NĚKTERÁ POUŽITÍ INTEGRÁLU

V této kapitole budou ukázány jednoduché aplikace integrálu.

Důležitější než výsledné vzorce jsou však postupy, které k nim vedou.

GEOMETRICKÉ APLIKACE

OBSAH NĚKTERÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ

Měření obecných podmnožin Euklidovských prostorů je obtížné (a v některých případech nemožné). Touto situací a přesným matematickým přístupem se zabývá teorie míry (viz kapitolu 30). Některé ne zcela přesné části této kapitoly budou upřesněny i v kapitolách o funkcích více proměnných.

Zde bude pojednáno o měření jednodušších a speciálních množin, které však jsou základem pro většinu případů objevujících se v praxi.

Pro „velikost" některých podmnožin $\mathbb{R}^n$ se používá různých termínů, např. délka pro intervaly v $\mathbb{R}$, obsah pro geometrické obrazce v $\mathbb{R}^2$, objem pro tělesa v $\mathbb{R}^3$.

Začíná se měřením podmnožin $\mathbb{R}$.

Mírou intervalu I na přímce s koncovými body a, b je jeho délka $|b-a|$ bez ohledu na to, zda je to interval otevřený, uzavřený nebo polootevřený (tj, hranice tu nehraje žádnou roli).

Stejný vzorec lze použít i pro bod (degenerovaný interval $[a, a]$), což znamená, že míra bodu (přesněji míra jednobodové množiny) je 0.

V *Poznámkách* je návod, jak určit míru některých složitějších množin reálných čísel.

Množina se rozřeže rovnoběžnými řezy na úzké proužky, které se dají při jejich velmi malé šířce považovat za obdélníky a lze tedy spočítat jejich obsah.

Sečtením ploch těchto obdélníků se dostane zhruba obsah obrazce.

Rozřezáním množiny na proužky a sečtením obsahů obdélníků aproximujících jednotlivé řezy se dostane zhruba míra množiny A.

Pokud se bude šířka obdélníků zužovat, bude výsledné číslo míru lépe vyjadřovat. V limitě, tj. pro nekonečně malou šířku obdélníků, se dostane hledaná míra.

Označí-li se $A(t)$ míra průniku množiny A s kolmicí na osu x v bodě t, pak se může $\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,\mathrm{d}x$ považovat za míru množiny A, pokud vše použité rozumně existuje.

Pro pochopení stačí se omezit na jednodušší množiny určené křivkami, jako např. množiny bodů ležící mezi grafy dvou funkcí nebo vnitřky uzavřených křivek.

Navíc jen takové, že použité řezy jsou intervaly a body (možná někdy jejich sjednocení).

Je-li $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$, je podle předchozího postupu obsahem množiny $\{(x, y); x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, což je v souladu s dřívějším popisem Newtonova integrálu.

Obsah množiny bodů ležících mezi grafy dvou spojitých funkcí f, g na intervalu $[a, b]$ je

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože nebyla uvedena žádná definice obsahu rovinného obrazce, lze poslední rovnost chápat jako definici obsahu uvedených množin.

Pro množinu určenou parametricky zadanou křivkou ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in (a, b)$) se použije předchozí vzorec $P = \int_a^b y\,\mathrm{d}x (= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x)$ a dostane se

$$P = \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Vzorec

$$P = \Big| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \Big|$$

vyjadřuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a intervalem na ose x, který obsahuje průmět křivky. Absolutní hodnotou odstraníme možné záporné znaménko.

Je-li grafem jednoduchá uzavřená křivka (pro přesnou definici viz kapitolu 22), udává vzorec

$$P = \Big| \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \Big|$$

obsah vnitřku této křivky.

U polárně zadaných křivek ($r = \rho(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$) je proměnnou úhel a hodnotou vzdálenost bodu od počátku.

Při velmi malé změně dt úhlu t změna r vyplní „křivý" trojúhelník s vrcholem v počátku, úhlem při vrcholu rovným dt a výškou z počátku na protilehlou stranu rovnou r.

Velikost protilehlé strany je, pro velmi malý úhel dt, rovna $r\,\mathrm{dt}$.

Obsah vzniklého trojúhelníka je tedy roven $(1/2)\ \cdot r\ \cdot r\,\mathrm{dt}$.

Součet všech těchto obsahů, tj. integrál

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(t)\,\mathrm{dt}\,, \quad \text{pro } 0 \le \alpha < \beta \le 2\pi\,,$$

určuje míru množiny bodů ležících mezi křivkou a přímkami procházejícími počátkem a svírajícími s kladnou částí osy x úhly α, β, resp.

Míra množiny A by samozřejmě neměla záviset od jejího posunutí nebo otočení.

Nezávislost předchozího přístupu na posunutí se ukáže snadno (viz *Otázky*).

Pro otočení je to složitější. Speciálním případem otočení (o 90^o) je postup, kdy se vezme projekce A na osu y a použijí se míry $B(u)$ řezů rovnoběžných s osou x, tj. průniku A s kolmicí na osu y v bodě u.

To znamená, že integrál

$$P_y = \int_c^d B(u)\mathrm{du}$$

by se měl rovnat integrálu

$$P_x = \int_a^b A(t)\mathrm{dt}$$

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

OBJEM NĚKTERÝCH TĚLES

Následující popis je opět vhodný pro velmi obecné podmnožiny $\mathbb{R}^3$, ale je lépe mít na mysli jen geometrická tělesa.

Nechť A je podmnožina prostoru $\mathbb{R}^3$, jejíž průmět na osu x leží v intervalu (a, b). Nechť pro každé $t \in (a, b)$ je $A(t)$ míra průniku množiny A s rovinou kolmou na osu x v bodě t. Pak míra množiny A je

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Podobně jako u rovinných obrazců je i v prostoru někdy vhodnější použít místo osy x jinou osu. Fubiniova věta opět tvrdí, že se pro hezké množiny dostane stejný výsledek.

Je-li A rotační těleso, je počítání objemu jednodušší, protože je snadné spočítat plochu příslušných řezů (tj. kruhů).

Nechť těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a,b) kolem osy x. Pak jeho objem je dán vzorcem

$$V = \pi \int_a^b y^2 \,\mathrm{dx} = \pi \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{dx}\,.$$

Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a,b)$), dostane se dosazením za x, y do vzorce

$$V = \pi \int_a^b y^2 \,\mathrm{dx} = \pi \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{dx}\,.$$

parametrický tvar

$$V = \pi \int_a^b \psi^2(t)\varphi'(t) \,\mathrm{dt}\,.$$

Má-li rotační těleso „díru", tj, vznikne rotací okolo osy x plochy ležící mezi grafy funkcí $|g| \le |f|$, odečte se od objemu pro funkci f objem pro funkci g:

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \,\mathrm{dx}\,.$$

Uvedenému postupu pro získání předešlých vzorců se říká metoda disků nebo mezikruží a je odvozen z postupu pro objem obecných těles.

Pro rotační tělesa lze zvolit i jiný postup, tzv. metodu válců, kdy těleso chápeme jako sjednocení tenkých válců s osou stejnou jako je rotační osa tělesa.

Nechť těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a,b) kolem osy x. Pak jeho objem je dán vzorcem

$$2\pi \int_0^d y\, p(y) \,\mathrm{dy}\,,$$

kde d je maximum funkce $|f|$ na (a,b) a $p(t)$ je délka průniku přímky $y = t$ s množinou $\{(x,y); 0 \le y \le |f(x)|\}$.

Poznámky 2   Příklady 2   Otázky 2

Cvičení 2

DÉLKA ROVINNÝCH KŘIVEK

Délka L nějaké křivky (čáry) z bodu A do bodu B se zjistí sečtením jejích velmi malých úseků ds, které je možné považovat za úsečky, tj.

$$L = \int_A^B \mathrm{ds}\,.$$

Úsečka ds je přeponou pravoúhlého trojúhelníka se stranami dx a dy.

Tedy je

$$\mathrm{ds} = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2} \,\mathrm{dx}\,.$$

Podle zadání křivky (jako funkce, parametricky, polárně) se za y nebo x dosadí příslušné funkce a dostane se

1. $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}$, je-li $y = f(x), x \in (a,b)$;

2. $L = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{dt}$, je-li $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in (a,b)$;

3. $L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(t)+\rho'^2(t)}\,\mathrm{dt}$, je-li $r = \rho(t), t \in (\alpha,\beta)$.

Poznámky 3 Příklady 3 Cvičení 3

POVRCH ROTAČNÍCH TĚLES

Podobně jako se odvodil obsah z délky nebo objem z obsahu, dá se odvodit povrch tělesa z délky křivky.

Pro šířku ds se použijí výrazy z předchozí části o délce křivek a dostane se:

$$S = \int_a^b L(x)\,\mathrm{ds} = \int_a^b L(x)\sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2} = \int_a^b L(x)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

Jestliže těleso A vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a,b) kolem osy x, pak je jeho povrch dán vzorcem

$$2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{dx}\,,$$

Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t \in (a,b)$), použije se vzorec

$$2\pi\int_a^b |\psi(t)|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{dt}\,.$$

V případě polárně zadané křivky ($r = \rho(t), t \in (\alpha,\beta)$):

$$2\pi\int_\alpha^\beta \rho(t)\sin(t)\sqrt{\rho^2(t)+\rho'^2(t)}\,\mathrm{dt}\,.$$

Poznámky 4 Příklady 4 Cvičení 4

FYZIKÁLNÍ APLIKACE

V této kapitole bude uvedeno jen několik základních aplikací v mechanice.

V pozdějších kapitolách budou při různých příležitostech uvedeny další aplikace integrálu ve fyzice.

POHYB

Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t, je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t.

Je-li tedy dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{dt} = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu.

Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte integrálem

$$\int_a^b |v(t)| \, \mathrm{dt} \, .$$

TĚŽIŠTĚ

Zhruba řečeno, soustředí-li se do těžiště tělesa hmotnost celého tělesa, pak (tíhové) momenty (vzhledem k nějakým osám) těžiště a celého tělesa se rovnají.

Podobně jako u výpočtu velikosti množin je i u zjišťování těžiště vhodné začít u jednodimenzionálních objektů (tj. drátů) a postupně zvyšovat dimenzi.

Vzhledem k pozdějšímu snadnějšímu přístupu pomocí integrálu funkcí více proměnných a plošných integrálů bude zvyšování dimenze ukončeno u rovinných desek.

Nejjednodušší je případ, kdy drát je rovný – pak ho lze umístit na kladnou osu x s jedním koncem do počátku a druhým do bodu d, kde d je délka drátu. Hustota h je funkce definovaná na intervalu $[0, d]$.

Těžiště zřejmě bude ležet na ose x, řekněme v bodě T. Podle úvodního vysvětlení musí být moment drátu roven momentu těžiště, což je $T.M$ (počítá se moment vzhledem k počátku).

Moment drátu se spočítá podobně jako hmotnost „sečtením" momentů všech bodů a tedy se rovná $\int_0^d x h(x) \, \mathrm{dx}$. Odtud vyplývá vzorec pro těžiště:

$$T = \frac{\int_0^d x h(x) \, \mathrm{dx}}{\int_0^d h(x) \, \mathrm{dx}} \, .$$

Nechť je nyní drát zahnutý, např. je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu (a, b). V bodě $(x, f(x))$ má drát hustotu $h(x)$.

Hmotnost M drátu se opět spočte „sečtením" hmotností jednotlivých dílků ds a je tedy rovna $\int_a^b h(x) \, \mathrm{ds} = \int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{dx}$.

Nechť má těžiště souřadnice (T_x, T_y) a má hmotnost M. Jeho momenty vzhledem k osám x, y budou momenty drátu vzhledem k těmto osám.

Moment M_x drátu vzhledem k ose x je součet momentů jednotlivých dílků, tj. $\int_a^b y h(x) \, \mathrm{ds} = \int_a^b f(x) h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{dx}$.

Moment M_y vzhledem k ose y je roven $\int_a^b x h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{dx}$.

Porovnáním momentů M_x a M_y se dostanou vzorce

$$T_x = \frac{\int_a^b x h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{dx}}{\int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{dx}} \, , \quad T_y = \frac{\int_a^b f(x) h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{dx}}{\int_a^b h(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{dx}} \, .$$

Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost drátu rovna jeho délce L.

Vynásobíte-li vzorec pro T_y jmenovatelem a dále číslem 2π, dostanete

$$2\pi T_y . L = S \, ,$$

kde S je povrch rotačního tělesa vzniklého rotací drátu okolo osy x.

Uvedená rovnost říká, že tento povrch je rovný ploše válcové plochy o poloměru T_y a výšce L.

Tomuto vzorci se někdy říká *Guldinovo pravidlo* pro rotační plochy:

VĚTA. Plocha rotačního tělesa vytvořeného rotací rovinné křivky C kolem přímky p je rovna násobku délky křivky C a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky C od p.

Tenkou rovnou desku (např. plech) je možné pokládat za množinu v rovině, na kterém je definována funkce $h(x, y)$ udávající hustotu v bodě (x, y).

Při výpočtu těžiště desky lze postupovat stejně jako u výpočtu těžiště drátu.

Zatím však není definován integrál přes množiny v rovině a tak je nutné postup rozdělit. Výpočet hmotnosti je podobný výpočtu plochy. Udělají se řezy desky kolmé např. na osu x a zjistí se jejich hmotnosti a ty se pak , „sečtou".

Je-li deska např. množinou bodů ležících mezi grafy dvou funkcí ($\{(x,y); x \in (a,b), g(x) \le y \le f(x)\}$) a hustota je dána funkcí $h(x,y)$, pak hmotnost M je rovna

$$M = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y) \, \mathrm{dy} \Big) \, \mathrm{dx} \, .$$

Stejným způsobem se určí momenty desky vzhledem k osám x, y: určí se moment vzhledem k ose x řezu desky kolmého na osu x a tyto momenty se „sečtou".

Dostane se

$$M_x = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} y h(x,y) \, \mathrm{dy} \Big) \, \mathrm{dx} \, .$$

a podobně se vypočte M_y.

Pro těžiště se tedy získají vzorce

$$T_x = \frac{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} x h(x,y) \, \mathrm{dy} \Big) \, \mathrm{dx}}{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y) \, \mathrm{dy} \Big) \, \mathrm{dx}} \, , \quad T_y = \frac{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} y h(x,y) \, \mathrm{dy} \Big) \, \mathrm{dx}}{\int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y) \, \mathrm{dy} \Big) \, \mathrm{dx}}$$

.

Nechť je nyní $h = 1$; pak je hmotnost desky rovna jeho obsahu P.

Podobně jako u drátu se úpravou vzorce pro T_y dostává

$$2\pi T_y . P = 2\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))/2 \, \mathrm{dx} = V$$

kde V je objem rotačního tělesa vzniklého rotací plechu okolo osy x.

Podobně jako u plochy rotačního tělesa je tedy i objem počítán jako by byla základní plocha, která rotuje, soustředěna do těžiště a to obíhalo kolem osy x.

Tomuto vzorci se někdy říká *Guldinovo pravidlo* pro rotační objemy:

VĚTA. Objem rotačního tělesa vytvořeného rotací rovinné množiny A kolem přímky p, neprotínající množinu A, je rovna násobku obsahu množiny A a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny A od p.

SÍLA, PRÁCE

Klasický vzorec $W = Fd$ vypočítává práci W vykonanou působením síly F po dráze délky d (síla působí ve směru dráhy).

Nechť ve směru osy x působí síla velikosti $F(x)$ v bodě x. Její práce na úseku dx je rovna $f(x)\,\mathrm{dx}$ (na tak malém úseku lze považovat sílu za konstantní).

$$W = \int_a^b F(x) \, \mathrm{dx} \, .$$

Je-li deska ponořena kolmo do kapaliny, působí na malý dílek dx desky hydrostatická síla $hx \, \mathrm{dx}$ (z jedné strany desky), kde h je hustota kapaliny a x je vzdálenost dílku od hladiny kapaliny.

Je-li $l(x)$ délka množiny bodů desky, které jsou všechny vzdálené x od hladiny, je hydrostatická síla působící na tuto množinu rovna $hxl(x) \, \mathrm{dx}$ a celková hydrostatická síla působící na jednu stranu desky je tedy $\int_a^b hxl(x) \, \mathrm{dx}$, kde a, b jsou nejmenší, resp. největší, vzdálenosti bodů desky od hladiny. Mění-li se hustota kapaliny s hloubkou, místo h se píše $h(x)$.

Příklady 5 Cvičení 5