NĚKTERÁ POUŽITÍ INTEGRÁLU

V této kapitole budou ukázány jednoduché aplikace integrálu.

Důležitější než výsledné vzorce jsou však postupy, které k nim vedou.

Základem tu je představa integrálu pomocí Riemannova přístupu. Pro výpočet výsledných vzorců se pak používá Newtonův přístup. Vzájemně se tu tak snoubí oba přístupy.

GEOMETRICKÉ APLIKACE

Geometrické aplikace se soustředí na obsahy geometrických obrazců v rovině, na objemy těles a na délky křivek v rovině.

A to je semeniště problémů (příkladů).

OBSAH NĚKTERÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ

Měření obecných podmnožin Euklidovských prostorů je obtížné (a v některých případech nemožné). Touto situací a přesným matematickým přístupem se zabývá teorie míry (viz kapitolu 30). Některé ne zcela přesné části této kapitoly budou upřesněny i v kapitolách o funkcích více proměnných.

Zde bude pojednáno o měření jednodušších a speciálních množin, které však jsou základem pro většinu případů objevujících se v praxi.

Pro „velikost" některých podmnožin $\mathbb{R}^n$ se používá různých termínů, např. délka pro intervaly v $\mathbb{R}$, obsah pro geometrické obrazce v $\mathbb{R}^2$, objem pro tělesa v $\mathbb{R}^3$.

Při nerozlišování dimenze a druhu množin je lépe používat termín *míra*.

Začíná se měřením podmnožin $\mathbb{R}$.

Mírou intervalu I na přímce s koncovými body a, b je jeho délka $|b - a|$ bez ohledu na to, zda je to interval otevřený, uzavřený nebo polootevřený (tj, hranice tu nehraje žádnou roli).

Stejný vzorec lze použít i pro bod (degenerovaný interval $[a, a]$), což znamená, že míra bodu (přesněji míra jednobodové množiny) je 0.

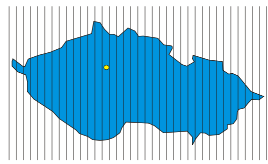
V *Poznámkách* je návod, jak určit míru některých složitějších množin reálných čísel.

Pro představu i použití však stačí mít na mysli jen intervaly a body, snad někdy jejich konečná sjednocení.

Jestli je v měření délek, ploch a objemů nějaký zásadní problém, objevuje se už v $\mathbb{R}$. A on tam opravdu je ;-)

Jak postupovat při měření velikosti množin v rovině?

Množina se rozřeže rovnoběžnými řezy na úzké proužky, které se dají při jejich velmi malé šířce považovat za obdélníky a lze tedy spočítat jejich obsah.

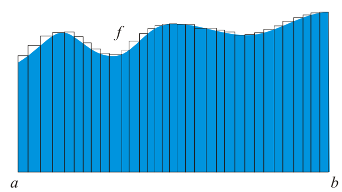


Sečtením ploch těchto obdélníků se dostane zhruba obsah obrazce.

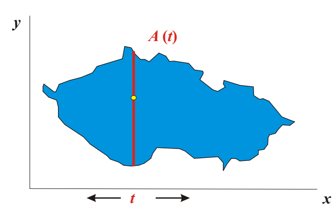
Rozřezáním množiny na proužky a sečtením obsahů obdélníků aproximujících jednotlivé řezy se dostane zhruba míra množiny A.

Pokud se bude šířka obdélníků zužovat, bude výsledné číslo míru lépe vyjadřovat. V limitě, tj. pro nekonečně malou šířku obdélníků, se dostane hledaná míra.

Nepřipomíná to Riemannův přístup definice integrálu?



Označí-li se $A(t)$ míra průniku množiny A s kolmicí na osu x v bodě t, pak se může $\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,\mathrm{d}x$ považovat za míru množiny A, pokud vše použité rozumně existuje.



Bod t si pobíhá po reálné ose s "množinometrem", který mu hlásí míru řezu.

To dává smysl pro velmi obecné množiny.

Pro pochopení stačí se omezit na jednodušší množiny určené křivkami, jako např. množiny bodů ležící mezi grafy dvou funkcí nebo vnitřky uzavřených křivek.

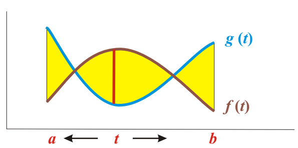
Navíc jen takové, že použité řezy jsou intervaly a body (možná někdy jejich sjednocení).

Je-li $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a,b]$, je podle předchozího postupu obsahem množiny $\{(x,y); x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, což je v souladu s dřívějším popisem Newtonova integrálu.

Obsah množiny bodů ležících mezi grafy dvou spojitých funkcí f, g na intervalu $[a,b]$ je

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože nebyla uvedena žádná definice obsahu rovinného obrazce, lze poslední rovnost chápat jako definici obsahu uvedených množin.



Pro množinu určenou parametricky zadanou křivkou ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in (a,b)$) se použije předchozí vzorec $P = \int_a^b y\,\mathrm{d}x (= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x)$ a dostane se

$$P = \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Všimněte si, že jsme do integrálu dosadili $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, což je "zderivovaná verze" $x = \varphi(t)$.

Já ty dé-iks miluju.

Vzorec

$$P = \left| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \right|$$

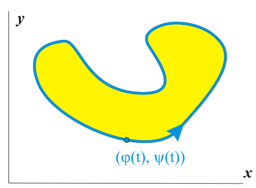
vyjadřuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a intervalem na ose x, který obsahuje průmět křivky. Absolutní hodnotou odstraníme možné záporné znaménko.

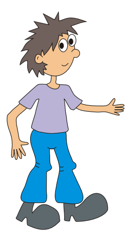
Některé části jsou však brány se záporným znaménkem a odečítají se! To nastane na intervalu, na kterém je φ klesající a ψ kladná nebo φ rostoucí a ψ záporná (viz *Poznámky*).

Je-li grafem jednoduchá uzavřená křivka (pro přesnou definici viz kapitolu 22), udává vzorec

$$P = \left| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \right|$$

obsah vnitřku této křivky.



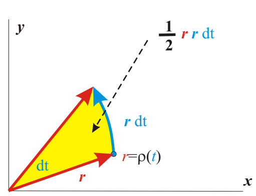


Šla by udělat elipsa otevřená, nebo je vždy uzavřená?

U polárně zadaných křivek ($r = \rho(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$) je proměnnou úhel a hodnotou vzdálenost bodu od počátku.

Při velmi malé změně dt úhlu t změna r vyplní „křivý" trojúhelník s vrcholem v počátku, úhlem při vrcholu rovným dt a výškou z počátku na protilehlou stranu rovnou r.

Velikost protilehlé strany je, pro velmi malý úhel dt, rovna $r\,\mathrm{dt}$.

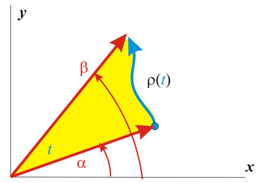


Obsah vzniklého trojúhelníka je tedy roven $(1/2)\,\cdot r\ \cdot r\,\mathrm{d}t$.

Součet všech těchto obsahů, tj. integrál

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{pro } 0 \le \alpha < \beta \le 2\pi\,,$$

určuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a přímkami procházejícími počátkem a svírajícími s kladnou částí osy x úhly α, β, resp.

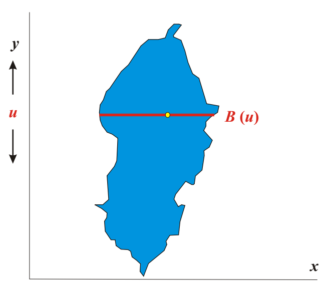


Je-li $\beta > \alpha + 2\pi$, počítají se některé části plochy vícekrát!

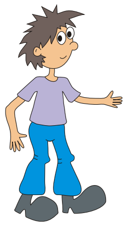
Míra množiny A by samozřejmě neměla záviset od jejího posunutí nebo otočení.

Nezávislost předchozího přístupu na posunutí se ukáže snadno (viz *Otázky*).

Pro otočení je to složitější. Speciálním případem otočení (o 90^o) je postup, kdy se vezme projekce A na osu y a použijí se míry $B(u)$ řezů rovnoběžných s osou x, tj. průniku A s kolmicí na osu y v bodě u.



I když otočíme republiku doleva nebo doprava, nezvětší se.



To si raději přepočítám.

To znamená, že integrál

$$P_y = \int_c^d B(u)\mathrm{du}$$

by se měl rovnat integrálu

$$P_x = \int_a^b A(t)\mathrm{dt}$$

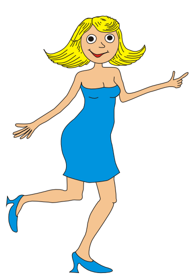
Pro množiny, používané v této části to opravdu platí (je to speciální případ tzv. Fubiniovy věty).

Poznámky 1:

1. Měření délek v $\mathbb{R}$. Je přirozené, že míra sjednocení dvou (nebo konečně mnoha) disjunktních intervalů je součet jejich délek. Může to být vhodné i pro protínající se intervaly (otevřené, uzavřené)?

Předchozí úvaha se dá zobecnit: míra sjednocení spočetně mnoha disjunktních intervalů je součet jejich délek.

Má smysl na $\mathbb{R}$ uvažovat případ nespočetného systému disjunktních intervalů?



To znamená, že velikost spočetné množiny je vždy nula.

S tím, že každá spočetná množina je v jistém smyslu nulová, jste se setkali v kapitole o obecném integrálu.

Opravdu, tyto nulové množiny mají míru rovnou nule a tedy existují nespočetné množiny (např. Cantorova množina), které mají míru rovnou nule.

2. V definici obsahu rovinné množiny se může integrovat přes libovolný interval obsahující průmět množiny a krajní body intervalu lze odebrat.

Řezy lze také brát bez krajních bodů (předpokládáme podle předchozí části, že řezy jsou intervaly či body, nebo jejich sjednocení).

V úvodní kapitole o funkcích více proměnných budou definovány otevřené podmnožiny roviny a prostoru. Právě tyto množiny (případně s přidanou hranicí) jsou nejvhodnější pro interpretaci obsahu pomocí integrálu.

3. Je vhodné si uvědomit, že i pro „hezké" množiny A nemusí být funkce $A(t)$ spojitá. Nicméně, bude mít za body nespojitosti jen skoky a bude mít vždy K-primitivní funkci.

Aby měl integrál použitý pro popis míry smysl, měly by být míry $A(t)$ řezů konečné.

Nebylo však řečeno, jaký integrál se používá. Pokud Newtonův, pak všechny řezy musí mít konečnou míru. Pokud použijete K-integrál, pak na nulové množině mohou mít řezy nekonečnou míru (proč?). Pokud budou mít nekonečnou míru na nenulové množině, lze chápat míru množiny A jako nekonečnou.

Předchozí odstavec byl vlastně jen teoretický. V praxi jsou množiny A omezené, výjimečně neomezené, ale pak jsou „hezky" složené z omezených množin.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Spočtěte obsah elipsy a to jak pomocí jejího implicitního vyjádření $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, tak pomocí parametrického vyjádření $x = a\cos t, y = b\sin t$.

2. Spočítejte obsah kruhu pomocí polárního vyjádření $\rho = r$.

3. Spočtěte míru množiny $\{(x,y); y \geq 0, x-2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Použijte oba možné postupy (řezy kolmé na osu x, resp. na osu y).

4. Pro parametrické vyjádření kružnice o středu v $(0,r)$ a poloměru r lze vzít $x = r\sin t, y = r(1+\cos t), t \in [0,2\pi]$. Pro $t \in [0,\pi/2]$ je sin rostoucí a s rostoucím t v tomto intervalu jdete po horní polokružnici po směru hodinových ručiček od bodu $(0,2r)$ k bodu (r,r) a příslušný integrál popisuje plochu pod touto čvrtkružnicí (k ose x).

Pro $t \in [\pi/2,\pi]$ je sin klesající a s rostoucím t v tomto intervalu jdete po horní polokružnici po směru hodinových ručiček od bodu (r,r) k bodu $(0,0)$ a příslušný integrál popisuje plochu pod touto čvrtkružnicí (k ose x). Vzhledem k proměnné x se integruje od r k 0 a tedy se ona plocha odečítá. Výsledkem na intervalu $t \in [0,\pi]$ je plocha pravého půlkruhu.

Dodělejte sami oběh bodu kolem celé kružnice.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že každý disjunktní systém intervalů v $\mathbb{R}$ je nejvýše spočetný.

2. Uveďte příklad neomezené otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$, která má konečnou míru.

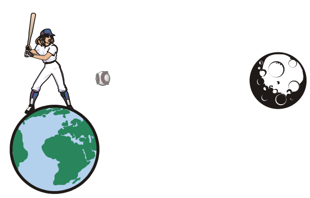
3. Ukažte, že míra μ některých podmnožin reálné přímky nezávisí na posunutí. Např., je-li $p \in \mathbb{R}$ a A interval nebo konečné sjednocení intervalů nebo spočetná množina, pak $\mu(A) = \mu(A + p)$.

4. Ukažte platnost předchozího tvrzení pro zde použité speciální podmnožiny roviny, např. pro množiny určené křivkami.

Konec otázek 1.

Cvičení 1: Příklad. Jakou rychlostí musí odpálit pálkař, aby měl jistý "homerun"?

Řešení. Budeme chtít zjistit rychlost v_0 takovou, aby míč o hmotnosti m překonal přitažlivost Země a doletěl alespoň na Měsíc. Zanedbáme tření.



Proměnnou gravitační sílu po dráze k Měsíci musíme překonat kinetickou energií udělenou při startu.

Tedy spočítáme práci, kterou vykonáme proti gravitační síle F

$$\int_R^\infty F(r)\,\mathrm{dr}$$

a porovnáme s kinetickou energií při startu.

Podle gravitačního zákona je míč přitahován k Zemi silou F závisející na vzdálenosti r od Země

$$F(r) = c\frac{Mm}{r^2}\ ,$$

kde M je hmotnost Země a c je konstanta.

Označme R poloměr Země. Pak platí $F(R) = mg$, kde g je gravitační zrychlení. Tím se zbavíme konstanty c a máme

$$F(r) = mg\frac{R^2}{r^2}\,.$$

Pokud má míč vyletět nekonečně daleko, musí být jeho kinetická energie na počátku

$$\frac{1}{2}mv_0^2$$

alespoň rovna práci, kterou na jeho brždění vykoná gravitační síla Země

$$\int_R^\infty mg\frac{R^2}{r^2}\,\mathrm{dr} \;=\; \lim_{r\to\infty} mgR^2\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right) \;=\; mgR\,.$$

Tedy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \;=\; mgR\,,\;\; \text{čili} \;\; v_0 = \sqrt{2gR}\,.$$

Přibližně dostaneme rychlost odpalu $11,2$ km/s (pro konstanty $R = 6,37\cdot 10^6 m$, $g = 9,83 m\cdot s\check{\ }1$).

Už jsem viděl rychlejší odpaly.

Teď se naučíme měřit v rovině.

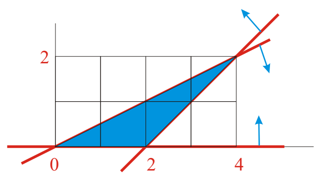
Bude stačit pravítko?

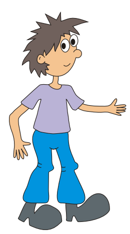
Ano.

Příklad. Spočtěte míru množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y \geq 0, \ y > x - 2, \ y < x/2\} \ .$$

Řešení. Jde o průnik tří polorovin. Při bližším zkoumání vidíme, že možinu A tvoří trojúhelník s vrcholy $(0,0), (2,0), (4,2)$.



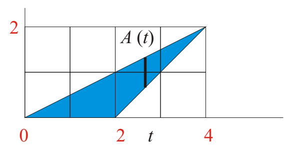


Dejte si pozor, tady se to bude řezat.

Jak na to půjdeme?

Míra množiny A se spočte integrací přes osu x, přičemž musíme zjistit míru řezů $A(t)$ odpovídajících libovolnému $t \in \mathbb{R}$.

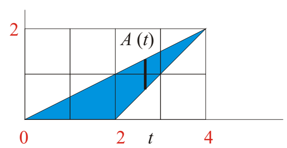
Pro některá t jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(t)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 4)$.



Na intervalu $(0, 2)$ je $A(t) = t/2$, protože řezem je interval $(0, t/2)$.
Na intervalu $(2, 4)$ je $A(t) = t/2 - (t - 2)$, protože řezem je interval $(t - 2, t/2)$.

Hledaná míra množiny A se rovná integrálu

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\,\mathrm{dt} \;=\; \int_0^2 A(t)\,\mathrm{dt} \;+\; \int_2^4 A(t)\,\mathrm{dt}\,.$$



Tedy

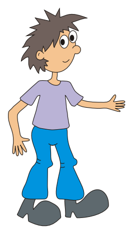
$$P_x = \int_0^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{dt} \;+\; \int_2^4 \left(\frac{t}{2} \;-\; t + 2\right)\,\mathrm{dt} \;= 1 + 1 = 2\,.$$

Jak se spočte to $A(t)$?

Jak vypadá pro dané t řez A_t se zjistí snadno. Dosadíme do definice množiny jako parametr t a je hotovo.

$$A_t = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2\,,\; y \geq 0,\; y > t - 2,\; y < t/2\}\,.$$

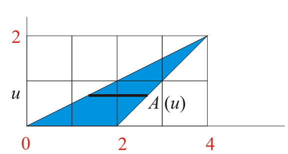
Řezem je úsečka, její míru umíme spočítat.



Dvakrát se integrovalo, to je normální?

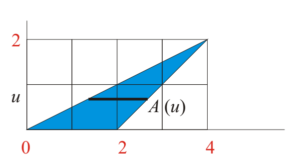
Ne, šikulové se tomu mohou vyhnout integrováním přes vodorovné řezy:

Míra množiny A se nyní spočte integrací přes osu y, přičemž musíme zjistit míru řezů $A(u)$ odpovídajících libovolnému $u \in \mathbb{R}$.



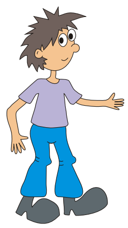
Pro některá u jde o prázdnou množinu, pro některá o interval. Funkce $A(u)$ je nenulová pouze na intervalu $(0, 2)$.

Na intervalu $(0, 2)$ je $A(u) = u + 2 - 2u$, protože řezem je interval $(2u, u + 2)$.



Hledaná míra množiny A se rovná integrálu

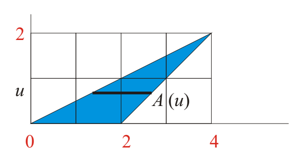
$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^2 A(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^2 (u + 2 - 2u)\,\mathrm{d}u \;=\; 2\,.$$



Jak se spočte to $A(u)$?

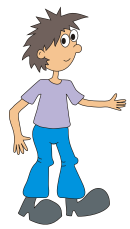
Jak vypadá pro dané u řez A_u se zjistí snadno. Dosadíme do definice množiny jako parametr u a je hotovo.

$$A_u = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2\,,\; u \geq 0,\; u > x - 2,\; u < x/2\}\,.$$



Řezem je úsečka, její míru umíme spočítat.

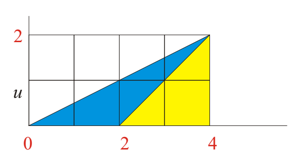
Při hledání velikosti řezů samozřejmě zjistíme i to, které řezy se musí uvažovat při integrování.



To se prověří.

Do třetice spočítáme míru jako rozdíl dvou integrálů

$$\int_0^4 \frac{t}{2}\,\mathrm{dt} - \int_2^4 (t-2)\,\mathrm{dt} = 4 - 2 = 2\,.$$



To je síla.

Jak praví klasik: Na sta je podob integrování, způsoby je třeba volit.

Všimněte si, že se integruje od jedné funkce do druhé. Při vodorovných a svislých řezech se jedná o jiné funkce.

A některé jsou potvory inverzní ;-)

Konec cvičení 1.

OBJEM NĚKTERÝCH TĚLES

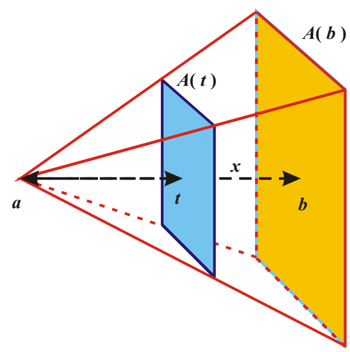
Stejně jako se počítal obsah dvoudimenzionálního (tj. rovinného) obrazce pomocí velikostí jednodimenzionálních řezů, počítá se objem trojdimenzionálního tělesa pomocí dvoudimenzionálních řezů.

Následující popis je opět vhodný pro velmi obecné podmnožiny $\mathbb{R}^3$, ale je lépe mít na mysli jen geometrická tělesa.

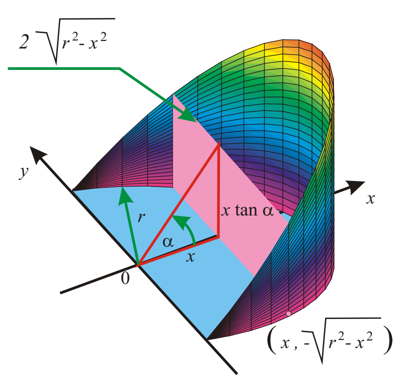
Nechť A je podmnožina prostoru $\mathbb{R}^3$, jejíž průmět na osu x leží v intervalu (a, b). Nechť pro každé $t \in (a, b)$ je $A(t)$ míra průniku množiny A s rovinou kolmou na osu x v bodě t. Pak míra množiny A je

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

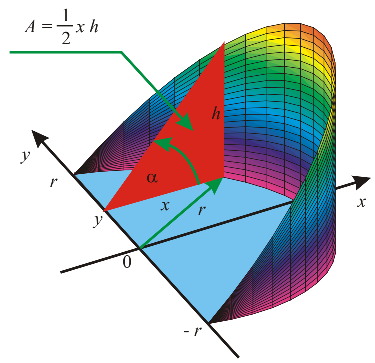
Nakloníme pyramidu a řežeme. Dostaneme čtvercové řezy. Pohoda.



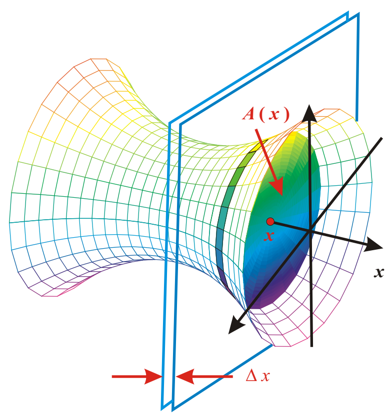
Kouzlo spočívá v tom, jak najít pěkné řezy.



Podobně jako u rovinných obrazců je i v prostoru někdy vhodnější použít místo osy x jinou osu. Fubiniova věta opět tvrdí, že se pro hezké množiny dostane stejný výsledek.



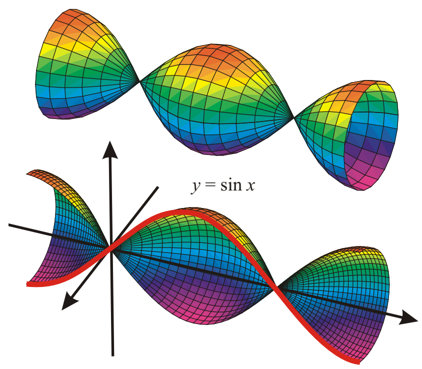
Je-li A rotační těleso, je počítání objemu jednodušší, protože je snadné spočítat plochu příslušných řezů (tj. kruhů).



Nechť těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x. Pak jeho objem je dán vzorcem

$$V = \pi \int_a^b y^2 \,\mathrm{dx} = \pi \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{dx} \,.$$

Je vidět ze vzorce i z geometrického pohledu, že nezáleží na tom, jestli má funkce kladné i záporné hodnoty.



Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$), dostane se dosazením za x, y do vzorce

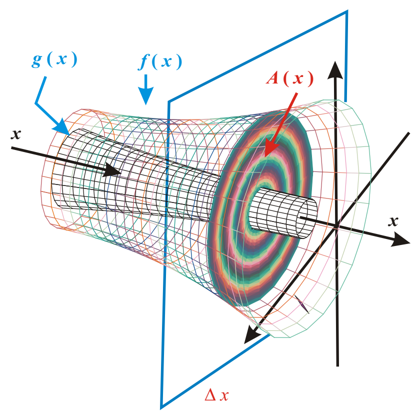
$$V = \pi \int_a^b y^2 \, \mathrm{dx} = \pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{dx} \, .$$

parametrický tvar

$$V = \pi \int_a^b \psi^2(t) \varphi'(t) \, \mathrm{dt} \, .$$

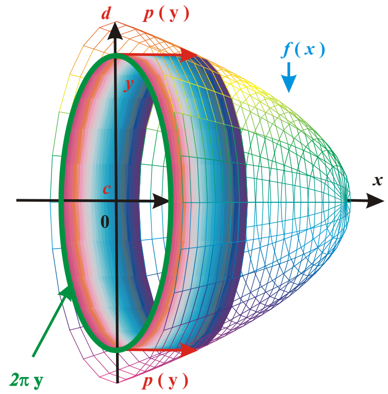
Má-li rotační těleso „díru", tj, vznikne rotací okolo osy x plochy ležící mezi grafy funkcí $|g| \leq |f|$, odečte se od objemu pro funkci f objem pro funkci g:

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \, \mathrm{dx} \, .$$



Uvedenému postupu pro získání předešlých vzorců se říká metoda disků nebo mezikruží a je odvozen z postupu pro objem obecných těles.

Pro rotační tělesa lze zvolit i jiný postup, tzv. metodu válců, kdy těleso chápeme jako sjednocení tenkých válců s osou stejnou jako je rotační osa tělesa.



Nechť těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x. Pak jeho objem je dán vzorcem

$$2\pi \int_0^d y\, p(y)\,\mathrm{dy}\,,$$

kde d je maximum funkce $|f|$ na (a, b) a $p(t)$ je délka průniku přímky $y = t$ s množinou $\{(x, y); 0 \le y \le |f(x)|\}$.

Výraz $2\pi y p(y)$ je povrch válcovitého řezu o výšce $p(y)$ a poloměru y.

Slyšel jsem správně: 2 pípy?

Z předchozích postupů byste měli snadno odvodit vzorce pro objemy těles vzniklých rotací nějaké jednodušší plochy kolem osy y nebo kolem přímky rovnoběžné s nějakou osou.

„Sčítají" se obsahy mezikruží, jejichž poloměry jsou určené vzdálenostmi hranice k ose rotace.

Poznámky 2:

1. Pokud si zapamatujete obecný popis objemu tělesa („součet" příslušných řezů), snadno a rychle odvodíte ostatní uvedené vzorce. Není pak nutné si tyto vzorce pamatovat. Navíc uvedený popis umožní spočítat i objemy nestandardních těles.

2. Není jednoduché dokázat rovnost integrálů pro objem rotačních těles získaných metodou disků a metodou válců.

Ve vzorci získaném metodou válců se samozřejmě může vzít za horní mez jakékoli číslo větší nebo rovno maximu $|f|$. Proč se nemůže vzít za integrační meze krajní body f-obrazu intervalu (a, b)?

Pro podobný vzorec rotačního tělesa s dírou (viz *Otázky*) určenou funkcí g se místo 0 může za dolní mez vzít jakékoli číslo menší nebo rovné minimu funkce $|g|$.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Spočtěte podle integrálního popisu objemu tělesa objem jehlanu (umístěte jehlan vhodně do souřadnic; nejlépe tak, že výška leží na ose z a podstava v rovině x, y).

2. Spočtěte objem průniku válců $x^2 + y^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$.

Vhodné je vzít řezy kolmé na osu y.

3. Spočtěte objem rotačního elipsoidu vyjádřeného implicitně i parametricky a metodou disků i metodou válců.

4. Spočtěte objem anuloidu, což je těleso vzniklé rotací kruhu (mapř. o poloměru a) kolem osy disjunktní s kružnicí (tj. ve vzdálenosti $b > a$ od středu kružnice).

Opět je prvním krokem vhodné umístění situace do souřadnicových os.

5. Spočtěte objem rotačního tělesa vzniklého rotací omezené plochy mezi grafy funkcí x, x^2 okolo osy y.

6. Spočtěte objem rotačního tělesa vzniklého rotací omezené plochy mezi grafy funkcí $\sqrt{x}, x = 4, y = 1$ okolo přímky $y = 1$.

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Odvoďte metodou válců vzorec pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x, y); g(x) \leq y \leq f(x), x \in (a, b)\}$ kolem osy x.

2. Odvoďte vzorce pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x, y); g(x) \leq y \leq f(x), x \in (a, b)\}$ kolem osy y. Předpoládejte, že f, g jsou rostoucí funkce.

3. Odvoďte vzorce pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací množiny $\{(x, y); g(x) \leq y \leq f(x), x \in (a, b)\}$ kolem přímky $y = a$.

Konec otázek 2.

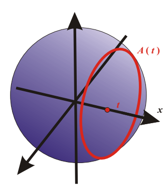
Cvičení 2: Příklad. Spočteme objem koule.

Řešení. Zvolíme jednotkovou kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 .$$

Budeme řezat rovinami kolmými k ose x.

Takto získáme kruhové řezy.



K danému t je řezem množina

$$y^2 + z^2 \leq r^2 - t^2 .$$

Jde vlastně o kruh s poloměrem

$$\sqrt{r^2 - t^2} .$$

Tedy $A(t) = \pi(r^2 - t^2)$ a tedy objem spočteme

$$\int_{-r}^{r} A(t)\ \mathrm{d}t \ = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - t^2)\ \mathrm{d}t \ = \left[\pi\left(r^2\, t - \frac{t^3}{3}\right)\right]_{-1}^{1} \ = \frac{4}{3}\,\pi r^3 .$$

Integrování je pohoda.

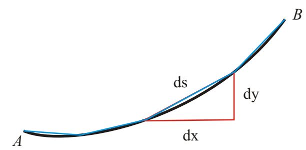
Konec cvičení 2.

DÉLKA ROVINNÝCH KŘIVEK

Délka L nějaké křivky (čáry) z bodu A do bodu B se zjistí sečtením jejích velmi malých úseků ds, které je možné považovat za úsečky, tj.

$$L = \int_A^B \mathrm{d}s\,.$$

Úsečka ds je přeponou pravoúhlého trojúhelníka se stranami dx a dy.



Aproximujeme křivku po částech úsečkami. A limitíme.

Tedy je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Základní vztah pro vyjádření ds.

Podle zadání křivky (jako funkce, parametricky, polárně) se za y nebo x dosadí příslušné funkce a dostane se

1. $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$, je-li $y = f(x), x \in (a, b)$;
2. $L = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$, je-li $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a, b)$;
3. $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\,\mathrm{d}t$, je-li $r = \rho(t), t \in (\alpha, \beta)$.

Poznámky 3:

1. Podle uvedeného vzorce lze počítat délky křivek zadaných funkcemi, pokud příslušný integrál existuje. Délku křivky lze však definovat obecně bez použití integrálu jako supremum délek lomených čar,

jejichž body lomu leží na dané křivce. Zkuste naznačit postup, jak dokázat ekvivalenci této definice s naší definicí pro hezké křivky.

2. Stejně jako u obsahu a objemu není ani u vzorce pro délku křivky stanoveno, jaký integrál se má použít.

V některých případech nelze použít Newtonův integrál, protože derivace $f'(x)$ ve vzorci nemusí ve všech bodech existovat.

V těchto případech je možné buď použít obecnější integrál (J-integrál obvykle stačí) nebo rozdělit zkoumaný interval na části, kde lze Newtonův integrál použít, nebo někdy lze použít inverzní funkce, tj. dívat se na křivku jako na graf funkce $x = f^{-1}(y)$.

3. Existují křivky, ležící např. v jednotkovém kruhu, které mají nekonečnou délku.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Spočtěte délku kružnice pomocí implicitního, parametrického i polárního vyjádření.

2. Spočtěte délku spirály $r = e^{3t}$ pro $t \in [0, 8]$.

3. Napište integrál pro délku grafu funkce $\sqrt[3]{x}$ na intervalu $[-1, 8]$.

Pozor na bod 0. Zkuste v tomto případě použít graf inverzní funkce.

Získaný integrál nepočítejte – víme proč?

4. Spočtěte délku smyčky křivky zadané parametricky jako $x = t^2, y = t^3/3 - t$.

Zjistěte nejdříve hodnoty parametru pro které se křivka protne.)

Konec příkladů 3.

Cvičení 3:

Příklad. Spočtěte délku úsečky z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 1)$.

Řešení. Jde o graf funkce

$$y = f(x) = 1 - x$$

na intervalu $[0, 1]$.

Podle vzorečku dostaneme pro délku vztah

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \;=\; \int_0^1 \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx \;=\; \sqrt{2}\,.$$

Zdá se, že vzorečky fungují.

Můžeme použít parametrický zápis grafu pomocí funkcí

$$x = \sin^2 t\,,\; y = \cos^2 t$$

pro $t \in [0, \pi/2]$.

Pak bude délka vyjádřena pomocí

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\right)^2}\;\mathrm{dt} \;&=\; \int_0^{\pi/2} \sqrt{8\sin^2 t\cos^2 t}\;\mathrm{dt} \;=\\ &=\; \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\cdot 2\sin t\cos t\;\mathrm{dt} \;=\; [\sqrt{2}\sin^2 t]_0^{\pi/2} \;=\; \sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Nic jiného jsem nečekal.

Ještě polárně pro otrlé:

Úsečku popíšeme polární formulkou

$$r = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} \; .$$

Počítač spočítá za nás primitivní funkci

$$\int \sqrt{(\sin(t) + \cos(t))^{-2} + \frac{(\cos(t) - \sin(t))^2}{(\sin(t) + \cos(t))^4}} dt \; \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \; (\sin(t) + \cos(t))\sqrt{2}\sqrt{\left(-4\,(\cos(t))^4 + 4\,\sin(t)\cos(t) + 4\,(\cos(t))^2 + 1\right)^{-1}} \sin(t) \; .$$

A tedy díky počítačům dostaneme zase $\sqrt{2}$.

Příklad. Spočtěte obvod kruhu o poloměru r.
Řešení. Můžeme použít parametrický zápis pomocí funkcí

$$x = r\sin t \; , \; y = r\cos t$$

pro $t \in [0, 2\pi]$.
Pak bude délka vyjádřena pomocí

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\right)^2} \;\mathrm{dt} \;=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} \;\mathrm{dt} \;=\; \int_0^{2\pi} r \;\mathrm{dt} \;=\; [tr]_0^{2\pi} \;=\; 2\pi r \; .$$

Polárně to půjde ještě snadněji.
Pro jednotkový kruh je $r = 1$ a tedy

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + 0^2}\, dt \;=\; 2\pi \; .$$

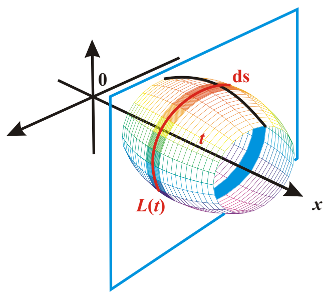
Vřele doporučuji :-)

Konec cvičení 3.

POVRCH ROTAČNÍCH TĚLES

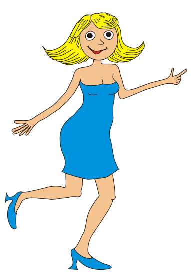
Podobně jako se odvodil obsah z délky nebo objem z obsahu, dá se odvodit povrch tělesa z délky křivky.

Těleso se protne rovinou kolmou např. na osu x v bodě t a spočte se délka $L(t)$ křivky ohraničující vzniklý rovinný obrazec. Tuto křivku lze považovat za úzký pás se šířkou ds. Všechny tyto pásky dají dohromady povrch S daného tělesa.



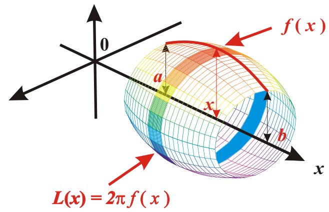
Pro šířku ds se použijí výrazy z předchozí části o délce křivek a dostane se:

$$S = \int_a^b L(x)\,\mathrm{ds} = \int_a^b L(x)\sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2} = \int_a^b L(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$



Pozor, ty integrály jsou při počítání opravdu nepříjemné.

Pro rotační tělesa je opět jednoduché spočítat délky $L(t)$ kružnic.



Jestliže těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a, b) kolem osy x, pak je jeho povrch dán vzorcem

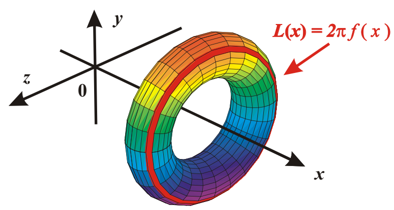
$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x\,,$$

Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t), y = \psi(t)$,
$t \in (a, b)$), použije se vzorec

$$2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

V případě polárně zadané křivky ($r = \rho(t), t \in (\alpha, \beta)$):

$$2\pi \int_\alpha^\beta \rho(t) \sin(t) \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$



Poznámky 4:

V *Příkladech* jsou uvedeny dva příklady na spočítání povrchu útvaru, který se nezískal rotací křivky. Je to útvar složený z úseček postavených na nějaké křivce v rovině. Pak povrch je „součtem" délek d_s těchto úseček podél křivky v rovině, tj. $\int_a^b d_s \mathrm{ds}$, kde ds je obvyklý malinký dílek křivky.

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. Spočtěte povrch koule.

2. Spočtěte povrch anuloidu vzniklý otáčením kružnice o poloměru a, jejíž střed je vzdálen od osy otáčení $b > a$.

3. Rotací okolo osy x grafu funkce $1/x$ na intervalu $[1, +\infty)$ vznikne útvar, který má nekonečný povrch a konečný objem. Ověřte.

4. Mějte pecen chleba tvaru koule. Ukažte, že všechny krajíce stejné tloušťky mají stejné množství kůrky.

5. Mějte plot postavený na grafu funkce $2\sqrt{x}$, jehož výška v bodě $(x, 2\sqrt{x})$ má výšku $2\sqrt{x}$. Kolik materiálu se spotřebuje na plot pro $0 \leq x \leq 2$?

6. Spočítejte povrch zdi postavené na kružnici o poloměru 2, která začíná v některém bodě kružnice a jejíž výška ve vzdálenosti s od tohoto bodu po oblouku kružnice je $3s$.

Konec příkladů 4.

Cvičení 4:

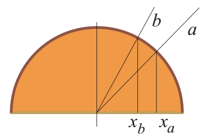
Příklad. Mějte pecen chleba tvaru koule. Ukažte, že všechny krajíce stejné tloušťky mají stejné množství kůrky.

Řešení. Budeme zkoumat povrch koule o poloměru R.

Uvažujme, že tento povrch vznikl rotací kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ okolo osy x.

Popíšeme kružnici parametricky $x = \varphi(t) = R\cos t$, $y = \psi(t) = R\sin t$, $t \in (0, 2\pi)$.

Krajíc odpovídá jistému intervalu $(a, b) \subset (0, \pi)$. Uvažujeme krajíce vzniklé ukrojením pomocí roviny kolmé k ose x.



Pro výpočet povrchu vzniklého rotací se použije vzorec

$$2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

Dostaneme tedy

$$2\pi \int_a^b |R\sin t| \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2}\, \mathrm{d}t \;=\; 2\pi R^2 \int_a^b |\sin t|\, \mathrm{d}t\;.$$

Zkusíme pro jednoduchost krajíce $(a, b) \subset (0, \pi/2)$. Pak dostaneme

$$2\pi R^2 \int_a^b \sin t\, \mathrm{d}t \;=\; 2\pi R(R\cos a - R\cos b) \;=\; 2\pi R(x_a - x_b)\,,$$

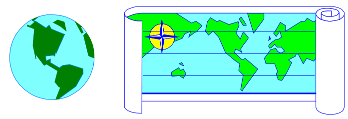
kde $x_a = R\cos a$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá první straně krajíce (pro $t = a$), podobně $x_b = R\cos b$ je bod na intervalu $(0, R)$, který odpovídá druhé straně krajíce (pro $t = b$).

Podobně lze zpracovat i interval $(\pi/2, \pi)$.

Výsledkem je, že kůrka na krajíci je rovna $2\pi R$ krát tloušťka $x_a - x_b$.

BTW, celý pecen má tedy povrch $4\pi R^2$. To je tolik, jako má veliký povrch opsaný válec.

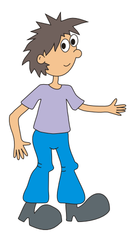
Tedy, když zapřemýšlíme ještě trošku, válcové mapy zemského povrchu ukazují přesně rozlohy jednotlivých území.



Určitě šlo použít i jiný popis povrchu koule a tedy jiné vzorečky.

V případě polárně zadané křivky ($r = \rho(t) = R,\ t \in (\alpha, \beta)$):

$$\begin{aligned} 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(t)\sin(t)\sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad &= \quad 2\pi \int_\alpha^\beta R\sin(t)\sqrt{R^2 + 0^2}\,\mathrm{d}t \ = \\ &= \quad 2\pi R^2 \int_\alpha^\beta \sin(t)\,\mathrm{d}t \ = 2\pi R^2(\,\cos\alpha - \cos\beta\,)\ . \end{aligned}$$



Naštěstí je to stejné.

Konec cvičení 4.

FYZIKÁLNÍ APLIKACE

Použití integrálu ve fyzice je velmi mnohostranné.

V této kapitole bude uvedeno jen několik základních aplikací v mechanice.

V pozdějších kapitolách budou při různých příležitostech uvedeny další aplikace integrálu ve fyzice.

POHYB

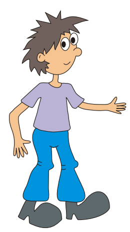
Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t, je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t.

Umíte to vysvětlit?

Je-li tedy dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu.

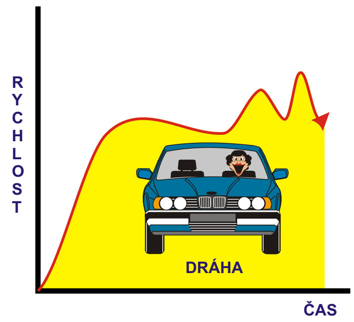


???

Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte integrálem

$$\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

SORRY ;-)



TĚŽIŠTĚ

Zhruba řečeno, soustředí-li se do těžiště tělesa hmotnost celého tělesa, pak (tíhové) momenty (vzhledem k nějakým osám) těžiště a celého tělesa se rovnají.

Podobně jako u výpočtu velikosti množin je i u zjišťování těžiště vhodné začít u jednodimenzionálních objektů (tj. drátů) a postupně zvyšovat dimenzi.

Vzhledem k pozdějšímu snadnějšímu přístupu pomocí integrálu funkcí více proměnných a plošných integrálů bude zvyšování dimenze ukončeno u rovinných desek.

Tenký drát se bude v následujícím postupu považovat za křivku. Drát nemusí být homogenní a jeho hustota je daná nějakou funkcí h.

Nejjednodušší je případ, kdy drát je rovný – pak ho lze umístit na kladnou osu x s jedním koncem do počátku a druhým do bodu d, kde d je délka drátu. Hustota h je funkce definovaná na intervalu $[0, d]$.

Hmotnost M drátu se spočte „sečtením" hmotností $h(x)\,\mathrm{d}x$ malinkých dílků dx a je tedy rovna $\int_0^d h(x)\,\mathrm{d}x$.

Těžiště zřejmě bude ležet na ose x, řekněme v bodě T. Podle úvodního vysvětlení musí být moment drátu roven momentu těžiště, což je $T.M$ (počítá se moment vzhledem k počátku).

Moment drátu se spočítá podobně jako hmotnost „sečtením" momentů všech bodů a tedy se rovná $\int_0^d xh(x)\,\mathrm{d}x$. Odtud vyplývá vzorec pro těžiště:

$$T = \frac{\int_0^d xh(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^d h(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Nechť je nyní drát zahnutý, např. je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b). V bodě $(x, f(x))$ má drát hustotu $h(x)$.

Hmotnost M drátu se opět spočte „sečtením" hmotností jednotlivých dílků ds a je tedy rovna $\int_a^b h(x)\,\mathrm{ds} = \int_a^b h(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}$.

Nechť má těžiště souřadnice (T_x, T_y) a má hmotnost M. Jeho momenty vzhledem k osám x, y budou momenty drátu vzhledem k těmto osám.

Moment M_x drátu vzhledem k ose x je součet momentů jednotlivých dílků, tj. $\int_a^b y h(x)\,\mathrm{ds} = \int_a^b f(x)h(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}$.

Moment M_y vzhledem k ose y je roven $\int_a^b xh(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}$.

Porovnáním momentů M_x a M_y se dostanou vzorce

$$T_x = \frac{\int_a^b xh(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}}{\int_a^b h(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}}\,, \quad T_y = \frac{\int_a^b f(x)h(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}}{\int_a^b h(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}}\,.$$

Vzorec pro parametricky zadané křivky se získá standardním způsobem: za x, y se dosadí příslušné parametrické funkce φ, ψ.

Pozor! Zkusíme dráty s konstantní hustotou.

Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost drátu rovna jeho délce L.

Vynásobíte-li vzorec pro T_y jmenovatelem a dále číslem 2π, dostanete

$$2\pi T_y.L = S\,,$$

kde S je povrch rotačního tělesa vzniklého rotací drátu okolo osy x.

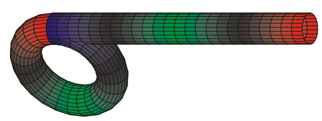
Uvedená rovnost říká, že tento povrch je rovný ploše válcové plochy o poloměru T_y a výšce L.

Zhruba lze říci, že je délka křivky soustředěna v těžišti a to obíhá kolem osy x.

Tomuto vzorci se někdy říká *Guldinovo pravidlo* pro rotační plochy:

VĚTA. Plocha rotačního tělesa vytvořeného rotací rovinné křivky C kolem přímky p je rovna násobku délky křivky C a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky C od p.

Ukázka rotační plochy a jejího rozvinutí pomocí Guldinova pravidla.



Tenkou rovnou desku (např. plech) je možné pokládat za množinu v rovině, na kterém je definována funkce $h(x,y)$ udávající hustotu v bodě (x,y).

Při výpočtu těžiště desky lze postupovat stejně jako u výpočtu těžiště drátu.

Zatím však není definován integrál přes množiny v rovině a tak je nutné postup rozdělit. Výpočet hmotnosti je podobný výpočtu plochy. Udělají se řezy desky kolmé např. na osu x a zjistí se jejich hmotnosti a ty se pak „sečtou".

Je-li deska např. množinou bodů ležících mezi grafy dvou funkcí ($\{(x,y); x \in (a,b), g(x) \le y \le f(x)\}$) a hustota je dána funkcí $h(x,y)$, pak hmotnost M je rovna

$$M = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

Vnitřní integrál udává hmotnost řezu určeného kolmicí v bodě x a vnější integrál je všechny „sčítá".

Stejným způsobem se určí momenty desky vzhledem k osám x, y: určí se moment vzhledem k ose x řezu desky kolmého na osu x a tyto momenty se „sečtou".

Dostane se

$$M_x = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} y h(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

a podobně se vypočte M_y.

Pro těžiště se tedy získají vzorce

$$T_x = \frac{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} x h(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}}{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}}\,, \quad T_y = \frac{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} y h(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}}{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}}$$

.

Odvodíme další pravidlo:

Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost desky rovna jeho obsahu P.

Podobně jako u drátu se úpravou vzorce pro T_y dostává

$$2\pi T_y.P = 2\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))/2 \,\mathrm{d}x = V$$

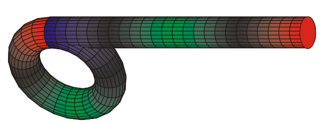
kde V je objem rotačního tělesa vzniklého rotací plechu okolo osy x.

Podobně jako u plochy rotačního tělesa je tedy i objem počítán jako by byla základní plocha, která rotuje, soustředěna do těžiště a to obíhalo kolem osy x.

Tomuto vzorci se někdy říká *Guldinovo pravidlo* pro rotační objemy:

VĚTA. Objem rotačního tělesa vytvořeného rotací rovinné množiny A kolem přímky p, neprotínající množinu A, je rovna násobku obsahu množiny A a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny A od p.

Ukázka rotačního tělesa a jejího narovnání pomocí Guldinova pravidla.



SÍLA, PRÁCE

Klasický vzorec $W = Fd$ vypočítává práci W vykonanou působením síly F po dráze délky d (síla působí ve směru dráhy).

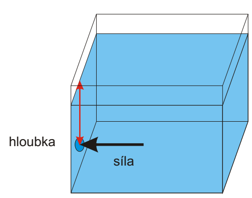
Jestliže se velikost síly v jednotlivých bodech dráhy mění, je nutné použít integraci.

Nechť ve směru osy x působí síla velikosti $F(x)$ v bodě x. Její práce na úseku dx je rovna $f(x)\,\mathrm{dx}$ (na tak malém úseku lze považovat sílu za konstantní).

Celková práce vykonaná na intervalu $[a, b]$ působením této síly je tedy

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Je-li deska ponořena kolmo do kapaliny, působí na malý dílek dx desky hydrostatická síla $hx\,\mathrm{dx}$ (z jedné strany desky), kde h je hustota kapaliny a x je vzdálenost dílku od hladiny kapaliny.



Je-li $l(x)$ délka množiny bodů desky, které jsou všechny vzdálené x od hladiny, je hydrostatická síla působící na tuto množinu rovna $hxl(x)\,\mathrm{dx}$ a celková hydrostatická síla působící na jednu stranu desky je tedy $\int_a^b hxl(x)\,\mathrm{dx}$, kde a, b jsou nejmenší, resp. největší, vzdálenosti bodů desky od hladiny. Mění-li se hustota kapaliny s hloubkou, místo h se píše $h(x)$.

Podobným způsobem lze používat integrály i v dalších situacích, všude, kde nejsou používané funkce konstantní a např. mění se s časem. Může to být i výpočet šíření chorob nebo toku financí apod.

Příklady 5:

1. Nechť se bod pohybuje po přímce rychlostí $5\pi\cos(\pi t)$ m/sec v čase t. Zjistěte změnu polohy body od $t = 0$ do $t = 1$ sec nebo do $t = 3/2$ sec. Jakou vzdálenost bod urazil za první sekundu?

2. Ukažte, že homogenní tyč má těžiště uprostřed.

3. Najděte těžiště tyče o délce 5m, která má hustotu $(1 + x/5)$ kg/m, kde x je vzdálenost od jednoho zvoleného konce tyče.

4. Najděte těžiště polokružnice o poloměru r. Totéž pro nehomogenní drát tvaru polokružnice $x = r\cos t, y = r\sin t, t \in [0, \pi]$, s hustotou $h(t) = t$.

5. Najděte těžiště polokruhu o poloměru r.

6. Najděte těžiště desky omezené křivkami $y^2 = 8x$ a $x = 2$ s hustotou v bodě (x, y) úměrnou $|y|$.

7. Kolik práce se vykoná stlačením péra z 2m na 1,5m, je-li konstanta péra rovna 10? (Použijte Hookeův zákon $F = -kx$, kde F je síla, k je konstanta péra a x je příslušná dráha.)

8. Kolik práce je potřeba k vypumpování vody z plné nádrže tvaru polokoule o poloměru 3m umístěné vrcholem dolů do výšky 2m nad horní část nádrže?

9. Dvacetilitrovou nádobu těžkou 2kg naplníte vodou a vytáhnete na laně (1m lana váží 1kg) do výšky 20m stálou rychlostí 4m/sec. Nádoba je děravá a nahoru vytáhnete jen 10l vody. Jakou práci vykonáte?

10. Jaký hydrostatický tlak působí na jednu stranu desky tvaru lichoběžníka ponořenou svisle do vody s horní hranou 4m pod hladinou? Lichoběžník má spodní stranu dlouhou 8m, horní stranu 6m a výšku rovnou 6m.

Konec příkladů 5.

Cvičení 5:

Příklad. Najděte těžiště homogenního drátu ohnutého do tvaru půlkružnice.

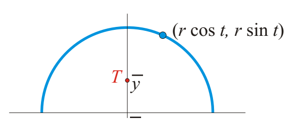
Řešení. Připomeňme, že souřadnice $(\bar{x}, \bar{y})$ těžiště drátu jsou určeny vzorečkem

$$\bar{x} = \frac{\int x \,\mathrm{dm}}{\int 1 \,\mathrm{dm}} , \ \bar{y} = \frac{\int y \,\mathrm{dm}}{\int 1 \,\mathrm{dm}} .$$

Zde dm odpovídá integraci podle hmotnosti, která je při hustotě h odvozena od ds vzorečkem $\mathrm{dm} = h\mathrm{ds}$.

Parametrický popis drátu zvolíme

$$x = r\cos t \ , \ y = r\sin t \ .$$



Pak

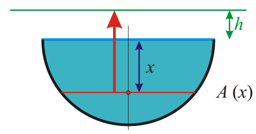
$$\bar{x} = \frac{\int x \, \mathrm{dm}}{\int 1 \, \mathrm{dm}} = \frac{\int_0^\pi r\cos t \cdot h \cdot r \, \mathrm{dt}}{\int_0^\pi h \cdot r \, \mathrm{dt}} = \frac{hr^2[\sin t]_0^\pi}{hr[t]_0^\pi} = 0 \, .$$

Podobně

$$\bar{y} = \frac{\int y \, \mathrm{dm}}{\int 1 \, \mathrm{dm}} = \frac{\int_0^\pi r\sin t \cdot h \cdot r \, \mathrm{dt}}{\int_0^\pi h \cdot r \, \mathrm{dt}} = \frac{hr^2[-\cos t]_0^\pi}{hr[t]_0^\pi} = \frac{2r}{\pi} \, .$$

Příklad. Kolik práce je potřeba k vypumpování vody z plné nádrže tvaru polokoule o poloměru $r = 3$ m umístěné vrcholem dolů do výšky $h = 2$ m nad horní část nádrže?

Řešení. Budeme uvažovat pohyb vrstvy vody v hloubce $x > 0$.



Jde o vrstvu o velikosti $\pi(r^2 - x^2)$.

Tato vrstva bude putovat po dráze $x + h$.

Potřebná síla bude rovna $k \cdot \pi(r^2 - x^2)$, kde k je tíha 1 m^3 vody.

Práce na vypumpování se bude počítat integrováním "příspěvků" jednotlivých vrstev $k \cdot \pi(r^2 - x^2) \cdot (x + h)$ podle vzorečku "práce=síla x dráha".

Tedy celková práce bude vyjádřena integrálem

$$\int_0^r k \cdot \pi(r^2 - x^2) \cdot (x + h) \, \mathrm{dx} = \frac{225k\pi}{4} \, .$$

Každá hloubka přináší svoji informaci, kolik práce na ni bude potřeba.

Po zintegrování jsme hotovi.

Konec cvičení 5.