t je řezem množina

$$y^2 + z^2 \leq r^2 - t^2 .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

K danému t je řezem množina

$$y^2 + z^2 \leq r^2 - t^2 .$$



Jde vlastně o kruh s poloměrem

$$\sqrt{r^2 - t^2} .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

K danému t je řezem množina

$$y^2 + z^2 \leq r^2 - t^2 .$$



Jde vlastně o kruh s poloměrem

$$\sqrt{r^2 - t^2} .$$



Tedy $A(t) = \pi(r^2 - t^2)$ a tedy objem spočteme

$$\int_{-r}^r A(t) \, dt = \int_{-r}^r \pi(r^2 - t^2) \, dt = \left[\pi \left(r^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

K danému t je řezem množina

$$y^2 + z^2 \leq r^2 - t^2 .$$



Jde vlastně o kruh s poloměrem

$$\sqrt{r^2 - t^2} .$$



Tedy $A(t) = \pi(r^2 - t^2)$ a tedy objem spočteme

$$\int_{-r}^r A(t) dt = \int_{-r}^r \pi(r^2 - t^2) dt = \left[\pi \left(r^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$



Integrovaní je pohoda.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DÉLKA ROVINNÝCH KŘIVEK

Délka L nějaké křivky (čáry) z bodu A do bodu B se zjistí sečtením jejích velmi malých úseků ds , které je možné považovat za úsečky, tj.

$$L = \int_A^B ds .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

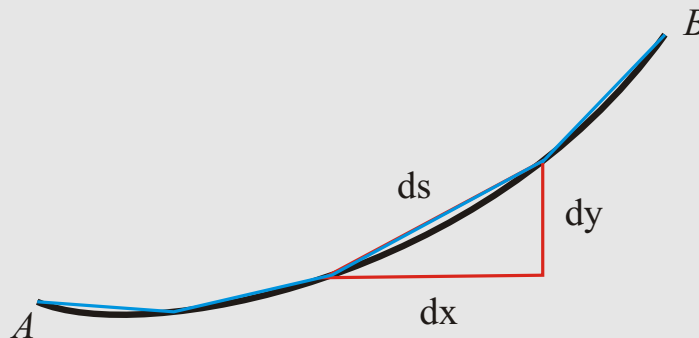
DÉLKA ROVINNÝCH KŘIVEK

Délka L nějaké křivky (čáry) z bodu A do bodu B se zjistí sečtením jejích velmi malých úseků ds , které je možné považovat za úsečky, tj.

$$L = \int_A^B ds.$$



Úsečka ds je přeponou pravoúhlého trojúhelníka se stranami dx a dy .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

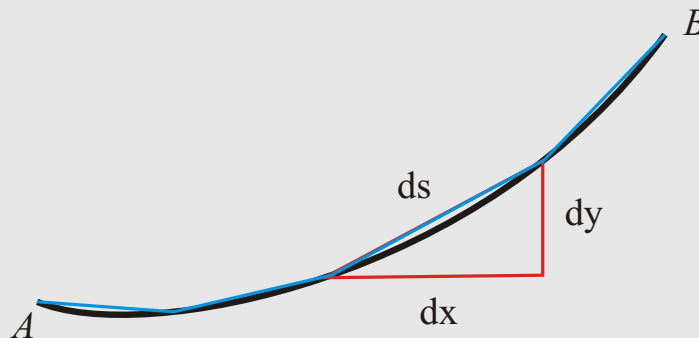
DÉLKA ROVINNÝCH KŘIVEK

Délka L nějaké křivky (čáry) z bodu A do bodu B se zjistí sečtením jejích velmi malých úseků ds , které je možné považovat za úsečky, tj.

$$L = \int_A^B ds .$$



Úsečka ds je přeponou pravoúhlého trojúhelníka se stranami dx a dy .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Aproximujeme křivku po částech úsečkami. A limitíme.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



Základní vztah pro vyjádření ds.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle zadání křivky (jako funkce, parametricky, polárně) se za y nebo x dosadí příslušné funkce a dostane se

$$1. L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \text{ je-li } y = f(x), x \in (a, b);$$

$$2. L = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \text{ je-li } x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a, b);$$

$$3. L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)} dt, \text{ je-li } r = \rho(t), t \in (\alpha, \beta).$$

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Podle uvedeného vzorce lze počítat délky křivek zadaných funkcemi, pokud příslušný integrál existuje. Délku křivky lze však definovat obecně bez použití integrálu jako supremum délek lomených čar, jejichž body lomu leží na dané křivce. Zkuste naznačit postup, jak dokázat ekvivalenci této definice s naší definicí pro hezké křivky.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Podle uvedeného vzorce lze počítat délky křivek zadaných funkcemi, pokud příslušný integrál existuje. Délku křivky lze však definovat obecně bez použití integrálu jako supremum délek lomených čar, jejichž body lomu leží na dané křivce. Zkuste naznačit postup, jak dokázat ekvivalenci této definice s naší definicí pro hezké křivky.



2. Stejně jako u obsahu a objemu není ani u vzorce pro délku křivky stanoveno, jaký integrál se má použít.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Podle uvedeného vzorce lze počítat délky křivek zadaných funkcemi, pokud příslušný integrál existuje. Délku křivky lze však definovat obecně bez použití integrálu jako supremum délek lomených čar, jejichž body lomu leží na dané křivce. Zkuste naznačit postup, jak dokázat ekvivalenci této definice s naší definicí pro hezké křivky.



2. Stejně jako u obsahu a objemu není ani u vzorce pro délku křivky stanoveno, jaký integrál se má použít.



V některých případech nelze použít Newtonův integrál, protože derivace $f'(x)$ ve vzorci nemusí ve všech bodech existovat.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Podle uvedeného vzorce lze počítat délky křivek zadaných funkcemi, pokud příslušný integrál existuje. Délku křivky lze však definovat obecně bez použití integrálu jako supremum délek lomených čar, jejichž body lomu leží na dané křivce. Zkuste naznačit postup, jak dokázat ekvivalenci této definice s naší definicí pro hezké křivky.



2. Stejně jako u obsahu a objemu není ani u vzorce pro délku křivky stanoveno, jaký integrál se má použít.



V některých případech nelze použít Newtonův integrál, protože derivace $f'(x)$ ve vzorci nemusí ve všech bodech existovat.



V těchto případech je možné buď použít obecnější integrál (J-integrál obvykle stačí) nebo rozdělit zkoumaný interval na části, kde lze Newtonův integrál použít, nebo někdy lze použít inverzní funkce, tj. dívat se na křivku jako na graf funkce $x = f^{-1}(y)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Podle uvedeného vzorce lze počítat délky křivek zadaných funkcemi, pokud příslušný integrál existuje. Délku křivky lze však definovat obecně bez použití integrálu jako supremum délek lomených čar, jejichž body lomu leží na dané křivce. Zkuste naznačit postup, jak dokázat ekvivalenci této definice s naší definicí pro hezké křivky.



2. Stejně jako u obsahu a objemu není ani u vzorce pro délku křivky stanoveno, jaký integrál se má použít.



V některých případech nelze použít Newtonův integrál, protože derivace $f'(x)$ ve vzorci nemusí ve všech bodech existovat.



V těchto případech je možné buď použít obecnější integrál (J-integrál obvykle stačí) nebo rozdělit zkoumaný interval na části, kde lze Newtonův integrál použít, nebo někdy lze použít inverzní funkce, tj. dívat se na křivku jako na graf funkce $x = f^{-1}(y)$.



3. Existují křivky, ležící např. v jednotkovém kruhu, které mají nekonečnou délku.

Konec poznámek 3.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

1. Spočtete délku kružnice pomocí implicitního, parametrického i polárního vyjádření.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte délku spirály $r = e^{3t}$ pro $t \in [0, 8]$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Napište integrál pro délku grafu funkce $\sqrt[3]{x}$ na intervalu $[-1, 8]$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Napište integrál pro délku grafu funkce $\sqrt[3]{x}$ na intervalu $[-1, 8]$.



Pozor na bod 0. Zkuste v tomto případě použít graf inverzní funkce.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Napište integrál pro délku grafu funkce $\sqrt[3]{x}$ na intervalu $[-1, 8]$.



Pozor na bod 0. Zkuste v tomto případě použít graf inverzní funkce.



Získaný integrál nepočítejte – víme proč?

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



4. Spočítejte délku smyčky křivky zadané parametricky jako $x = t^2, y = t^3/3 - t$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Spočítejte délku smyčky křivky zadané parametricky jako $x = t^2, y = t^3/3 - t$.



Zjistěte nejdříve hodnoty parametru pro které se křivka protne.)

Konec příkladů 3.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočtete délku úsečky z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 1)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočtete délku úsečky z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 1)$.



Řešení. Jde o graf funkce

$$y = f(x) = 1 - x$$

na intervalu $[0, 1]$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte délku úsečky z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 1)$.



Řešení. Jde o graf funkce

$$y = f(x) = 1 - x$$

na intervalu $[0, 1]$.



Podle vzorečku dostaneme pro délku vztah

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Spočítejte délku úsečky z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 1)$.



Řešení. Jde o graf funkce

$$y = f(x) = 1 - x$$

na intervalu $[0, 1]$.



Podle vzorečku dostaneme pro délku vztah

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2}.$$



Zdá se, že vzorečky fungují.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Můžeme použít parametrický zápis grafu pomocí funkcí

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$$

pro $t \in [0, \pi/2]$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Můžeme použít parametrický zápis grafu pomocí funkcí

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$$

pro $t \in [0, \pi/2]$.



Pak bude délka vyjádřena pomocí

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{8 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} \cdot 2 \sin t \cos t dt = [\sqrt{2} \sin^2 t]_0^{\pi/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Můžeme použít parametrický zápis grafu pomocí funkcí

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$$

pro $t \in [0, \pi/2]$.



Pak bude délka vyjádřena pomocí

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{8 \sin^2 t \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} \cdot 2 \sin t \cos t dt = [\sqrt{2} \sin^2 t]_0^{\pi/2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$



Nic jiného jsem nečekal.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Ještě polárně pro otrlé:



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ještě polárně pro otrlé:



Úsečku popíšeme polární formulkou

$$r = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} .$$

Počítač spočítá za nás primitivní funkci

$$\int \sqrt{(\sin(t) + \cos(t))^{-2} + \frac{(\cos(t) - \sin(t))^2}{(\sin(t) + \cos(t))^4}} dt \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} (\sin(t) + \cos(t)) \sqrt{2} \sqrt{\left(-4 (\cos(t))^4 + 4 \sin(t) \cos(t) + 4 (\cos(t))^2 + 1\right)^{-1}} \sin(t) .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ještě polárně pro otrlé:



Úsečku popíšeme polární formulkou

$$r = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} .$$

Počítač spočítá za nás primitivní funkci

$$\int \sqrt{(\sin(t) + \cos(t))^{-2} + \frac{(\cos(t) - \sin(t))^2}{(\sin(t) + \cos(t))^4}} dt \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} (\sin(t) + \cos(t)) \sqrt{2} \sqrt{\left(-4 (\cos(t))^4 + 4 \sin(t) \cos(t) + 4 (\cos(t))^2 + 1\right)^{-1}} \sin(t) .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



A tedy díky počítačům dostaneme zase $\sqrt{2}$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte obvod kruhu o poloměru r .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte obvod kruhu o poloměru r .



Řešení. Můžeme použít parametrický zápis pomocí funkcí

$$x = r \sin t, \quad y = r \cos t$$

pro $t \in [0, 2\pi]$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte obvod kruhu o poloměru r .



Řešení. Můžeme použít parametrický zápis pomocí funkcí

$$x = r \sin t, \quad y = r \cos t$$

pro $t \in [0, 2\pi]$.



Pak bude délka vyjádřena pomocí

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = [tr]_0^{2\pi} = 2\pi r .$$



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polárně to půjde ještě snadněji.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polárně to půjde ještě snadněji.



Pro jednotkový kruh je $r = 1$ a tedy

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + 0^2} dt = 2\pi .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polárně to půjde ještě snadněji.



Pro jednotkový kruh je $r = 1$ a tedy

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + 0^2} dt = 2\pi .$$



Vřele doporučuji :-)

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POVRCH ROTAČNÍCH TĚLES



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POVRCH ROTAČNÍCH TĚLES



Podobně jako se odvodil obsah z délky nebo objem z obsahu, dá se odvodit povrch tělesa z délky křivky.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POVRCH ROTAČNÍCH TĚLES



Podobně jako se odvodil obsah z délky nebo objem z obsahu, dá se odvodit povrch tělesa z délky křivky.

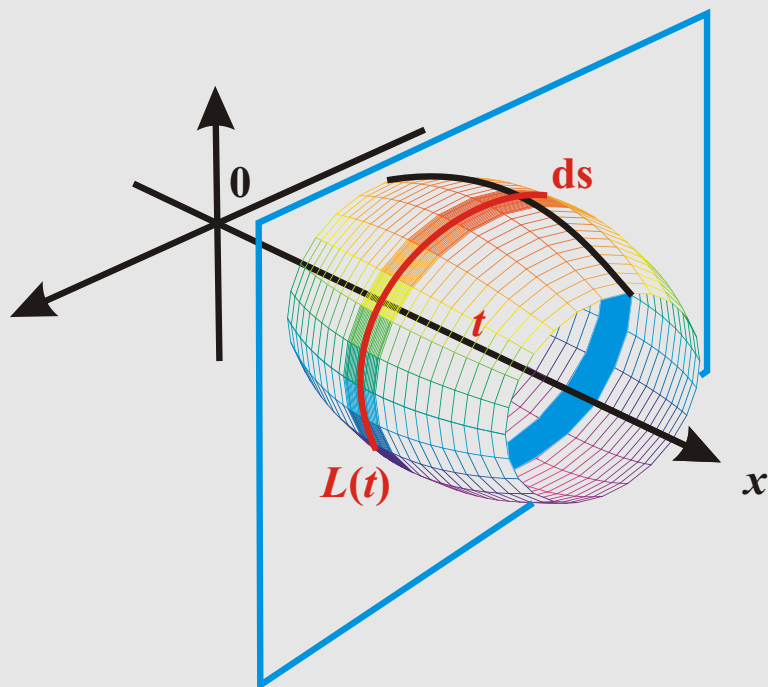


Těleso se protne rovinou kolmou např. na osu x v bodě t a spočte se délka $L(t)$ křivky ohraničující vzniklý rovinný obrazec. Tuto křivku lze považovat za úzký pás se šířkou ds . Všechny tyto pásy dají dohromady povrch S daného tělesa.



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro šířku ds se použijí výrazy z předchozí části o délce křivek a dostane se:

$$S = \int_a^b L(x) ds = \int_a^b L(x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b L(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro šířku ds se použijí výrazy z předchozí části o délce křivek a dostane se:

$$S = \int_a^b L(x) ds = \int_a^b L(x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b L(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



Pozor, ty integrály jsou při počítání opravdu nepříjemné.

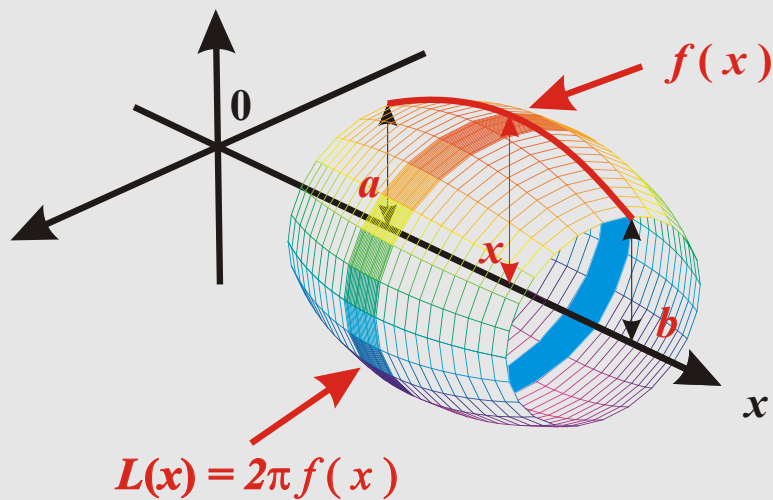


LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pro rotační tělesa je opět jednoduché spočítat délky $L(t)$ kružnic.



LEKCE15-IAP

délka
obsah

obsah-param
obsah-polar

objem

objem rotace 1
objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu
Guldin plocha
těžiště desky
Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jestliže těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x , pak je jeho povrch dán vzorcem

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x , pak je jeho povrch dán vzorcem

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$



Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$), použije se vzorec

$$2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jestliže těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x , pak je jeho povrch dán vzorcem

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$



Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$), použije se vzorec

$$2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$



V případě polárně zadané křivky ($r = \rho(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$):

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sin(t) \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)} dt.$$

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

poHYb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

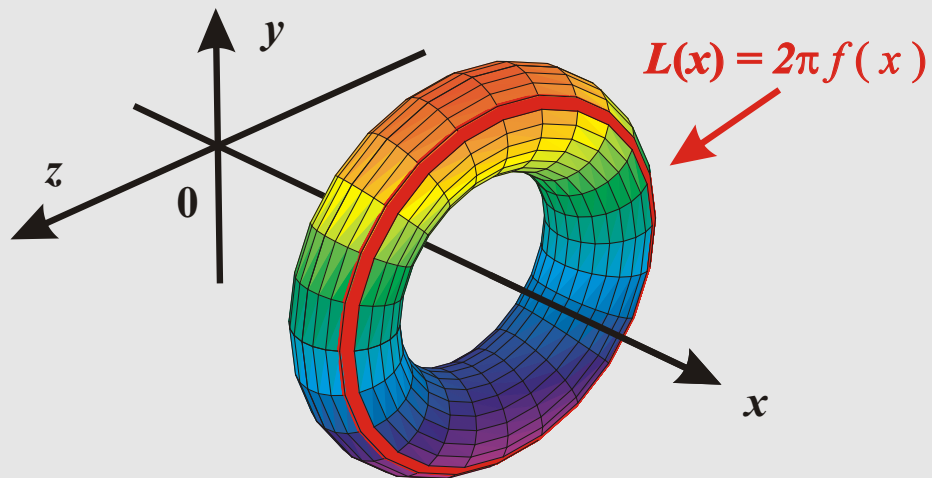
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

V *Příkladech* jsou uvedeny dva příklady na spočítání povrchu útvaru, který se nezískal rotací křivky. Je to útvar složený z úseček postavených na nějaké křivce v rovině. Pak povrch je „součtem“ délek d_s těchto úseček podél křivky v rovině, tj. $\int_a^b d_s ds$, kde ds je obvyklý malinký dílek křivky.

Konec poznámek 4.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Spočtete povrch koule.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte povrch anuloidu vzniklý otáčením kružnice o poloměru a , jejíž střed je vzdálen od osy otáčení $b > a$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Rotací okolo osy x grafu funkce $1/x$ na intervalu $[1, +\infty)$ vznikne útvar, který má nekonečný povrch a konečný objem. Ověřte.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Mějte pecen chleba tvaru koule. Ukažte, že všechny krajíce stejné tloušťky mají stejné množství kůrky.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Mějte plot postavený na grafu funkce $2\sqrt{x}$, jehož výška v bodě $(x, 2\sqrt{x})$ má výšku $2\sqrt{x}$. Kolik materiálu se spotřebuje na plot pro $0 \leq x \leq 2$?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Spočítejte povrch zdi postavené na kružnici o poloměru 2, která začíná v některém bodě kružnice a jejíž výška ve vzdálenosti s od tohoto bodu po oblouku kružnice je $3s$.

Konec příkladů 4.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Mějte pecen chleba tvaru koule. Ukažte, že všechny krajíce stejné tloušťky mají stejné množství kůrky.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Mějte pecen chleba tvaru koule. Ukažte, že všechny krajíce stejné tloušťky mají stejné množství kůrky.



Řešení. Budeme zkoumat povrch koule o poloměru R .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Mějte pecen chleba tvaru koule. Ukažte, že všechny krajíce stejné tloušťky mají stejné množství kůrky.



Řešení. Budeme zkoumat povrch koule o poloměru R .



Uvažujme, že tento povrch vznikl rotací kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ okolo osy x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Mějte pecen chleba tvaru koule. Ukažte, že všechny krajíce stejné tloušťky mají stejné množství kůrky.



Řešení. Budeme zkoumat povrch koule o poloměru R .



Uvažujme, že tento povrch vznikl rotací kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ okolo osy x .



Popíšeme kružnici parametricky $x = \varphi(t) = R \cos t$, $y = \psi(t) = R \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$.



LEKCE15-IAP

| |
|-------------------|
| délka |
| obsah |
| obsah-param |
| obsah-polar |
| objem |
| objem rotace 1 |
| objem rotace 2 |
| délka |
| povrch |
| povrch rotace |
| pohyb |
| těžiště |
| těžiště drátu |
| Guldin plocha |
| těžiště desky |
| Guldin objem |
| práce |
| Poznámky |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |

Krajíc odpovídá jistému intervalu $(a, b) \subset (0, \pi)$. Uvažujeme krajíce vzniklé ukrojením pomocí roviny kolmé k ose x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

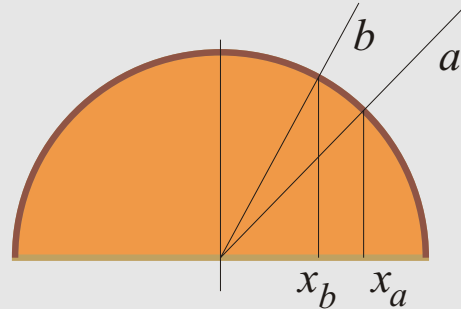
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Krajíc odpovídá jistému intervalu $(a, b) \subset (0, \pi)$. Uvažujeme krajíce vzniklé ukrojením pomocí roviny kolmé k ose x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

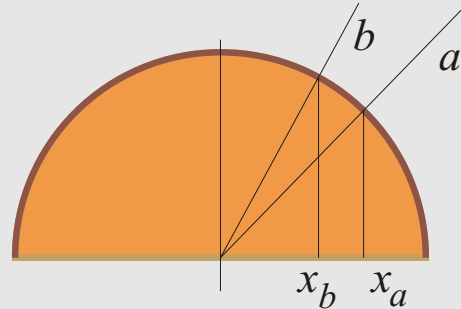
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Krajíc odpovídá jistému intervalu $(a, b) \subset (0, \pi)$. Uvažujeme krajíce vzniklé ukrojením pomocí roviny kolmé k ose x .



Pro výpočet povrchu vzniklého rotací se použije vzorec

$$2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

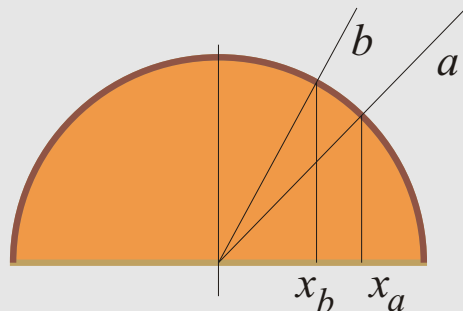
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Krajíc odpovídá jistému intervalu $(a, b) \subset (0, \pi)$. Uvažujeme krajíce vzniklé ukrojením pomocí roviny kolmé k ose x .



Pro výpočet povrchu vzniklého rotací se použije vzorec

$$2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt .$$



Dostaneme tedy

$$2\pi \int_a^b |R \sin t| \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R^2 \int_a^b |\sin t| dt .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkusíme pro jednoduchost krajíce $(a, b) \subset (0, \pi/2)$. Pak dostaneme

$$2\pi R^2 \int_a^b \sin t \, dt = 2\pi R(R \cos a - R \cos b) = 2\pi R(x_a - x_b),$$

kde $x_a = R \cos a$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá první straně krajíce (pro $t = a$), podobně $x_b = R \cos b$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá druhé straně krajíce (pro $t = b$).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkusíme pro jednoduchost krajíce $(a, b) \subset (0, \pi/2)$. Pak dostaneme

$$2\pi R^2 \int_a^b \sin t \, dt = 2\pi R(R \cos a - R \cos b) = 2\pi R(x_a - x_b),$$

kde $x_a = R \cos a$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá první straně krajíce (pro $t = a$), podobně $x_b = R \cos b$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá druhé straně krajíce (pro $t = b$).



Podobně lze zpracovat i interval $(\pi/2, \pi)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkusíme pro jednoduchost krajíce $(a, b) \subset (0, \pi/2)$. Pak dostaneme

$$2\pi R^2 \int_a^b \sin t \, dt = 2\pi R(R \cos a - R \cos b) = 2\pi R(x_a - x_b),$$

kde $x_a = R \cos a$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá první straně krajíce (pro $t = a$), podobně $x_b = R \cos b$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá druhé straně krajíce (pro $t = b$).



Podobně lze zpracovat i interval $(\pi/2, \pi)$.



Výsledkem je, že kůrka na krajici je rovna $2\pi R$ krát tloušťka $x_a - x_b$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



BTW, celý pecen má tedy povrch $4\pi R^2$. To je tolik, jako má veliký povrch opsaný válec.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



BTW, celý pecen má tedy povrch $4\pi R^2$. To je tolik, jako má velký povrch opsaný válec.



Tedy, když zapřemýšlíme ještě trošku, válcové mapy zemského povrchu ukazují přesně rozlohy jednotlivých území.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



BTW, celý pecen má tedy povrch $4\pi R^2$. To je tolik, jako má velký povrch opsaný válec.



Tedy, když zapřemýšlíme ještě trošku, válcové mapy zemského povrchu ukazují přesně rozlohy jednotlivých území.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

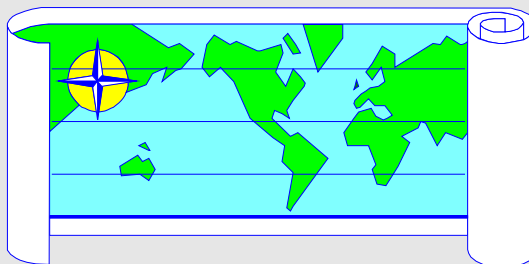
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Určitě šlo použít i jiný popis povrchu koule a tedy jiné vzorečky.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Určitě šlo použít i jiný popis povrchu koule a tedy jiné vzorečky.



V případě polárně zadané křivky ($r = \rho(t) = R, t \in (\alpha, \beta)$):



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Určitě šlo použít i jiný popis povrchu koule a tedy jiné vzorečky.



V případě polárně zadané křivky ($r = \rho(t) = R, t \in (\alpha, \beta)$):



$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sin(t) \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)} dt &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} R \sin(t) \sqrt{R^2 + 0^2} dt = \\ &= 2\pi R^2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) dt = 2\pi R^2 (\cos \alpha - \cos \beta) . \end{aligned}$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Určitě šlo použít i jiný popis povrchu koule a tedy jiné vzorečky.



V případě polárně zadané křivky ($r = \rho(t) = R, t \in (\alpha, \beta)$):



$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \sin(t) \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)} dt &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} R \sin(t) \sqrt{R^2 + 0^2} dt = \\ &= 2\pi R^2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) dt = 2\pi R^2 (\cos \alpha - \cos \beta) . \end{aligned}$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Naštěstí je to stejné.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FYZIKÁLNÍ APLIKACE



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FYZIKÁLNÍ APLIKACE



Použití integrálu ve fyzice je velmi mnohostranné.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FYZIKÁLNÍ APLIKACE



Použití integrálu ve fyzice je velmi mnohostranné.



V této kapitole bude uvedeno jen několik základních aplikací v mechanice.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FYZIKÁLNÍ APLIKACE



Použití integrálu ve fyzice je velmi mnohostranné.



V této kapitole bude uvedeno jen několik základních aplikací v mechanice.



V pozdějších kapitolách budou při různých příležitostech uvedeny další aplikace integrálu ve fyzice.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POHYB



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POHYB



Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t , je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POHYB



Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t , je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t .



Umíte to vysvětlit?

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li tedy dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu.



???



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li tedy dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu.



???



Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte integrálem

$$\int_a^b |v(t)| dt .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li tedy dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu.



???



Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte integrálem

$$\int_a^b |v(t)| dt .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



SORRY ;-)



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

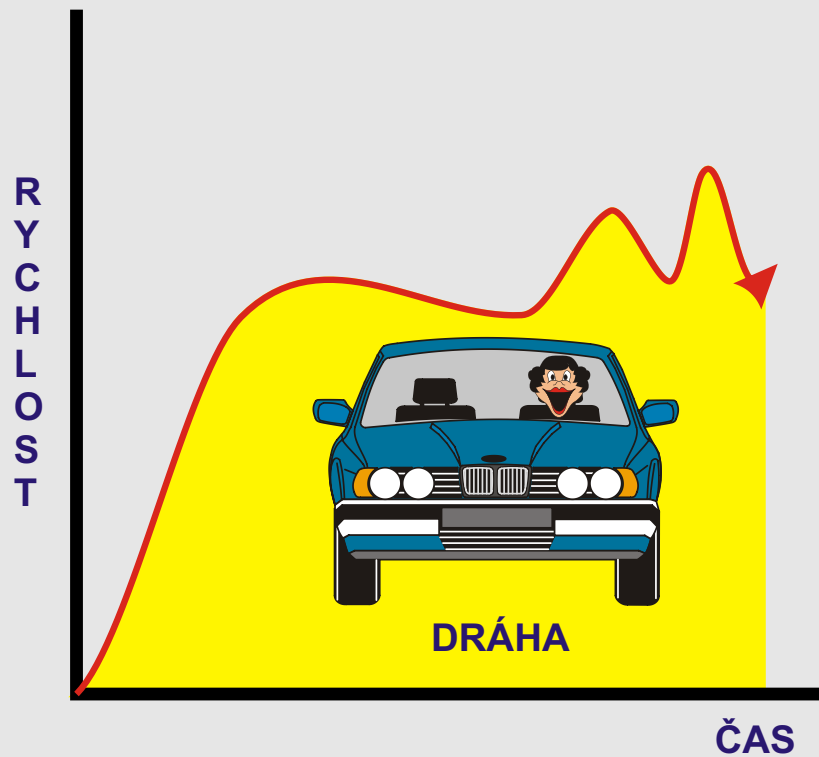
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

TĚŽIŠTĚ



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

TĚŽIŠTĚ



Zhruba řečeno, soustředí-li se do těžiště tělesa hmotnost celého tělesa, pak (tíhové) momenty (vzhledem k nějakým osám) těžiště a celého tělesa se rovnají.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

TĚŽIŠTĚ



Zhruba řečeno, soustředí-li se do těžiště tělesa hmotnost celého tělesa, pak (tíhové) momenty (vzhledem k nějakým osám) těžiště a celého tělesa se rovnají.



Podobně jako u výpočtu velikosti množin je i u zjišťování těžiště vhodné začít u jednodimenzionálních objektů (tj. drátů) a postupně zvyšovat dimenzi.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

TĚŽIŠTĚ



Zhruba řečeno, soustředí-li se do těžiště tělesa hmotnost celého tělesa, pak (tíhové) momenty (vzhledem k nějakým osám) těžiště a celého tělesa se rovnají.



Podobně jako u výpočtu velikosti množin je i u zjišťování těžiště vhodné začít u jednodimenzionálních objektů (tj. drátů) a postupně zvyšovat dimenzi.



Vzhledem k pozdějšímu snadnějšímu přístupu pomocí integrálu funkcí více proměnných a plošných integrálů bude zvyšování dimenze ukončeno u rovinných desek.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

TĚŽIŠTĚ



Zhruba řečeno, soustředí-li se do těžiště tělesa hmotnost celého tělesa, pak (tíhové) momenty (vzhledem k nějakým osám) těžiště a celého tělesa se rovnají.



Podobně jako u výpočtu velikosti množin je i u zjišťování těžiště vhodné začít u jednodimenzionálních objektů (tj. drátů) a postupně zvyšovat dimenzi.



Vzhledem k pozdějšímu snadnějšímu přístupu pomocí integrálu funkcí více proměnných a plošných integrálů bude zvyšování dimenze ukončeno u rovinných desek.



Tenký drát se bude v následujícím postupu považovat za křivku. Drát nemusí být homogenní a jeho hustota je daná nějakou funkcí h .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejjednodušší je případ, kdy drát je rovný – pak ho lze umístit na kladnou osu x s jedním koncem do počátku a druhým do bodu d , kde d je délka drátu. Hustota h je funkce definovaná na intervalu $[0, d]$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejjednodušší je případ, kdy drát je rovný – pak ho lze umístit na kladnou osu x s jedním koncem do počátku a druhým do bodu d , kde d je délka drátu. Hustota h je funkce definovaná na intervalu $[0, d]$.



Hmotnost M drátu se spočte „sečtením“ hmotností $h(x) dx$ malinkých dílků dx a je tedy rovna $\int_0^d h(x) dx$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejjednodušší je případ, kdy drát je rovný – pak ho lze umístit na kladnou osu x s jedním koncem do počátku a druhým do bodu d , kde d je délka drátu. Hustota h je funkce definovaná na intervalu $[0, d]$.



Hmotnost M drátu se spočte „sečtením“ hmotností $h(x) dx$ malinkých dílků dx a je tedy rovna $\int_0^d h(x) dx$.



Těžiště zřejmě bude ležet na ose x , řekněme v bodě T . Podle úvodního vysvětlení musí být moment drátu roven momentu těžiště, což je $T \cdot M$ (počítá se moment vzhledem k počátku).



LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
- povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejjednodušší je případ, kdy drát je rovný – pak ho lze umístit na kladnou osu x s jedním koncem do počátku a druhým do bodu d , kde d je délka drátu. Hustota h je funkce definovaná na intervalu $[0, d]$.



Hmotnost M drátu se spočte „sečtením“ hmotností $h(x) dx$ malinkých dílků dx a je tedy rovna $\int_0^d h(x) dx$.



Těžiště zřejmě bude ležet na ose x , řekněme v bodě T . Podle úvodního vysvětlení musí být moment drátu roven momentu těžiště, což je $T.M$ (počítá se moment vzhledem k počátku).



Moment drátu se spočítá podobně jako hmotnost „sečtením“ momentů všech bodů a tedy se rovná $\int_0^d xh(x) dx$. Odtud vyplývá vzorec pro těžiště:

$$T = \frac{\int_0^d xh(x) dx}{\int_0^d h(x) dx}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je nyní drát zahnutý, např. je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b) . V bodě $(x, f(x))$ má drát hustotu $h(x)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je nyní drát zahnutý, např. je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b) . V bodě $(x, f(x))$ má drát hustotu $h(x)$.



Hmotnost M drátu se opět spočte „sečtením“ hmotností jednotlivých dílků ds a je tedy rovna $\int_a^b h(x) ds = \int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' je nyní drát zahnutý, např. je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b) . V bodě $(x, f(x))$ má drát hustotu $h(x)$.



Hmotnost M drátu se opět spočte „sečtením“ hmotností jednotlivých dílků ds a je tedy rovna $\int_a^b h(x) ds = \int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.



Necht' má těžiště souřadnice (T_x, T_y) a má hmotnost M . Jeho momenty vzhledem k osám x, y budou momenty drátu vzhledem k těmto osám.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' je nyní drát zahnutý, např. je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b) . V bodě $(x, f(x))$ má drát hustotu $h(x)$.



Hmotnost M drátu se opět spočte „sečtením“ hmotností jednotlivých dílků ds a je tedy rovna $\int_a^b h(x) ds = \int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.



Necht' má těžiště souřadnice (T_x, T_y) a má hmotnost M . Jeho momenty vzhledem k osám x, y budou momenty drátu vzhledem k těmto osám.



Moment M_x drátu vzhledem k ose x je součet momentů jednotlivých dílků, tj. $\int_a^b y h(x) ds$
 $\int_a^b f(x) h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je nyní drát zahnutý, např. je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b) . V bodě $(x, f(x))$ má drát hustotu $h(x)$.



Hmotnost M drátu se opět spočte „sečtením“ hmotností jednotlivých dílků ds a je tedy rovna $\int_a^b h(x) ds = \int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.



Nechť má těžiště souřadnice (T_x, T_y) a má hmotnost M . Jeho momenty vzhledem k osám x, y budou momenty drátu vzhledem k těmto osám.



Moment M_x drátu vzhledem k ose x je součet momentů jednotlivých dílků, tj. $\int_a^b y h(x) ds = \int_a^b f(x) h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.



Moment M_y vzhledem k ose y je roven $\int_a^b x h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.



LEKCE15-IAP

děлка

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

děлка

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Porovnáním momentů M_x a M_y se dostanou vzorce

$$T_x = \frac{\int_a^b x h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}, \quad T_y = \frac{\int_a^b f(x) h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Porovnáním momentů M_x a M_y se dostanou vzorce

$$T_x = \frac{\int_a^b x h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}, \quad T_y = \frac{\int_a^b f(x) h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}.$$



Vzorec pro parametricky zadané křivky se získá standardním způsobem: za x, y se dosadí příslušné parametrické funkce φ, ψ .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pozor! Zkusíme dráty s konstantní hustotou.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pozor! Zkusíme dráty s konstantní hustotou.



Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost drátu rovna jeho délce L .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pozor! Zkusíme dráty s konstantní hustotou.



Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost drátu rovna jeho délce L .



Vynásobíte-li vzorec pro T_y jmenovatelem a dále číslem 2π , dostanete

$$2\pi T_y \cdot L = S,$$

kde S je povrch rotačního tělesa vzniklého rotací drátu okolo osy x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pozor! Zkusíme dráty s konstantní hustotou.



Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost drátu rovna jeho délce L .



Vynásobíte-li vzorec pro T_y jmenovatelem a dále číslem 2π , dostanete

$$2\pi T_y \cdot L = S,$$

kde S je povrch rotačního tělesa vzniklého rotací drátu okolo osy x .



Uvedená rovnost říká, že tento povrch je rovný ploše válcové plochy o poloměru T_y a výšce L .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zhruba lze říci, že je délka
křivky soustředěna v těžišti
a to obíhá kolem osy x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Zhruba lze říci, že je délka křivky soustředěna v těžišti a to obíhá kolem osy x .



Tomuto vzorci se někdy říká *Guldinovo pravidlo* pro rotační plochy:

VĚTA. Plocha rotačního tělesa vytvořeného rotací rovinné křivky C kolem přímky p je rovna násobku délky křivky C a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky C od p .

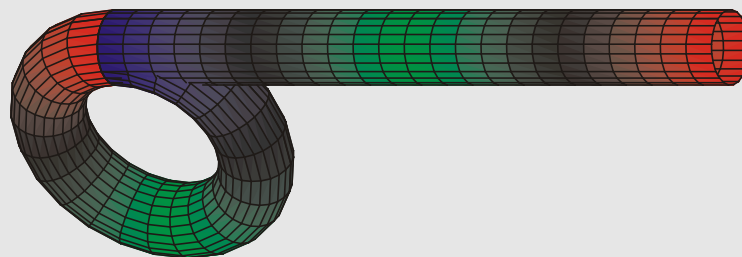


LEKCE15-IAP

| |
|-------------------|
| délka |
| obsah |
| obsah-param |
| obsah-polar |
| objem |
| objem rotace 1 |
| objem rotace 2 |
| délka |
| povrch |
| povrch rotace |
| pohyb |
| těžiště |
| těžiště drátu |
| Guldin plocha |
| těžiště desky |
| Guldin objem |
| práce |
| Poznámky |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Příklady |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Otázky |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Cvičení |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |
| Učení |
| 1 2 3 4 5 6 7 8 9 |



Ukázka rotační plochy a jejího rozvinutí pomocí Guldinova pravidla.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tenkou rovnou deskou (např. plech) je možné pokládat za množinu v rovině, na kterém je definována funkce $h(x, y)$ udávající hustotu v bodě (x, y) .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tenkou rovnou deskou (např. plech) je možné pokládat za množinu v rovině, na kterém je definována funkce $h(x, y)$ udávající hustotu v bodě (x, y) .



Při výpočtu těžiště desky lze postupovat stejně jako u výpočtu těžiště drátu.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tenkou rovnou deskou (např. plech) je možné pokládat za množinu v rovině, na kterém je definována funkce $h(x, y)$ udávající hustotu v bodě (x, y) .



Při výpočtu těžiště desky lze postupovat stejně jako u výpočtu těžiště drátu.



Zatím však není definován integrál přes množiny v rovině a tak je nutné postup rozdělit. Výpočet hmotnosti je podobný výpočtu plochy. Udělají se řezy desky kolmé např. na osu x a zjistí se jejich hmotnosti a ty se pak „sečtou“.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tenkou rovnou deskou (např. plech) je možné pokládat za množinu v rovině, na kterém je definována funkce $h(x, y)$ udávající hustotu v bodě (x, y) .



Při výpočtu těžiště desky lze postupovat stejně jako u výpočtu těžiště drátu.



Zatím však není definován integrál přes množiny v rovině a tak je nutné postup rozdělit. Výpočet hmotnosti je podobný výpočtu plochy. Udělají se řezy desky kolmé např. na osu x a zjistí se jejich hmotnosti a ty se pak „sečtou“.



Je-li deska např. množinou bodů ležících mezi grafy dvou funkcí $(\{(x, y); x \in (a, b), g(x) < y \leq f(x)\})$ a hustota je dána funkcí $h(x, y)$, pak hmotnost M je rovna

$$M = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x, y) dy \right) dx.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tenkou rovnou deskou (např. plech) je možné pokládat za množinu v rovině, na kterém je definována funkce $h(x, y)$ udávající hustotu v bodě (x, y) .



Při výpočtu těžiště desky lze postupovat stejně jako u výpočtu těžiště drátu.



Zatím však není definován integrál přes množiny v rovině a tak je nutné postup rozdělit. Výpočet hmotnosti je podobný výpočtu plochy. Udělají se řezy desky kolmé např. na osu x a zjistí se jejich hmotnosti a ty se pak „sečtou“.



Je-li deska např. množinou bodů ležících mezi grafy dvou funkcí ($\{(x, y); x \in (a, b), g(x) < y \leq f(x)\}$) a hustota je dána funkcí $h(x, y)$, pak hmotnost M je rovna

$$M = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x, y) dy \right) dx.$$



Vnitřní integrál udává hmotnost řezu určeného kolmicí v bodě x a vnější integrál je všechny „sčítá“.

LEKCE15-IAP

- délka
- obsah
 - obsah-param
 - obsah-polar
- objem
 - objem rotace 1
 - objem rotace 2
- délka
- povrch
 - povrch rotace
- pohyb
- těžiště
 - těžiště drátu
 - Guldin plocha
 - těžiště desky
 - Guldin objem
- práce
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejným způsobem se určí momenty desky vzhledem k osám x, y : určí se moment vzhledem k ose x řezu desky kolmému na osu x a tyto momenty se „sečtou“.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejným způsobem se určí momenty desky vzhledem k osám x, y : určí se moment vzhledem k ose x řezu desky kolmému na osu x a tyto momenty se „sečtou“.



Dostane se

$$M_x = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} yh(x, y) dy \right) dx.$$

a podobně se vypočte M_y .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejným způsobem se určí momenty desky vzhledem k osám x, y : určí se moment vzhledem k ose x řezu desky kolmému na osu x a tyto momenty se „sečtou“.



Dostane se

$$M_x = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} yh(x, y) dy \right) dx.$$

a podobně se vypočte M_y .



Pro těžiště se tedy získají vzorce

$$T_x = \frac{\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} xh(x, y) dy \right) dx}{\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x, y) dy \right) dx}, \quad T_y = \frac{\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} yh(x, y) dy \right) dx}{\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x, y) dy \right) dx}$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Odvodíme další pravidlo:



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Odvodíme další pravidlo:



Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost desky rovna jeho obsahu P .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Odvodíme další pravidlo:



Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost desky rovna jeho obsahu P .



Podobně jako u drátu se úpravou vzorce pro T_y dostává

$$2\pi T_y \cdot P = 2\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))/2 dx = V$$

kde V je objem rotačního tělesa vzniklého rotací plechu okolo osy x .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Odvodíme další pravidlo:



Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost desky rovna jeho obsahu P .



Podobně jako u drátu se úpravou vzorce pro T_y dostává

$$2\pi T_y \cdot P = 2\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))/2 dx = V$$

kde V je objem rotačního tělesa vzniklého rotací plechu okolo osy x .



Podobně jako u plochy rotačního tělesa je tedy i objem počítán jako by byla základní plocha, která rotuje, soustředěna do těžiště a to obíhalo kolem osy x .

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

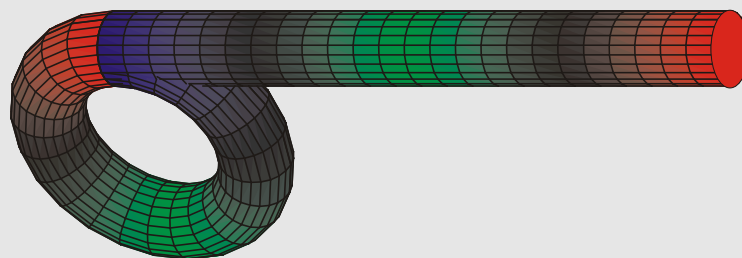


Tomuto vzorci se někdy říká *Guldinovo pravidlo* pro rotační objemy:

VĚTA. Objem rotačního tělesa vytvořeného rotací rovinné množiny A kolem přímky p , neprotínající množinu A , je rovna násobku obsahu množiny A a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny A od p .



Ukázka rotačního tělesa a jejího narovnění pomocí Guldinova pravidla.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



SÍLA, PRÁCE



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

SÍLA, PRÁCE



Klasický vzorec $W = Fd$ vypočítává práci W vykonanou působením síly F po dráze délky d (síla působí ve směru dráhy).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

SÍLA, PRÁCE



Klasický vzorec $W = Fd$ vypočítává práci W vykonanou působením síly F po dráze délky d (síla působí ve směru dráhy).



Jestliže se velikost síly v jednotlivých bodech dráhy mění, je nutné použít integraci.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Necht' ve směru osy x působí síla velikosti $F(x)$ v bodě x . Její práce na úseku dx je rovna $f(x) dx$ (na tak malém úseku lze považovat sílu za konstantní).



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť ve směru osy x působí síla velikosti $F(x)$ v bodě x . Její práce na úseku dx je rovna $f(x) dx$ (na tak malém úseku lze považovat sílu za konstantní).



Celková práce vykonaná na intervalu $[a, b]$ působením této síly je tedy

$$W = \int_a^b F(x) dx .$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li deska ponořena kolmo do kapaliny, působí na malý dílek dx desky hydrostatická síla $hx dx$ (z jedné strany desky), kde h je hustota kapaliny a x je vzdálenost dílku od hladiny kapaliny.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

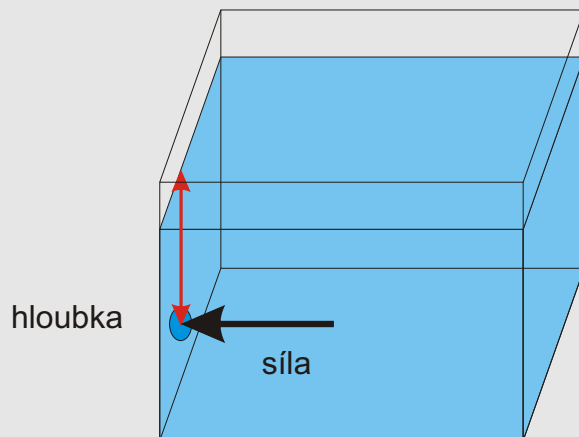
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li deska ponořena kolmo do kapaliny, působí na malý dílek dx desky hydrostatická síla $hx dx$ (z jedné strany desky), kde h je hustota kapaliny a x je vzdálenost dílku od hladiny kapaliny.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

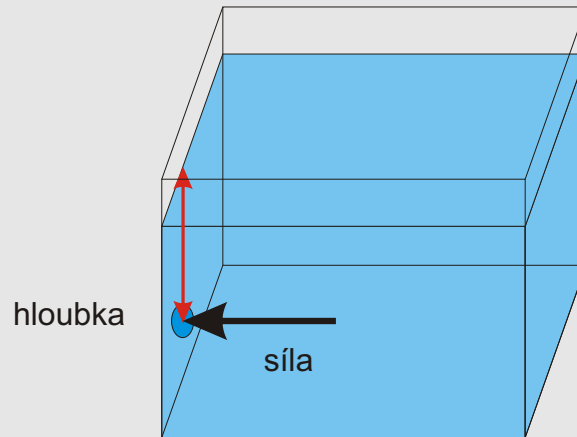
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li deska ponořena kolmo do kapaliny, působí na malý dílek dx desky hydrostatická síla $hx dx$ (z jedné strany desky), kde h je hustota kapaliny a x je vzdálenost dílku od hladiny kapaliny.



Je-li $l(x)$ délka množiny bodů desky, které jsou všechny vzdálené x od hladiny, je hydrostatická síla působící na tuto množinu rovna $hxl(x) dx$ a celková hydrostatická síla působící na jednu stranu desky je tedy $\int_a^b hxl(x) dx$, kde a, b jsou nejmenší, resp. největší, vzdálenosti bodů desky od hladiny. Mění-li se hustota kapaliny s hloubkou, místo h se píše $h(x)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podobným způsobem lze používat integrály i v dalších situacích, všude, kde nejsou používané funkce konstantní a např. mění se s časem. Může to být i výpočet šíření chorob nebo toku financí apod.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Necht' se bod pohybuje po přímce rychlostí $5\pi \cos(\pi t)$ m/sec v čase t . Zjistěte změnu polohy body od $t = 0$ do $t = 1$ sec nebo do $t = 3/2$ sec. Jakou vzdálenost bod urazil za první sekundu?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Ukažte, že homogenní tyč má těžiště uprostřed.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte těžiště tyče o délce 5m, která má hustotu $(1+x/5)$ kg/m, kde x je vzdálenost od jednoho zvoleného konce tyče.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Najděte těžiště polokružnice o poloměru r . Totéž pro nehomogenní drát tvaru polokružnice $x = r \cos t, y = r \sin t, t \in [0, \pi]$, s hustotou $h(t) = t$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Najděte těžiště polokruhu o poloměru r .



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Najděte těžiště desky omezené křivkami $y^2 = 8x$ a $x = 2$ s hustotou v bodě (x, y) úměrnou $|y|$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Kolik práce se vykoná stlačením péra z 2m na 1,5m, je-li konstanta péra rovna 10?
(Použijte Hookeův zákon $F = -kx$, kde F je síla, k je konstanta péra a x je příslušná dráha.)



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

8. Kolik práce je potřeba k vypumpování vody z plné nádrže tvaru polokoule o poloměru 3m umístěné vrcholem dolů do výšky 2m nad horní část nádrže?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

9. Dvacetilitrovou nádobu těžkou 2kg naplníte vodou a vytáhnete na laně (1m lana váží 1kg) do výšky 20m stálou rychlostí 4m/sec. Nádobu je děravá a nahoru vytáhnete jen 10l vody. Jakou práci vykonáte?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

10. Jaký hydrostatický tlak působí na jednu stranu desky tvaru lichoběžníka ponořenou svisle do vody s horní hranou 4m pod hladinou? Lichoběžník má spodní stranu dlouhou 8m, horní stranu 6m a výšku rovnou 6m.

Konec příkladů 5.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte těžiště homogenního drátu ohnutého do tvaru půlkružnice.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte těžiště homogenního drátu ohnutého do tvaru půlkružnice.



Řešení. Připomeňme, že souřadnice (\bar{x}, \bar{y}) těžiště drátu jsou určeny vzorečkem

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dm}{\int 1 \, dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, dm}{\int 1 \, dm}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Příklad. Najděte těžiště homogenního drátu ohnutého do tvaru půlkružnice.



Řešení. Připomeňme, že souřadnice (\bar{x}, \bar{y}) těžiště drátu jsou určeny vzorečkem

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dm}{\int 1 \, dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, dm}{\int 1 \, dm}.$$



Zde dm odpovídá integraci podle hmotnosti, která je při hustotě h odvozena od ds vzorečkem $dm = hds$.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

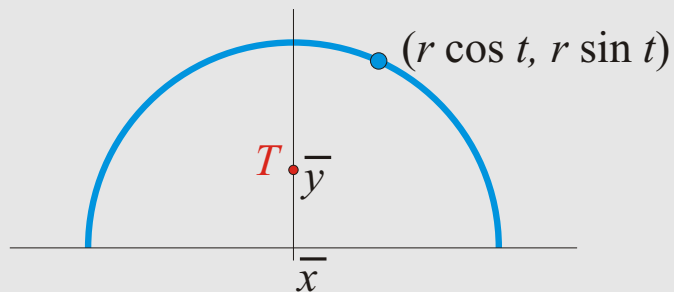
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Parametrický popis drátu zvolíme

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

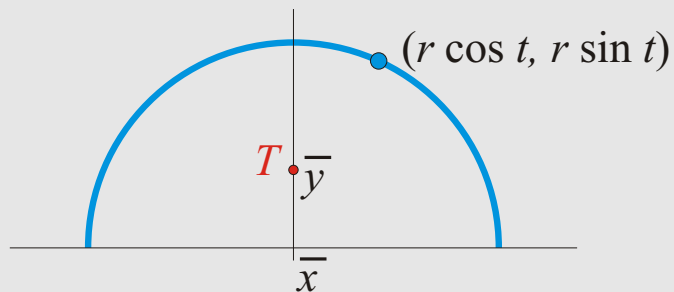
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parametrický popis drátu zvolíme

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$



Pak

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dm}{\int 1 \, dm} = \frac{\int_0^\pi r \cos t \cdot h \cdot r \, dt}{\int_0^\pi h \cdot r \, dt} = \frac{hr^2[\sin t]_0^\pi}{hr[t]_0^\pi} = 0.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

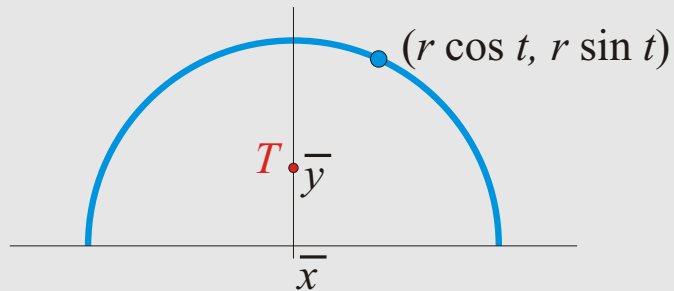
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parametrický popis drátu zvolíme

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$



Pak

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dm}{\int 1 \, dm} = \frac{\int_0^\pi r \cos t \cdot h \cdot r \, dt}{\int_0^\pi h \cdot r \, dt} = \frac{hr^2[\sin t]_0^\pi}{hr[t]_0^\pi} = 0.$$



Podobně

$$\bar{y} = \frac{\int y \, dm}{\int 1 \, dm} = \frac{\int_0^\pi r \sin t \cdot h \cdot r \, dt}{\int_0^\pi h \cdot r \, dt} = \frac{hr^2[-\cos t]_0^\pi}{hr[t]_0^\pi} = \frac{2r}{\pi}.$$

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Kolik práce je potřeba k vypumpování vody z plné nádrže tvaru polokoule o poloměru $r = 3$ m umístěné vrcholem dolů do výšky $h = 2$ m nad horní část nádrže?



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Kolik práce je potřeba k vypumpování vody z plné nádrže tvaru polokoule o poloměru $r = 3$ m umístěné vrcholem dolů do výšky $h = 2$ m nad horní část nádrže?



Řešení. Budeme uvažovat pohyb vrstvy vody v hloubce $x > 0$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

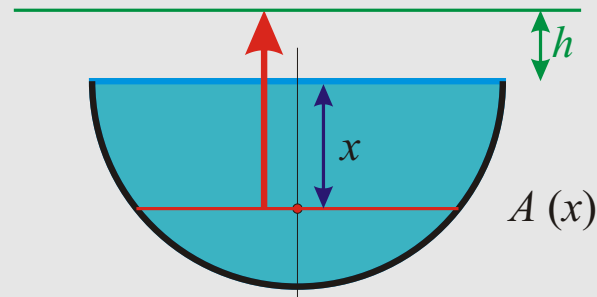
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Kolik práce je potřeba k vypumpování vody z plné nádrže tvaru polokoule o poloměru $r = 3$ m umístěné vrcholem dolů do výšky $h = 2$ m nad horní část nádrže?



Řešení. Budeme uvažovat pohyb vrstvy vody v hloubce $x > 0$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o vrstvu o velikosti $\pi(r^2 - x^2)$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o vrstvu o velikosti $\pi(r^2 - x^2)$.



Tato vrstva bude putovat po dráze $x + h$.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o vrstvu o velikosti $\pi(r^2 - x^2)$.



Tato vrstva bude putovat po dráze $x + h$.



Potřebná síla bude rovna $k \cdot \pi(r^2 - x^2)$, kde k je tíha 1 m³ vody.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o vrstvu o velikosti $\pi(r^2 - x^2)$.



Tato vrstva bude putovat po dráze $x + h$.



Potřebná síla bude rovna $k \cdot \pi(r^2 - x^2)$, kde k je tíha 1 m³ vody.



Práce na vypumpování se bude počítat integrováním "příspěvků" jednotlivých vrstev $k \cdot \pi(r^2 - x^2) \cdot (x + h)$ podle vzorečku "práce=síla x dráha".



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jde o vrstvu o velikosti $\pi(r^2 - x^2)$.



Tato vrstva bude putovat po dráze $x + h$.



Potřebná síla bude rovna $k \cdot \pi(r^2 - x^2)$, kde k je tíha 1 m³ vody.



Práce na vypumpování se bude počítat integrováním "příspěvků" jednotlivých vrstev $k \cdot \pi(r^2 - x^2) \cdot (x + h)$ podle vzorečku "práce=síla x dráha".



Tedy celková práce bude vyjádřena integrálem

$$\int_0^r k \cdot \pi(r^2 - x^2) \cdot (x + h) dx = \frac{225k\pi}{4}.$$



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Každá hloubka přináší svoji informaci, kolik práce na ni bude potřeba.



LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Každá hloubka přináší svoji informaci, kolik práce na ni bude potřeba.



Po zintegrování jsme hotovi.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE15-IAP

délka

obsah

obsah-param

obsah-polar

objem

objem rotace 1

objem rotace 2

délka

povrch

povrch rotace

pohyb

těžiště

těžiště drátu

Guldin plocha

těžiště desky

Guldin objem

práce

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9