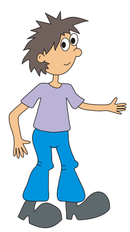
OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diferenciální rovnice patří mezi nejužívanější nástroje matematiky v aplikacích. Jsou to rovnice, kde neznámou je funkce a rovnice obsahuje i derivace této funkce. Lze očekávat, že pro získání řešení je potřeba umět integrovat.

Teorie diferenciálních rovnice je velmi obsáhlá a složitá. Tato kapitola slouží jen k povrchní orientaci v této teorii a není míněna jako přesný matematický výklad. Na některých místech bude nutné použít pojmy z teorie funkcí více proměnných, která je obsažena v dalších kapitolách.

Pokud některá partie matematiky potěší úplně každého, tak jsou to diferenciální rovnice.



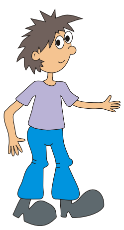
Jsem pro každou špatnost.

Některé matematické úlohy jdou přibližně spočítat selským rozumem.

Například objem tělesa se zjistí ponořením tělesa do vody.

Zjistit výsledek některých dějů, které probíhají v čase, není někdy pomocí selského rozumu možné.

Dovedete například selským rozumem zjistit, jak vzpomínají žraloci na první světovou válku?



Dám se poddat.

Diferenciální rovnice to dovedou zjistit, dokonce se to dá i pěkně nakreslit. Je to v poho.

Základní rozdělení diferenciálních rovnic je na rovnice :

- *parciální* (ty používají parciální derivace funkcí více proměnných),

- *obyčejné* (ty používají derivace funkcí jedné proměnné).

Parciální diferenciální rovnice se v této části probírat nebudou, a proto se bude v dalším přívlastek „obyčejné" vynechávat nebo se bude název *obyčejné diferenciální rovnice* zkracovat na o.d.r..

Obyčejné diferenciální rovnice jsou obyčejně velmi hezké :-)

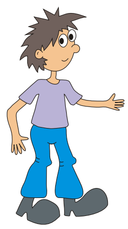
Nechť F je funkce $n+2$ proměnných, $n \in \mathbb{N}$, a y je funkcí x. Pak rovnici

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nazýváme obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu.

Řešením této rovnice na intervalu I je funkce $y = y(x)$, která vyhovuje dané rovnici na intervalu I (a tedy má na I derivace až do řádu n).

Prostě se do rovnice dosadí v každém bodě x také hodnoty $y(x)$, $y'(x)$ a podobně a musíme dostat nulu.



BTW. Nejde tu nulu dostat jednodušeji?

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1.ŘÁDU

Diferenciální rovnice 1.řádu se uvádí ve tvaru obecném, t.j. $F(x, y, y') = 0$,
nebo ve tvaru vyřešeném pro y', tj. $y' = f(x, y)$.

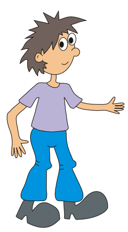
Já mám raději oba.

Svatá prostoto :-)

Nejjednodušší diferenciální rovnicí je rovnice $y' = 0$. Jejím řešením jsou konstantní funkce.

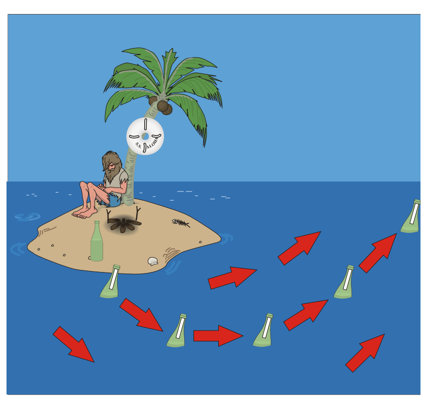
Pokud bychom k diferenciálním rovnicím přistupovali takto, tak by nás nebavily. Musí se na to jít s chutí.

Představme si, že na moři v každém bodě (x, y) známe směr $f(x, y)$, kterým se pohybuje voda. Máme určit, kam dopluje trosečníkova láhev.

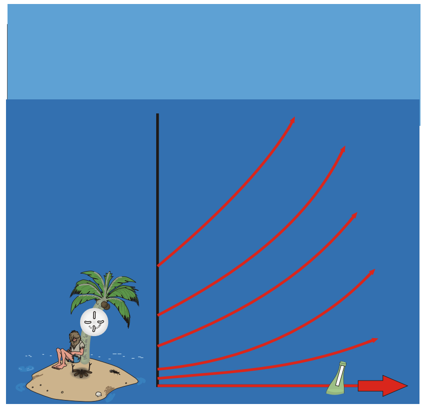


Zdá se, že se něco začíná dít. Asi se bude hledat funkce $y(x)$ splňující rovnici $y'(x) = f(x, y(x))$.

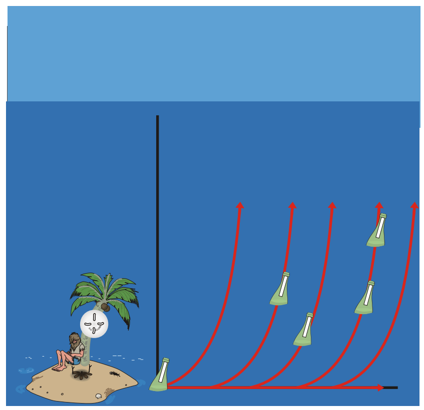
Směr mořských proudů určuje, kam bude plout láhev.



Někdy jde o deterministickou záležitost. Sorry.



Někdy záleží taky na náhodě. Sorry.



Budeme zkoumat, pro které funkce f popisující proudění mořských proudů dostaneme řešení a zda bude jednoznačně určeno.

Je velmi důležité vědět, zda má rovnice řešení a zda je jediné. Pro diferenciální rovnice 1.řádu je takovým základním tvrzením následující věta (viz kapitoly 17 a 18 pro spojitost a parciální derivace funkce více proměnných).

VĚTA. Existence a jednoznačnost řešení 1. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v okolí bodu (x_0, y_0). Pak existuje v okolí bodu x_0 řešení rovnic

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0\,.$$

Je-li navíc i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ spojitá v okolí bodu (x_0, y_0), pak je toto řešení jediné.

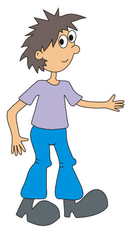
Důkaz. Naznačíme důkaz pro předpoklad spojitosti $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (viz *Poznámky* pro postup bez tohoto předpokladu).

Řešení obou rovnic $y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0$ dohromady je ekvivalentní řešení integrální rovnice

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{dx}$$

na nějakém okolí bodu x_0 (dokažte).

To je fundamentální skok!



Doufám, že půjde rozdělit do kroků a krůčků ...

Důkaz té ekvivalence spočívá v derivování rovnosti s integrálem (tím dostaneme první z rovnic). Dosazením $x = x_0$ dostaneme druhou.

Obrácená implikace je snadná (jde o integrál z derivace).

Integrování se někdy hodí.

Následující posloupnost funkcí existuje na nějakém okolí bodu x_0:

$$y_0(x) = y_0\,, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Použitím věty o střední hodnotě se dostane odhad

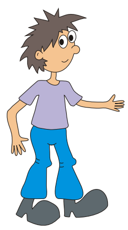
$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\le \int_{x_0}^{x} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(c_x))\right| |y_n(x) - y_{n-1}(x)|\,\mathrm{d}x \le \\ &\le K \max_x |y_n(x) - y_{n-1}(x)||x - x_0| \le \\ &\le K^n |x - x_0|^n \max_x |y_1(x) - y_0|\,. \end{aligned}$$

Lze nyní zvolit takové malé okolí bodu x_0, že $K|x - x_0| < 1/2$ pro x z tohoto okolí.

V tomto okolí tedy bude pro každé x posloupnost $\{y_n(x)\}$ cauchyovská a bude konvergovat k nějakému bodu, který se označí $y(x)$.

Pomocí věty o přehození limity a integrálu z kapitoly 26 se ukáže, že funkce y řeší uvedenou integrální rovnici. Pro jednoznačnost viz *Otázky*.

Důkaz není jednoduchý. Dává však možnost sestrojit přibližné řešení.



Ani jsem si nevšiml. Ale hodí se to.

Uvedené tvrzení má lokální charakter, protože něco tvrdí o řešení pouze v nějakém okolí bodu, a to okolí může být i velmi malé.

Jak se získají řešení na větších intervalech je vysvětleno v *Poznámkách*.

O.D.R. SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

Rovnice

$$y' = g(x)h(y)$$

se nazývá rovnice se separovanými proměnnými, protože se proměnné x, y dají od sebe oddělit.

Napíše-li se y' ve tvaru $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, pak se převodem y na levou stranu a x na pravou stranu dostane rovnost

$$\frac{\mathrm{dy}}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{dx} \quad \text{pro } h(y) \neq 0\,.$$

Jestliže se nyní formálně přidá před obě strany integrál, dostane se rovnost množiny primitivních funkcí na intervalech, kde existují:

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{dx}\,,$$

což je řešení dané rovnice v implicitním tvaru na oněch intervalech.

Ověříte snadno zderivováním. Děkuji.

Nemusí být vždy možné napsat řešení v explicitním tvaru $y = y(x)$. Pozor na to!

Jediná další řešení zadané rovnice $y' = g(x)h(y)$ jsou všechny kořeny rovnice $h(y) = 0$, tj. jestliže $h(y_0) = 0$, pak konstantní funkce $y = y_0$ je řešení dané rovnice.

Na to se často zapomíná :-(

Jestliže $H(y), G(x)$ jsou primitivní funkce k $1/h(y), g(x)$ resp., na intervalu I, pak pro každé reálné číslo C je funkce $y = y(x)$ zadaná implicitním zápisem $H(y) = G(x) + C$ (pokud existuje) řešením dané rovnice na intervalu I.

Zde se bude bojovat o inverzní funkci k H. Pokud existuje, je hotovo.

Je to tzv. *obecné řešení rovnice*. Tzv. *partikulární řešení* procházející bodem (x_0, y_0) se získá vyřešením rovnice $H(y_0) = G(x_0) + C$ pro neznámou C.

Tedy v celku jde o postup:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

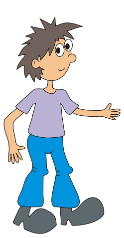
$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro} \quad h(y) \neq 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$H(y) = G(x) + C$$

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C)\,.$$

s přidáním konstantních řešení (kořenů rovnice $h(y) = 0$).



To není možné zkazit. Věřím na šťastnou hvězdu.

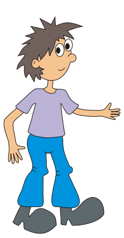
Greenhorni zakopnou na té integraci, ostatní na inverzní funkci.

Věta o existenci řešení říká, že řešení dané rovnice v nějakém bodě (x_0, y_0) existuje, pokud je g spojitá v nějakém okolí bodu x_0 a h spojitá v nějakém okolí bodu y_0. Předchozí postup ukazuje, že řešení může existovat i v jiných případech.

Tedy dovedeme řešit SPOUSTU diferenciálních rovnic.

Uvedená věta dále říká, že je-li navíc h' na spojitá v okolí y_0 (nebo je h lipschitzovská), prochází bodem (x_0, y_0) jediné řešení.

Na to pozor. Ověření předpokladu pro jednoznačnost řešení může někoho stát život!



Myslí asi toho trosečníka . . .

Není zpravidla už tak jednoduché získat jednoznačnost přímo z popsaných řešení.

Na jednoznačnost prostě bacha.

Nesmíme zapomenout na to, že diferenciální rovnice a jejich řešení byly po dlouhou dobu zdrojem rozvoje matematické analýzy.

Řešily se základní úlohy z mechaniky, fyziky, chemie a ostatních věd.

To soustředilo na jejich řešení mnoho významných matematiků.

Tím se objevilo spousta různých triků na spousta různých typů rovnic.

My jsme již viděli trik na separovane rovnice. Z dalších známých postupů uvedeme pouze některé.

O.D.R. S HOMOGENNÍ FUNKCÍ

Funkce $f(x, y)$ dvou proměnných se nazývá *homogenní*, jestliže pro libovolné nenulové reálné číslo t platí $f(tx, ty) = f(x, y)$ v celém definičním oboru funkce f.

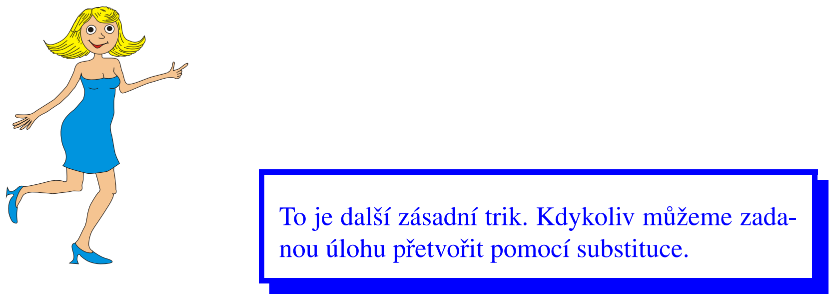
Speciálně tedy platí $f(x, y) = f(1, y/x)$ pro $x \neq 0$.

To lze využít pro následující typ diferenciálních rovnic.

V rovnici $y' = f(x,y)$, kde funkce f je homogenní, lze substitucí nové závisle proměnné $u(x) = y(x)/x$ (a tedy $y' = u'x + u$) přejít na rovnici se separovanými proměnnými:

$$u'x + u = f(1,u)\,.$$

Po vyřešení této rovnice je nutné se vrátit k původní závisle proměnné $y(x)$.



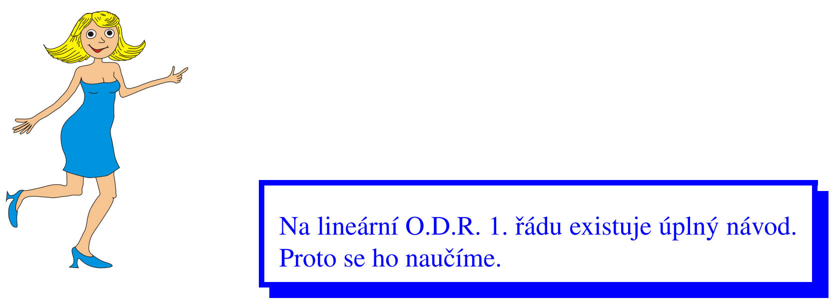
Získaná řešení jsou na intervalech neobsahujících 0. Pokud se jedná např. o intervaly $(-1,0)$ a $(0,1)$ a původní rovnice má smysl pro nějaký bod $(0,y_0)$, je nutné hledat řešení y i v bodě $x=0$ tak, aby $y(0)=y_0$. Znamená to posunout řešení na obou intervalech tak, aby se jejich jednostranné limity v bodě 0 rovnaly číslu y_0 (za podmínek existenční věty to musí jít). Připomíná to *lepení* primitivních funkcí. Toto lepení se používá i v jiných situacích, např. při hledání řešení rovnic se separovanými proměnnými.

LINEÁRNÍ O.D.R. 1.ŘÁDU

Rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ se nazývá lineární.

Důvodem pro tento název je skutečnost, že levá strana je lineární vzhledem k proměnné y (viz *Poznámky*).

Důsledkem je vlastnost, že je-li $q = 0$, pak lineární kombinace několika řešení této rovnice je zase jejím řešením – ověřte.



Rovnice s nulovou pravou stranou se často nazývá homogenní a s nenulovou pravou stranou pak nehomogenní.

Postupů na získání řešení rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ je několik, např. takovéto tříkrokové řešení (provedeme nejdříve formálně):

1. krok. Nejdříve se vyřeší rovnice s nulovou pravou stranou (tj. $y' + p(x)y = 0$), což je rovnice se separovanými proměnnými. Dostaneme výsledek (podrobnosti proveďte sami):

$$y(x) = Ke^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,.$$

2. krok. Toto řešení $y(x)$ se dosadí do původní rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ a předpokládáme, že K je funkcí x. Po úpravě dostaneme rovnici pro K:

$$K' = q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,.$$

Vyřešíme integrací

$$K(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx} + C\,,$$

kde C je libovolná konstanta.

3. krok. Obecným řešením původní rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ je tedy

$$y(x) = K(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}} \;=\; e^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}} \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx} + Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,,$$

kde C je libovolná konstanta.

Uvedený postup (záměny konstanty K za funkci $K(x)$) se nazývá variace konstant a je výhodný hlavně pro lineární rovnice vyššího řádu.

Jde vlastně o "uhodnutí"tvaru řešení. Vyřešíme nejdříve podobnou úlohu (homogenní rovnici) k zadané úloze (nehomogenní rovnici). Pak podle výsledku té podobné úlohy ve tvaru $y(x) = K \cdot\ y_h(x)$ zkusíme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $y(x) = K(x) \cdot\ y_h(x)$.

Takové "hádání"tvaru řešení je dovolená činnost.

Jde vlastně v důsledku o substituci. Místo rovnice pro y dostaneme rovnici pro K. Promyslete si to.

Při dobré substituci se úloha zjednoduší. Například my jsme dostali pro K jednoduchou homogenní separovanou ...

Formální zápis tohoto řešení nevyžaduje soustředění. Pozor na to.

Uvedený postup dává řešení na intervalu I, pokud mají funkce p a $qe^{\int p}$ na tomto intervalu primitivní funkce. V tomto případě má rovnice v každém bodě (x_0, y_0), kde $x_0 \in I$, jediné řešení (protože existuje jediná konstanta C řešící danou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$). Věta o existenci a jednoznačnosti (pro spojitá p, q) pro lineární rovnice tedy vyplývá z uvedeného postupu.

Z tvaru řešení je snadno vidět, že pro libovolné $x_0 \in I$ a libovolné číslo y_0 existuje konstanta C tak, že $y(x_0) = y_0$.

To je v souladu s větou o existenci řešení.

Protože v tomto případě je $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -p(x)$ spojitá funkce na I, řešení existují jediná, což je snadno vidět i z uvedeného obecného řešení.

Takováto diskuse se musí u každého řešení diferenciální rovnice provést. Jinak nevíme, zda jsme opravdu úlohu vyřešili.

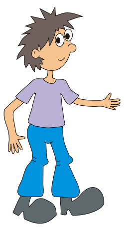
Všimněte si, že uvedené obecné řešení rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ je součtem obecného řešení homogenní rovnice

$$Cy_h(x) \;=\; Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

a jednoho partikulárního řešení rovnice nehomogenní.

$$y_0(x) \;=\; e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \int q(x) e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,.$$

To si dobře promyslete a nezapomněňte. Dík.



Řešení homogenní rovnice tam funguje jako takové smetí. Tedy $y = y_0 + Cy_h$. Tedy stačí najít dvě vhodná řešení.

Obecné řešení rovnice s nulovou pravou stranou je libovolný násobek (číslem) jednoho nenulového partikulárního řešení této rovnice.

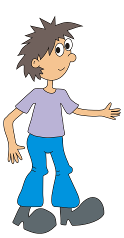
Uvědomte si také to, že je-li partikulární řešení homogenní rovnice nenulové v jednom bodě intervalu, je nenulové v každém bodě intervalu.

Obecně řešte diferenciální rovnice v bdělém stavu.

Poznámky 1:

S velmi jednoduchou diferenciální rovnicí jste se setkali při hledání integrálu:

$$y' = f(x)\,.$$



Tedy jsou diferenciální rovnice alespoň tak těžké jako integrování …

Existují diferenciální rovnice, které nemají žádné řešení (např. $y'^2 + 1 = 0$) nebo mají jediné řešení (např. $y'^2 + y^2 = 0$) bez volných konstant.

Takové rovnice se nedají (opravdu?) zvládnout ani pomocí vět.

Věta o existenci. První část věty o existenci (bez jednoznačnosti) lze dokázat stejným způsobem, jako byla dokázána existence primitivní funkce ke spojité funkci. Jen místo funkce f jedné proměnné je f funkcí dvou proměnných.

Získaná lomená čára má v bodě lomu (x_i, y_i) jednostranné derivace rovné $f(x_i, y_i)$ nebo $f(x_{i-1}, y_{i-1})$, resp. (doprava od x_0). To je tzv. Peanova metoda, která naznačuje i možnost nalezení přibližného řešení.

V další části tvrzení (jednoznačnost) byl potřeba odhad

$$|f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(c_x))\right| |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq K|y_n(x) - y_{n-1}(x)|\,,$$

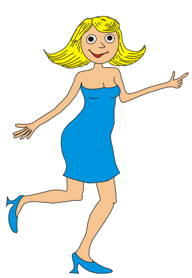
pro který není nutná existence parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, ale stačí tzv. lipschitzovská vlastnost f ve druhé proměnné:

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|$$

pro všechna x z nějakého okolí x_0 a y, z z nějakého okolí y_0.

Maximální řešení. Získané lokální řešení na okolí $(x_0 - a, x_0 + b)$ bodu x_0 lze prodlužovat dále použitím věty o existenci na body $x_0 - a, x_0 + b$.

Je nutné použít větu o jednoznačnosti – proč?



Tento postup prodlužování skončí, jakmile jeden z krajních bodů (x, y) dojde na hranici oblasti, kde f splňuje podmínky věty.

Řešení rovnice, které nejde prodloužit, se nazývá maximální.

Přesnější matematický popis existence maximálního řešení procházejícího daným bodem je následující (zjednodušíme si popis předpokladem jednoznačnosti řešení). Nechť G je rovinná oblast (tj. otevřená souvislá množina) a rovnice $y' = f(x, y)$ má v každém bodě oblasti jediné řešení (ve smyslu věty o existenci a jednoznačnosti). Zvolí se

$(x_0, y_0) \in G$ a vezmou se všechny intervaly I v $\mathbb{R}$ obsahující bod x_0 takové, že na I existuje řešení $y(x)$ rovnice s vlastností $y(x_0) = y_0$, $(x, y(x)) \in G$ pro každé $x \in I$. Mezi těmito intervaly existuje největší (jejich sjednocení) a k němu příslušné řešení je maximální.

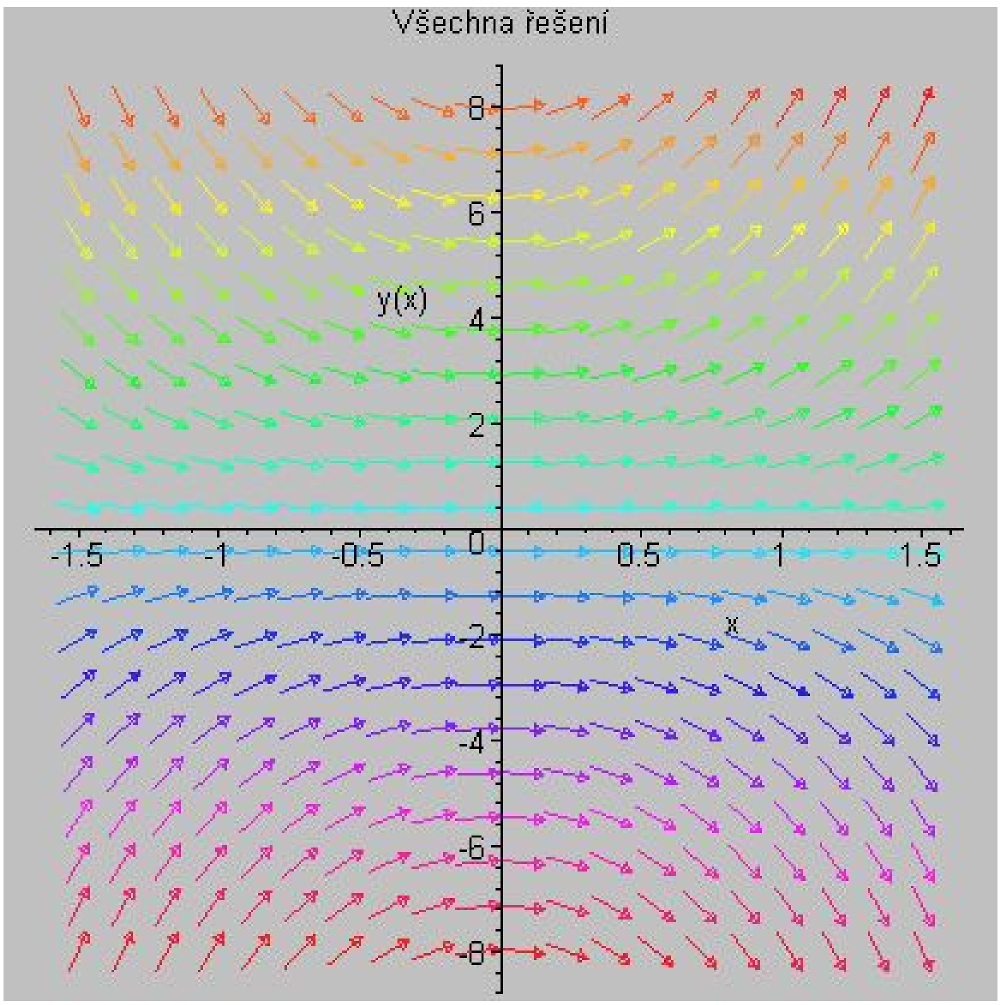
Obecné a partikulární řešení. Z věty o existenci je vidět, že řešení bude procházet každým bodem oblasti, kde f splňuje předpoklady věty. Není-li specifikován bod, kterým řešení prochází, nazývá se řešení obecné – volnost pro další specifikaci bývá vyjádřena volitelnou konstantou.

Po zadání čísla za tuto konstantu se získá tzv. řešení partikulární.

Směrové pole. Nakreslí-li se grafy řešení pro různé volby konstant v obecném řešení, dostane se soubor křivek (někdy nazývané integrální křivky dané diferenciální rovnice).

Tečny k těmto křivkám udávají tzv. směrové pole . Najít řešení znamená najít křivku, která má v každém svém bodě tečnu, jejíž směr splývá se směrovým polem.
Směrové pole se znázorňuje pomocí vektorů v mnoha bodech dané oblasti. Vektor v bodě (x_0, y_0) má směr $(1, f(x_0, y_0))$, jeho velikost je dána ntak, aby se vektory navzájem neprotínaly a současně graficky naznačily průběh řešení.

Směrové pole rovnice $y' = xy$:

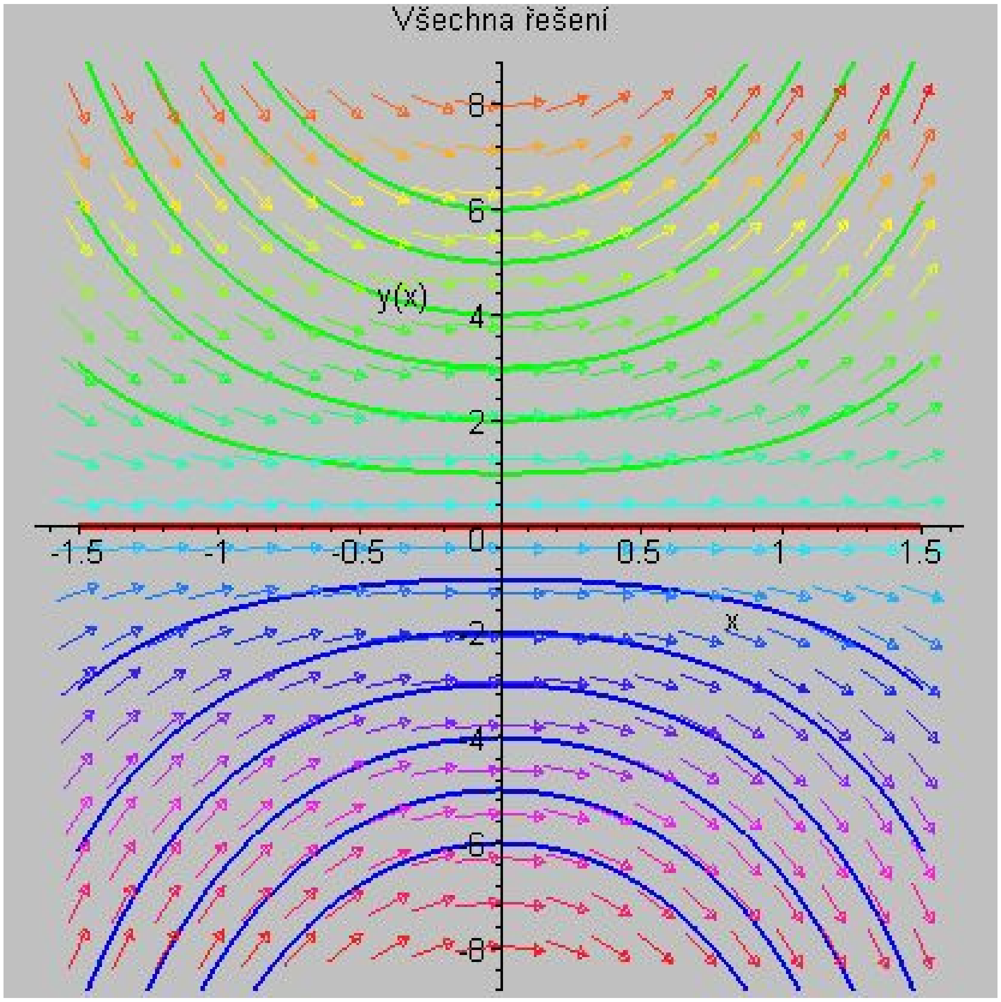


Směrové pole a integrální křivky rovnice $y' = xy$:

Směrové pole rovnice $y' = y \operatorname{cotg}(x)$:

Směrové pole a integrální křivky rovnice $y' = y \operatorname{cotg}(x)$:

Poznámky k různým typům rovnic.



Někdy se rovnice $y' = f(x,y)$ dají převést na rovnice s homogenní funkcí na pravé straně substitucí $y = z^a$ (ověřte, kdy je to možné).

Některé rovnice se převedou na rovnice s homogenní funkcí na pravé straně posunutím proměnných o konstanty (proveďte pro rovnici $y'(ax+by+c) = cx+dy+e$).

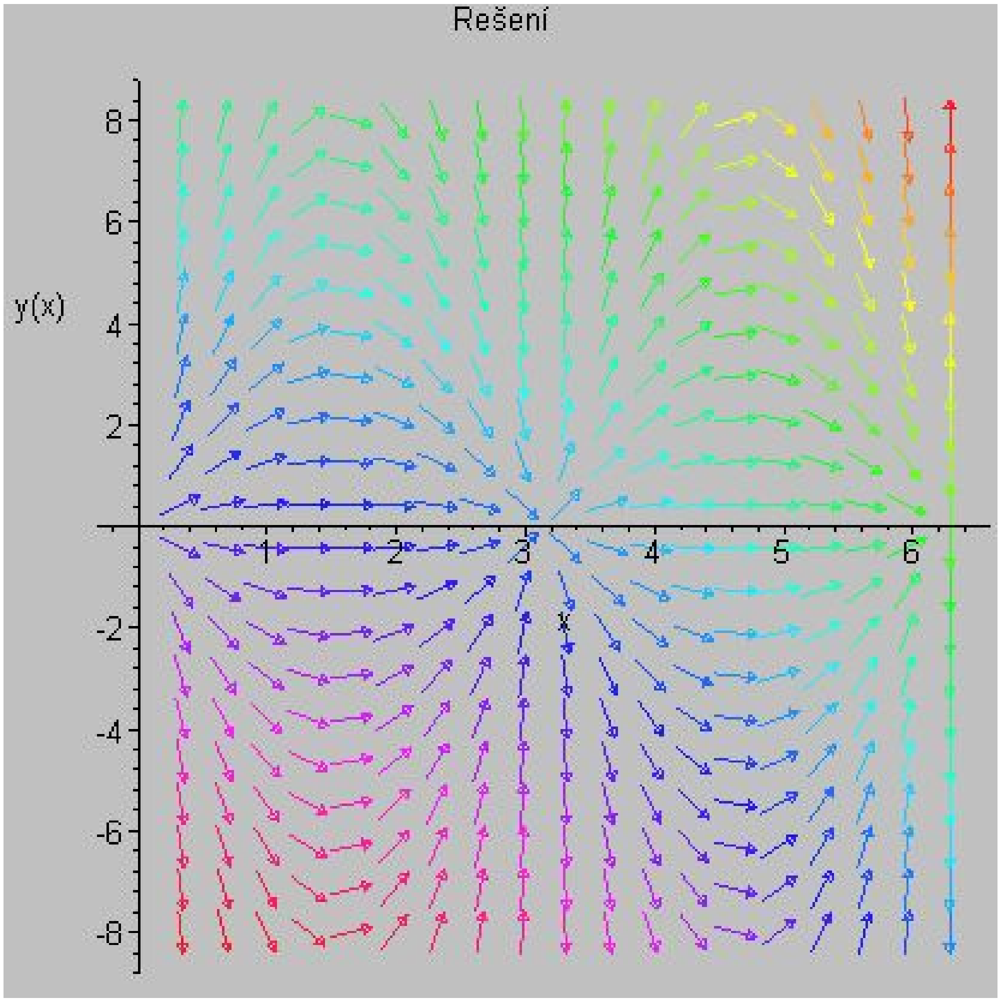
Znáte-li jedno partikulární řešení u lineární nehomogenní rovnice, substituce $y = z+u$ převede danou nehomogenní rovnici na homogenní (s proměnnou z).

Označí-li se $L(y) = y' + py$, pak L je lineární zobrazení množiny funkcí majících derivaci na nějakém intervalu I do množiny všech funkcí na tomto intervalu.

Konec poznámek 1.

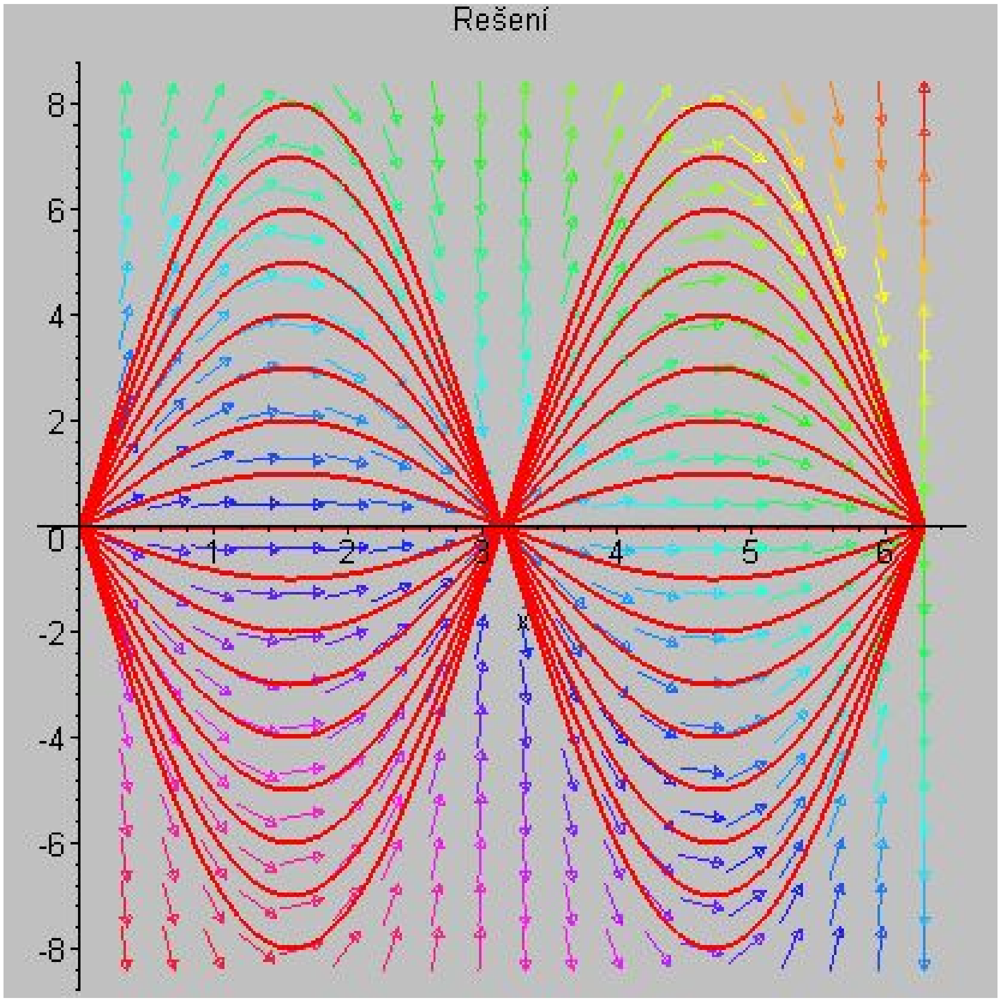
Příklady 1:

V následujících příkladech se pokuste nakreslit i směrová pole rovnic.



Takové obrázky dají globální pohled na řešený problém.

Taky se jimi dají odhalit chyby. Například se řešení skoro nikdy nekříží.



1. Vyřešte dvě rovnice se separovanými proměnnými $y'y + x = 0$ a $y' = \sqrt{y}$. Nejdříve najděte obecné řešení a potom řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$.

Ověřte větu o existenci a jednoznačnosti na těchto dvou rovnicích. Zvláště u druhé rovnice je třeba dávat velký pozor při řešení.

2. Vyřešte rovnici $y^2 - x(x + y)y' = 0$ (s homogenní funkcí). Nejdříve obecně, pak pro počáteční podmínku $y(1) = 0$.

Ověřte větu o existenci a jednoznačnosti pro tuto rovnici na co největších intervalech.

3. Vyřešte následující lineární rovnice

$$y' + xy = 2x\,, \quad y' + y = e^x\,, \quad xy' - 3y = x^2\,.$$

Obecná řešení v těchto případech jsou definována na $\mathbb{R}$.

4. Sestavte diferenciální rovnici popisující rozpad radioaktivní látky s poločasem rozpadu t_p. Rovnice bude popisovat hmotnost m v závislosti na čase t, jestliže na začátku měla látka hmotnost m_0.

Derivace m' (tj. změna hmotnosti podle času) je tedy přímo úměrná hmotnosti: $m' = km$. Rovnost $m(0) = m_0$ udává počáteční podmínku. Ze znalosti poločasu rozpadu nalezněte konstantu k a vyřešte vzniklou diferenciální rovnici.

5. Najděte vztah pro tzv. nepřerušené (nebo spojité) úrokování. Je-li r roční úrok a P množství uložených peněz na tento úrok, pak P je funkcí času t a derivace P' je rovna rP (ověřte). Dostáváte opět diferenciální rovnici s danou počáteční podmínkou – vyřešte.

Konec příkladů 1.

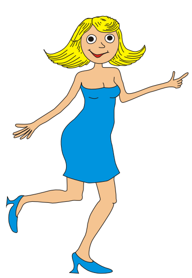
Otázky 1:

1. Dokažte jednoznačnost řešení ve větě o existenci. Vezměte dvě řešení $y(x), z(x)$ procházející daným bodem, která se nerovnají na žádném okolí bodu x_0 a zkoumejte rozdíl $|y(x) - z(x)|$ opět pomocí věty o střední hodnotě nebo lipschitzovské vlastnosti f. Použitím maxima M tohoto rozdílu na intervalu $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ dostanete nerovnost $M \le M\varepsilon K$, kde K je konstanta z důkazu o existenci. Z toho již vyplyne spor pro $M \neq 0$.

2. Ukažte, že tzv. Bernoulliovy rovnice

$$y' + p(x)y = q(x)y^a\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, 1$, se dají převést na lineární rovnice pomocí nové proměnné $z = y^{1-a}$.



U některých rovnic se po dlouhém hledání dostaneme k dobrému nápadu, podobně před námi Bernoulli.

3. Má-li funkce $f(x, y)$ má parciální derivace v nějaké oblasti, pak rovnice tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0\,, \quad \text{psno vtinou ve tvaru } \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy} = 0\,,$$

se nazývají exaktní rovnice. Ukažte, že jejím řešením jsou implicitní funkce $f(x, y) = C$.

Pozor na ten zápis, jde napůl o rovnici a napůl o jakési parciální derivování.

Parciální derivování se bude zkoumat v kapitole o funkcích více proměnných. Klídek.

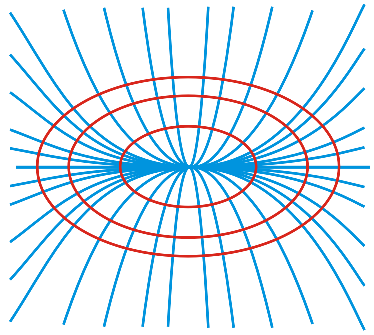
Dokažte, že rovnice $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ je exaktní právě když $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ v dané oblasti (předpoklad: všechny parciální derivace 1.řádu jsou spojité a daná oblast „nemá díry"). Při důkazu nutnosti podmínky naleznete i způsob řešení (tj., nalezení funkce f).

Někdy lze nalézt tzv. *integrační faktor* $g(x,y)$ takový, že po vynásobení rovnice $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ tímto faktorem se dostane exaktní rovnice, ač ta původní exaktní nebyla. Lze ukázat, že pokud má původní rovnice obecné řešení, integrační faktor existuje.

O co jde se uvidí až po spočtení prvního příkladu. LET'S GO :-)

4. Ukažte, že pro homogenní lineární rovnici $y' + p(x)y = 0$ je $e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ integrační faktor z předchozího odstavce. Najděte tímto způsobem řešení homogenní lineární rovnice.

5. Je-li dána v rovině soustava křivek, říká se, že křivka C je ortogonální k této soustavě, jestliže v každém průsečíku křivky C s křivkou soustavy jsou na sebe tečny obou křivek v tomto bodě kolmé.
Najděte všechny ortogonální křivky k soustavě grafů funkcí $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.



Konec otázek 1.

Cvičení 1:

Příklad. Spočtěte diferenciální rovnici

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

a nakreslete integrální křivky.

Řešení. Jde o rovnici v separovaném tvaru. Postupujeme podle metody nejprve pro $y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\ .$$

Pro $y \neq 0$ píšeme

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\ \mathrm{dy} = 1\ \mathrm{dx}$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\ \mathrm{dy} = \int 1\ \mathrm{dx}$$

$$\sqrt{y} = x - C\ .$$

Zde metoda v podstatě končí. Vypočítat y z tohoto implicitního tvaru musíme sami.

Budeme důkladně zkoumat kdy a kde je možné rovnici

$$\sqrt{y} = x - C$$

vypočítat.

Upravíme vztah $\sqrt{y} = x - C$ na intervalu $x \geq C$ (pozor, vpravo je a musí být nezáporné číslo!) a dostaneme

$$y = (x - C)^2\ .$$

Podobně pro $y < 0$ dostaneme na intervalu $x \leq D$

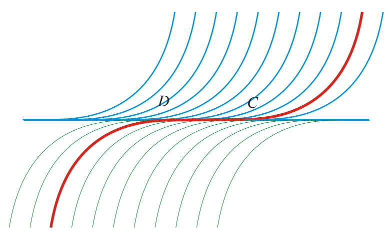
$$y = -(x - D)^2\ .$$

Navíc samozřejmě máme triviální řešení. Celkově dostaneme maximální řešení jako kombinaci řešení na vhodných intervalech. Zvolme $-\infty \le D \le C \le +\infty$. Pak dostaneme maximální řešení ve tvaru (ověřte)

$$y(x) = \begin{cases} -(x-D)^2 & \text{pro } x < D\,, \\ 0 & \text{pro } D \le x \le C\,, \\ (x-C)^2 & \text{pro } x < D\,. \end{cases}$$

Všimněme si, že to dává i triviální řešení.

Integrální křivky jsou na obrázku



Všimněme si, že všechna řešení jsou neklesající funkce.

Alespoň tohle jsem věděl hned na začátku ;-)

Příklad. Spočtěte diferenciální rovnici

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

a nakreslete integrální křivky.

Řešení. Jde o rovnici v separovaném tvaru. Postupujeme podle metody nejprve pro $|y| < 1$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}\,.$$

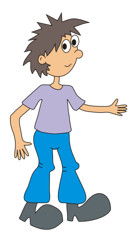
Píšeme

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ \mathrm{dy} = 1\ \mathrm{dx}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ \mathrm{dy} = \int 1\ \mathrm{dx}$$

$$\arcsin y = x - C\,.$$

Zde metoda v podstatě končí. Vypočítat y z tohoto implicitního tvaru musíme sami.



Asi to budeme sinovat …

Upravíme vztah $\arcsin y = x - C$ na intervalu $-\pi/2 < x - C < \pi/2$ (pozor, vpravo musí být funkční hodnota arkussinu!) a dostaneme

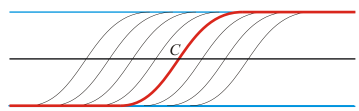
$$y = \sin(x - C)\,.$$

Navíc samozřejmě máme triviální řešení ± 1. Celkově dostaneme maximální řešení jako kombinaci řešení na vhodných intervalech. Zvolme $-\infty \le C \le +\infty$. Pak dostaneme maximální řešení ve tvaru

$$y(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < C - \pi/2, \\ \sin(x - C) & \text{pro } C - \pi/2 \le x \le C + \pi/2, \\ 1 & \text{pro } x > C + \pi/2. \end{cases}$$

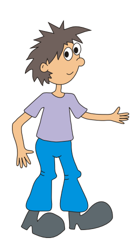
Všimněme si, že to dává i obě triviální řešení.

Integrální křivky jsou na obrázku



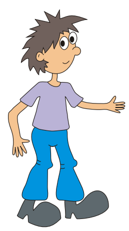
Z těch sinusovek jsou tam jenom půlky, tak se to nekříží. O.K.

Všimněme si také, že všechna řešení jsou neklesající funkce.



Alespoň tohle jsem věděl hned na začátku ;-)

Kdo se splete při počítání inverzní funkce, tomu se mohou řešení křížit a vypadá směšně.



Nikdy ;-)

Příklad. Spočtěte diferenciální rovnici

$$y' = 2xy$$

a nakreslete směrové pole a integrální křivky.

Řešení. Jde o rovnici v separovaném tvaru. Postupujeme podle metody

$$\frac{dy}{dx} = 2xy\,.$$

Pro $y \neq 0$ píšeme

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{dy} = 2xdx$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{dy} = \int 2xdx$$

$$\log|y| = x^2 + C\,.$$

Zde metoda v podstatě končí. Vypočítat y z tohoto implicitního tvaru musíme sami.

Upravíme pomocí exponenciály vztah

$$\log|y| = x^2 + C$$

a dostaneme

$$|y| = \exp x^2 + C\,.$$

Z praktického hlediska výsledek vyjádříme ve tvaru odpovídající linearitě daného problému

$$y = \pm K \exp x^2$$

s vhodnou konstantou $K = e^C$. Ta konstanta K je kladná, pro $y > 0$ uvažujeme v rovnosti místo $\pm$ znaménko $+$, pro $y < 0$ uvažujeme v rovnosti místo $\pm$ znaménko $-$. Pro $y = 0$ máme triviální řešení $y(x) = 0$.

Celkově tedy lze psát řešení ve tvaru

$$y = M \exp x^2\,,$$

kde M je libovolné reálné číslo.

Tento trik se používá často!

Směrové pole a integrální křivky jsou na obrázku

Příklad. Spočtěte diferenciální rovnici

$$y' - 2xy = -2x$$

a nakreslete integrální křivky.

Řešení. Jde o rovnici v separovaném tvaru. Řešíme nejdřív homogenní rovnici a dostaneme podle předchozího příkladu řešení homogenní rovnice je ve tvaru

$$Cy_h(x) = C \exp x^2\,,$$

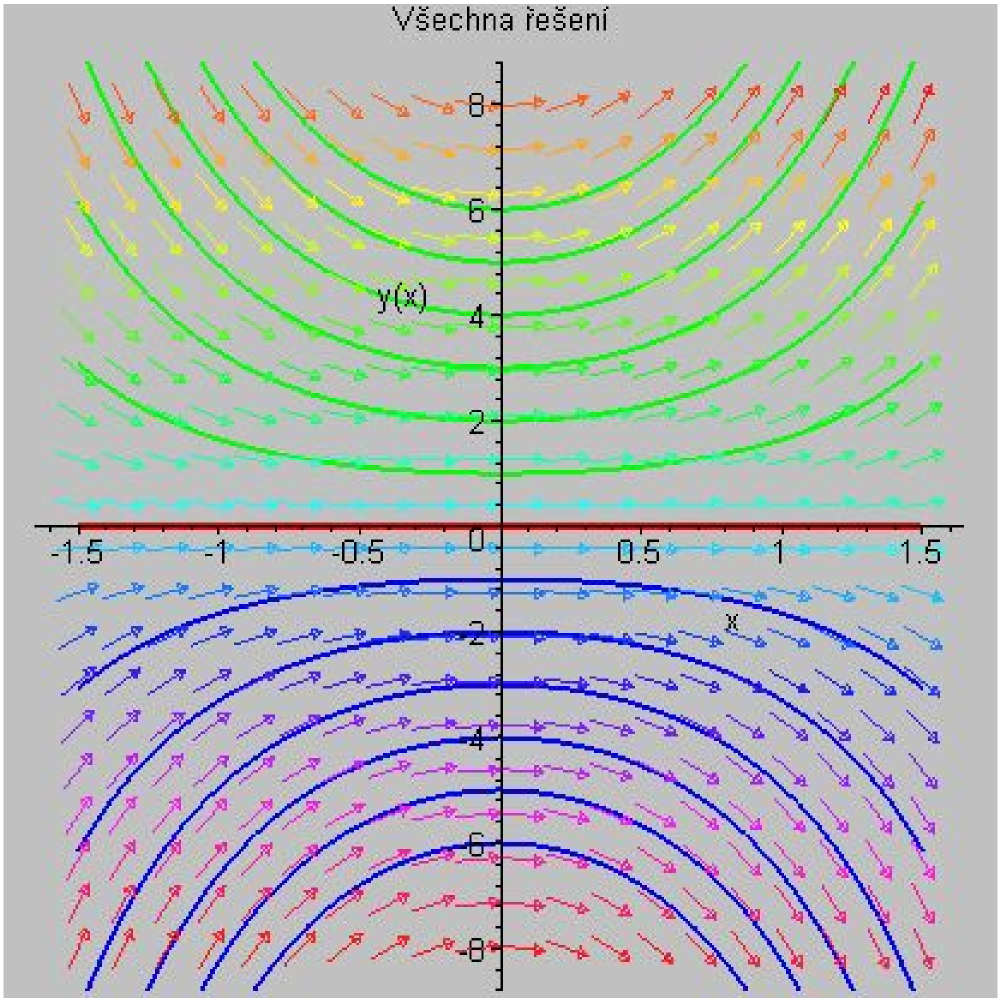
kde C je libovolné reálné číslo.

Dál postupujeme netodou variace konstant, tedy hledáme řešení ve tvaru

$$y(x) = C(x) \exp x^2$$

pro vhodnou funkci C.

Takže nám ta konstanta "obživne".



Dosadíme tento tvar do rovnice $y' - 2xy = -2x$ (předpokládáme přitom, že C má vlastní derivaci) a dostaneme

$$\left(C(x)\exp x^2\right)' - 2xC(x)\exp x^2 = -2x\ .$$

Po úpravě tedy

$$C'(x) = -2x\exp(-x^2)\ .$$

Zintegrováním spočteme

$$C(x) = \exp(-x^2) + K\ .$$

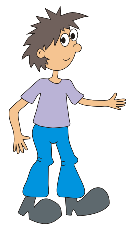
Jako partikulární řešení tedy můžeme vzít libovolné takovéto řešení. Položíme tedy například pro $K = 0$

$$y_0(x) = C(x)(\exp x^2 + 0) = 1\ .$$

Obecné řešení je tedy

$$y(x) = y_0(x) + Cy_h(x) = 1 + C\exp x^2\ .$$

Obrázek integrálních křivek vznikne modifikací křivek z předchozího příkladu.



Bylo to nějaké jednoduché. Doufám, že taky budu takový šťastlivec.

Variace konstant je vlastně ve své druhé fázi substituce. Místo y hledáme C.

VŽDY vyjde jednodušší rovnice. Bude ve tvaru $C'(x) = \varphi(x)$ pro vhodnou φ. Půjde tedy (snad) integrovat.

Příklad. Spočtěte křivky kolmé ke křivkám v systému $x^2 + y^2 = cx$, kde c je parametr.

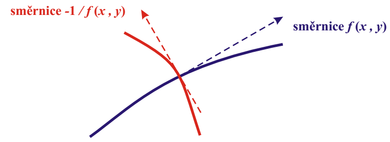
Řešení. Pokud daná křivka vyhovuje v bodě vztahu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ ,$$

vyhovuje v tomtéž bodě křivka k ní kolmá vztahu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \ ,$$

což vidíme z obrázku.



Vezmene systém křivek $x^2 + y^2 = cx$ a zjistíme, jaké diferenciální rovnici vyhovuje.

Tento postup vyžaduje pozornost. Chceme najít diferenciální rovnici, tedy se musíme zbavit toho parametru c.

Zderivujeme rovnici systému křivek a dostaneme

$$2x + 2yy' = c\,.$$

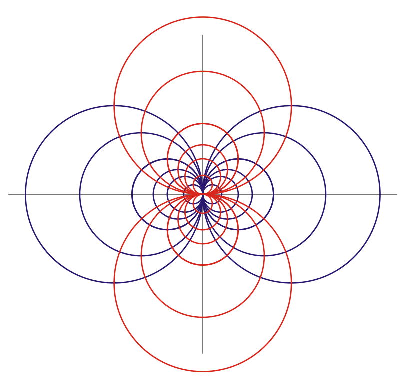
Dosadíme za konstantu c z rovnice systému a dostaneme

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2\,.$$

Křivky kolmé k zadanému systému vyhovující tedy vztahu

$$-2xy\frac{dx}{dy} = y^2 - x^2\,.$$

Vyřešíme tuto diferenciální rovnici a dostaneme implicitním způsobem zadaný systém křivek $x^2+y^2 = cy$. Obrázek křivek a jejich "kolmic":



Příklad. Banka vyhlásila, že bude poskytovat 100 % roční úrok. Pokud vložíš do banky jednu zlatku, dostaneš za rok dvě zlatky. Ženuška hned rozhodla, že pošle svého mužíčka do banky po půl roce, nechá jej vyzvednout jeden a půl zlatku a hned ji tam zase na půl roku vloží. Tak místo dvou zlatek dostane

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2\,.$$

Pak jí napadlo, že by tam mohl mužíček jít ještě častěji. Nakonec tam stál mužíček od rána do večera, vkládal a vybíral a bankéř rozhodl, že s tím něco udělá. Jak to dopadlo?

Řešení. Bankéř si řekl, že označí $x(t)$ stav mužíčkových peněz v čase t, přičemž $x(0) = 1$ zlatka. Pak si uvědomil, že se vlastně peníze průběžně samy množí a že čím je jich víc, tím víc jich přibývá.

Tak si napsal rovnici

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \ ,$$

čímž zachytil přírůstek peněz $dx(t)$ za čas dt.

Tato rovnice dává řešení $x(t) = e^t$, tedy dal po roce mužíčkovi (ženušce) místo dvou zlatek neuvřitelných e zlatek.

Tak ženuška dosáhla, že banka místo 100% dávala pěkných 172%.

Taková ženuška se prostě nedá vyvážit zlatem . . .

Příklad. Zjistěte zákon radioaktivního rozpadu.

Řešení. V atmosféře se vlivem kosmického záření vytváří radioaktivní izotop uhlíku C^{14}. Tento izotop je nestálý a rozpadá se s poločasem rozpadu 5568 ± 30 roků. Tak se v atmosféře vytváří i rozpadá a ustálila se jeho rovnováha.

Podobně se C^{14} rozpadá v žijícím organismu a je neustále doplňován z prostředí. Takto je v žijícím organismu jeho množství na jisté rovnovážné hladině. Pokud organismus nežije, nastává proces poklesu hladiny C^{14}, protože není doplňován.

Rovnice popisující množství C^{14} v čase t vypadá

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \ ,$$

kde k je záporná konstanta.

Řešení $x(t) = x(0)e^{kt}$ použijeme pro zjištění stáří fosílií. Známe-li množství C^{14} ve fosílii nyní a umíme-li odhadnout množství C^{14} v čase $t = 0$, zjistíme dobu, po kterou probíhalo odbourávání C^{14} v organizmu. Například $x(5568) = x(0)/2$, tak určíme konstantu k (souvisí s "poločasem rozpadu").

Takto se například zjistila doba, kdy lidstvo osídlilo Ameriku nebo kdy se stavěl Stonehenge.

Příklad. Po západu slunce přestali námořníci veslovat. Je bržděna pouze třením, nefouká vítr. Za 10 sekund doplula 30 metrů, za dalších 10 sekund doplula ještě 15 metrů. Kde se zastaví?

Řešení. Označíme si m hmotnost lodi s nákladem, $v(t)$ její rychlost v čase t a nechť kladná konstanta k odpovídá tření, které pro malé rychlosti (snad) závisí lineárně na rychlosti.

Pak

$$ma(t) = m\frac{dv}{dt} = -kv$$

vyjadřuje, že třecí síla působí na těleso a brzdí jej ($a(t)$ je zrychlení a záporné znaménko vypovídá o směru síly proti pohybu).

Tedy

$$\frac{dv}{dt} = -mkv$$

má řešení $v(t) = v(0)e^{-mkt}$.

Vzhledem k tomu, že je rychlost $v(t)$ derivací dráhy $s(t)$, tedy $ds/dt = v$, můžeme integrováním rychlosti získat dráhu

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau = \frac{v(0)}{mk}(1 - e^{-mkt}) .$$

Vidíme, že

$$s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{v(0)}{mk} .$$

Víme, že $s(10) = 30$ a $s(20) = 45$.

S těmito informacemi vytlačíme ze vzorečku pro $s(\infty)$ nežádoucí konstanty a dostaneme

$$s(\infty) = \frac{30^2}{60 - 45} = 60 ,$$

tedy loď dopluje ještě 15 metrů, celkem bez pohonu 60 metrů.

Zase ta milá exponenciální funkce ...

Příklad. Růst populace P závisí na přímo její velikosti. Na druhé straně je zpomalován problémy s dostatkem potravin. Pokud je maximální velikost populace rovna M, pak faktor $M - P$ brzdí přirozený růst populace. Řešte tedy úlohu

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P) ,\ P(0) = P_0 .$$

Této rovnici se říká logistická rovnice.

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky nebo substitucí $p = 1/P$ dostaneme řešení

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{M} + \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right) e^{-kMt}$$

a populace se bude blížit M.

A zase . . .

Příklad. Na stole je čerstvě upečená bábovka, kdy se bude moci jíst?

Řešení. Zákon ochlazování říká, že rychlost, s jakou se těleso ochlazuje, je přímo úměrná rozdílu teplot. Tedy teplota $T(t)$ v čase t vyhovuje rovnici

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T^*) ,$$

kde T^* je konstantní teplota okolí a k je konstanta.

Dosadíme-li si $x(t) = T(t) - T^*$, dostaneme rovnici $dx/dt = kx$ a obvyklé exponenciální řešení.

Pro výpočet potřebujeme nějaké údaje, například za kolik minut se ochladí o kolik stupňů a jakou teplotu měla na začátku.

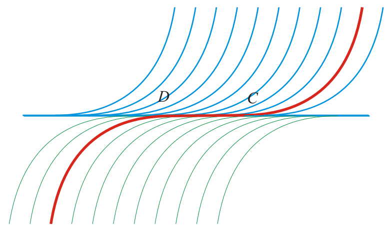
Podobně stanovují kriminalisté dobu činu . . .

Konec cvičení 1.

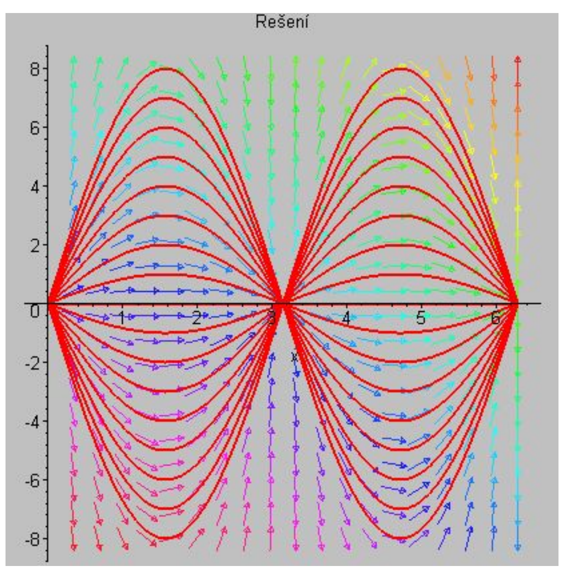
Učení 1:

Mně se ta řešení naschvál protínají. Můžu to tak nechat?

NE. Je dovolen jenom letmý dotek:



Pozor, křížit se mohou jen "neřešení", například na kraji definičního oboru:



Konec učení 1.

DIFFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

Podobně jako u rovnic 1. řádu se i diferenciální rovnice 2. řádu uvádějí v implicitním tvaru $F(x, y, y', y'') = 0$ nebo ve tvaru vyřešeném pro y'', tj. $y'' = f(x, y, y')$.

Opět je potřeba znát větu o existenci a jednoznačnosti řešení. V další části bude ukázáno, že řešení diferenciální rovnice 2. řádu je stejné jako řešení určité soustavy dvou diferenciálních rovnic 1. řádu, a pro ty se věta o existenci a jednoznačnosti řešení dokazuje podobně jako pro jednu diferenciální rovnici 1. řádu.

Tedy budeme mít podobné výsledky jako pro rovnici 1. řádu.

VĚTA. Existence a jednoznačnost řešení 2. Nechť funkce $f(x, y, y')$ je spojitá v okolí bodu (x_0, y_0, y_1). Pak existuje v okolí tohoto bodu řešení rovnic

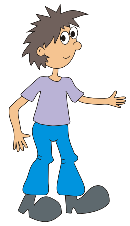
$$y'' = f(x, y, y')\,, \quad y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y_1\,.$$

Jsou-li navíc i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$, $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ spojité v okolí bodu (x_0, y_0, y_1), pak je toto řešení jediné.

Pozor. U rovnice 2. řádu musíme mít dvě počáteční podmínky!!!

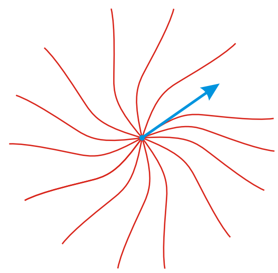
Opravdu. Z každého bodu každým směrem startuje jedno řešení.

A tak se budou muset zákonitě křížit v každém bodě.



A nebudou se muset dělat ty obrázky :-)

Z daného bodu daným směrem existuje řešení.



Taky si uvědomíme, že se zpravidla jedná o modelování nějaké reálné situace. Proto křivky popisující reálné řešení nemusí být grafy funkcí.

To bylo ostatně i u toho trosečníka. Láhev mohla plout přímo na sever.

Není problém v tom případě otočit soustavu souřadnic.

SPECIÁLNÍ PŘÍPADY FUNKCE f

Budeme nejprve zkoumat jednodušší typy rovnic.

Protože ty alespoň jdou spočítat.

Případ $y'' = f(x)$

Dvojí integrací se dostane

$$y = \int \Big(\int f(x)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dx} + C_1 x + C_2\,.$$

Ve výsledku jsou dvě volitelné konstanty, které se určí z počátečních podmínek $y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y_1$ pro řešení.

Je-li f spojitá na intervalu I, dvojí integraci lze provést a pro libovolná čísla y_0, y_1 se dají najít jediná C_1, C_2 tak, že výsledné řešení $y(x)$ splňuje počáteční podmínky (ověřte).

To je v souladu s větou o existenci.

Případ $y'' = f(y)$

Po vynásobení rovnice faktorem $2y'$ bude levá strana tvaru $2y'y''$ a tato funkce proměnné x má za primitivní funkci y'^2 proměnné x. Pravá strana je tvaru $2f(y)y'$ a tato funkce proměnné x má za primitivní funkci $2F(y)$ proměnné x, kde F je primitivní k f. To znamená, že $y'^2 = 2F(y) + C_1$.

Tím se dostala diferenciální rovnice prvního řádu (v implicitním tvaru) se separovanými proměnnými. Uvedený postup vyžaduje opatrnost. Jednak se násobilo $2y'$ a tedy se mohla ztratit konstantní řešení $y = y_0$ pro $f(y_0) = 0$. Dále je nutné se omezit jen na takové y a C_1, že $2F(y) + C_1 \geq 0$.

Případ $y'' = f(y')$

Substitucí závisle proměnné $z(x) = y'(x)$ se převede rovnice na rovnici 1.ř. $z' = f(z)$, jejímž řešením je

$$x = \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)} = F(z) + C\,.$$

Nyní je nutné za z dosadit zpátky y' a vyřešit diferenciální rovnici 1.řádu $x = F(y') + C$, což nemusí být jednoduché.

Protože se dělilo funkcí f, jsou dalšími řešeními původní rovnice i lineární funkce $y = ax + b$, kde a jsou kořeny rovnice $f(t) = 0$.

V předchozích případech jsme vlastně snižovali řád rovnice vhodnou substitucí. To lze provést i u následujících dvou případů.

Případ $y'' = f(x, y')$

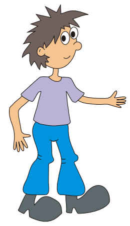
Substitucí závisle proměnné $z(x) = y'(x)$ se převede rovnice na rovnici 1.ř.

$$z' = f(x, z)\,.$$

Její řešení se musí ještě jednou zintegrovat

$$y = \int z(x)\,\mathrm{dx} + C_2\,.$$

V obecném řešení pro z vyjde konstanta C_1.



Vzhledem k tomu, že tam y chybělo, to bylo jasné.

Případ $y'' = f(y, y')$

Dosazením nové funkce p vztahem $y' = p(y)$ se opět sníží řád rovnice, protože $y'' = p'(y)y' = p'p$ a tedy dostaneme rovnici

$$p'p = f(y, p)\,.$$

Po vyřešení této rovnice se musí vyřešit i rovnice $y' = p(y)$.

Nejde vůbec o jednoduché věci. Pozor při řešení!!!

LINEÁRNÍ O.D.R. 2.ŘÁDU

Rovnice

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

se nazývá lineární.

Stejně jako u lineárních rovnic 1. řádu je důvodem pro tento název skutečnost, že levá strana je lineární vzhledem k proměnné y.

Důsledkem je opět vlastnost, že je-li $q = 0$, pak lineární kombinace několika řešení této rovnice je zase jejím řešením – ověřte.

Věta o existenci se na tento případ aplikuje snadno: *Jsou-li funkce a_0, a_1, q spojité na intervalu I, prochází každým bodem $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ právě jedno řešení lineární diferenciální rovnice $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$ splňující rovnosti $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$.*

Není vždy možné nalézt řešení lineární diferenciální rovnice řádu aspoň dva. Ale vždy lze řešení nalézt pro homogenní rovnice s konstantními koeficienty a_0, a_1.

Pozor! Tento postup se musí umět i o půlnoci.

Nechť koeficienty a_0, a_1 v rovnici $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ jsou konstantní a λ_1, λ_2 jsou kořeny tzv. charakteristické rovnice $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.

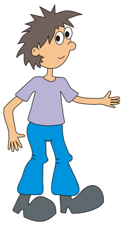
Pak existují dvě lineárně nezávislá řešení y_1, y_2 rovnice $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ tvaru

1. $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$, pokud λ_1, λ_2 jsou různé reálné kořeny;
2. $xe^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_1 x}$, pokud λ_1, λ_2 jsou stejné kořeny;
3. $e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, pokud λ_1, λ_2 jsou komplexní kořeny tvaru $\alpha \pm \beta$i.

Obecné řešení dané rovnice je pak tvaru $C_1y_1 + C_2y_2$ (viz *Otázky*).

Dostali jsme úplné řešení :-)

V podstatě se jedná o trivialitu. Hledáme řešení ve tvaru $e^{\lambda x}$, dosadíme do rovnice a najdeme možná λ. Při tom se objeví ta charakteristická rovnice.



Takže se začalo hádáním. Pak se počítalo. Někdy to bývá obráceně.

Na nehomogenní rovnici půjdeme zase s variací konstant:

Známe-li dvě lineárně nezávislá řešení y_1, y_2 rovnice bez pravé strany, získáme řešení rovnice s pravou stranou variací konstant, tj. řešení je tvaru $C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, kde C_1, C_2 jsou řešení soustavy

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= q \end{aligned}$$

(viz *Otázky* pro vysvětlení).

Ve speciálních případech pravé strany lze partikulární řešení rovnice uhodnout:

Je-li pravá strana $q(x)$ tvaru $P_k(x)e^{ax}\sin(bx)$ (nebo $\cos$ místo $\sin$), kde P_k je polynom stupně k, je partikulární řešení tvaru

$$x^r\left(Q_k(x)e^{ax}\sin(bx) + R_k(x)e^{ax}\cos(bx)\right),$$

kde Q_k, R_k jsou polynomy stupně k a

1. $r = 0$, jestliže $a + bi$ není kořenem charakteristické rovnice;
2. $r = 1$, jestliže $a + bi$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice;
3. $r = 2$, jestliže $a + bi$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (pak $b = 0$).

Dosadí-li se tento obecný tvar řešení s zatím neznámými koeficienty v polynomech Q_k, R_k do původní rovnice, dají se tyto koeficienty vypočítat porovnáním koeficientů u stejných mocnin.

S obecnou rovnicí druhého řádu si neporadíme.

Nicméně je tu jeden hezký trik:

Známe-li jedno řešení $u(x)$ lineární rovnice $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, substitucí $y = u \cdot z$ dostaneme rovnici

$$uz'' + z'(2u' + a_1 u) = q\,,$$

u které lze další substitucí $w = z'$ snížit řád a vyřešit.

Dá se ukázat, že to, co bylo nyní zjištěno pro lineární rovnice s konstantními koeficienty, platí i pro obecnější případ:

VĚTA. Nechť je dána rovnice $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y = q(x)$, kde funkce a_0, a_1, q jsou spojité na intervalu I.

1. Obecné řešení rovnice je součtem obecného řešení homogenní rovnice $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y = 0$ a jednoho řešení nehomogenní rovnice.
2. Obecné řešení homogenní rovnice je lineární kombinací dvou lineárně nezávislých řešení, tj. tvaru

$$C_1y_1 + C_2y_2\,,$$

   kde y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá (pro $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ není $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ v žádném (ekv., aspoň v jednom) bodě I).
3. Dvě řešení y_1, y_2 rovnice bez pravé strany jsou lineárně nezávislá právě když tzv. Wronského determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

   je nenulový alespoň v jednom bodě $x \in I$ (pak je nenulový na celém I).

S tím Wronského determinantem se dobře počítá. Zkuste si to.

Lineární rovnice vyššího řádu se počítají obdobně jako pro řád 2.

Což je podobné řádu 1. O.K.

Poznámky 2:

1. Nelineární diferenciální rovnice 2. a vyšších řádů jsou obvykle velmi těžké k řešení a většinou se řeší přibližně.

K řešení lze použít i vyjádření funkcí pomocí nekonečných řad (např. mocninných nebo Fourierových). Jeden takový příklad je uveden v *Otázkách*.

K řešení slouží i jiné metody, jako převádění na integrální rovnice, řešení pomocí integrálních transformací (např. Laplaceova, Fourierova), aj.

Řada speciálních rovnic již našla svého řešitele. Další ještě čekají :-)

2. Na tvar řešení lineárních rovnic vyšších řádů než 1 s konstantními koeficienty se dá přijít úsudkem, že budou podobná jako řešení lineárních rovnic 1.řádu, a tedy tvaru $e^{\lambda x}$.

Dosadí-li se tato možnost řešení do rovnice, snadno je vidět, že $e^{\lambda x}$ bude řešením rovnice pokud bude λ řešením uvedené charakteristické rovnice. Proveďte podrobnosti.

Není nad šestý smysl.

3. Je-li pravá strana lineární diferenciální rovnice tvaru $g_1 + g_2$, lze využít linearity levé strany a zjistit partikulární řešení pro každou funkci zvlášť.

Je-li $L(y) = g_1(x) + g_2(x)$ a $y_i, i = 1, 2$, jsou řešení rovnic $L(y) = g_i(x)$, pak $y_1 + y_2$ je řešením původní rovnice.

Při řešení není dobré míchat jablka a hrušky.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Vyřešte následující rovnice snížením řádu vhodnou substitucí:

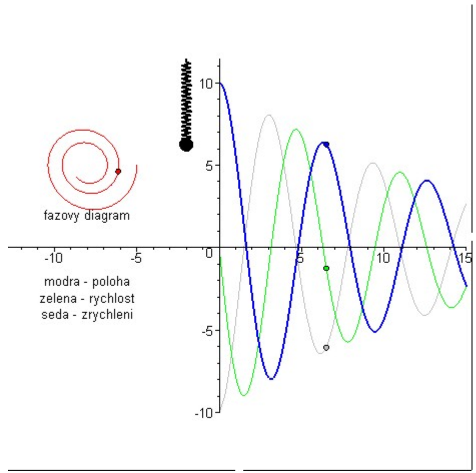
$$xy'' + y' = x^2 , \quad y'' + y = 0 .$$

2. Vyřešte rovnici $y'' - 2y + y = 0$ snížením řádu, znáte-li jedno řešení $y = e^x$.

3. Vyřešte následující nehomogenní rovnice jak metodou variace konstant tak metodou neurčitých koeficientů:

$$y'' + 2y' - 3y = 6 , \quad y'' - 6y' + 9y = e^{3x} , \quad y'' - y = x \cos x e^x .$$

3. Je-li hmotná částice upevněna na péru, které volně visí z nějakého bodu a natáhnete-li péro, začne částice kmitat. Průběh tohoto kmitání se snadno popíše diferenciální rovnicí.



Podle Newtonova zákona je síla rovna součinu hmotnosti a zrychlení. Zrychlení je druhá derivace dráhy podle času, hmotnost m je konstantní a síla bude nepřímo úměrná hmotnosti a úměrná dráze, a bude působit proti směru pohybu. Tím se dostane rovnice $my'' = -ky/m$, což po úpravě dává $y'' + a^2y = 0$.

Tato rovnice má řešení $y = C_1 \sin(at) + C_2 \cos(at)$ – pro počáteční podmínky $y(0) = x_0, y'(0) = 0$ se dostane $y = x_0 \cos(at)$ (tzv. volné harmonické kmity).

Jestliže se vezme v úvahu i tření, které je nepřímo úměrné hmotnosti a přímo úměrné rychlosti a působí proti směru pohybu, dostává se rovnice $y'' + 2by' + a^2y = 0$ s řešením při stejných počátečních podmínkách $y = x_0e^{-bt} \cos(\sqrt{a^2 - b^2}t)$ (tzv. tlumené kmity).

Je možné, že na hmotný bod působí ještě nějaká rušivá periodická síla $c \sin(\omega t)$, která se stává pravou stranou nehomogenní lineární rovnice $y'' + 2by' + a^2y = c \sin(\omega t)$. Zkuste tuto rovnici vyřešit.

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1.a. Dokažte, že v textu uvedená řešení y_1, y_2 lineární rovnice s konstantními koeficienty pro kořeny λ_1, λ_2 charakteristické rovnice jsou opravdu lineárně nezávislá.

K tomu můžete použít buď definici lineární nezávislosti nebo tvrzení 3 (to má přímý důkaz – proveďte jej), tj. musí být nenulový determinant matice

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

aspoň v jednom bodě (ekvivalentně, ve všech bodech).

Lineární rovnice vedou na úlohy a tématikou z lineární algebry.

b. Ukažte, že pro každý bod $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ existují konstanty C_1, C_2 takové, že řešení $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (kde y_1, y_2 jsou předchozí lineárně nezávislá řešení) splňuje počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$.

Uvědomte si, že z toho již vyplývá, že $C_1 y_1 + C_2 y_2$ je opravdu obecné řešení dané rovnice.

2. Prověřte, že na rovnice určující partikulární řešení nehomogenní lineární rovnice pomocí variace konstant se přijde následujícím způsobem.

Jako u lineárních rovnic 1.řádu lze očekávat, že partikulární řešení bude tvaru $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, kde y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice.

Dosadíte-li toto očekávané řešení do dané rovnice $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$, dostanete rovnost (berete už v úvahu, že y_1, y_2 jsou řešení homogenní rovnice)

$$(C_1' y_1 + C_2' y_2)' + (C_1' y_1' + C_2' y_2') + a_1(C_1' y_1 + C_2' y_2) = q(x) \,.$$

Protože jsou dvě neznámé a je k dispozici jen jedna rovnost, je možné si zvolit vhodně druhou rovnost, např. $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$, takže pak zbude jako další rovnost jen $C_1' y_1' + C_2' y_2' = q(x)$. To jsou rovnosti uvedené v textu.

To byla stěžejní myšlenka. Dosazením do rovnice dostaneme jednu rovnici pro dvě neznámé. Volbou druhé rovnice dostaneme rovnice pro C_1' a C_2', které jdou vyřešit.

K úspěšnému řešení nám pomohlo, že jsme dostali rovnici jen s C'-čkama. C-čka vypadla díky tomu, že y_1, y_2 jsou řešení homogenní rovnice, C''-čka jsme si sami vyhodili zvolenou rovnicí. O.K.

3. Ukažte, že substituce nezávisle proměnné $x = e^t$ převede rovnici $y''x^2 + py'x + qy = f(x)$ (tzv. Eulerova rovnice) na lineární rovnici $\ddot{y} + a\dot{y} + by = g(t)$, kde tečky nad y značí derivaci podle t na rozdíl od čárek značících derivaci podle x.

Ta rovnice vypadá,jako by se někdo nudil. Nebo že by $y^{(n)} \cdot x^n$ byla náhoda?

4. Řešte diferenciální rovnici $y'' + x^2 y = 0$ pomocí řad.

Předpokládejte, že řešení y lze v nějakém intervalu vyjádřit mocninnou řadou $\sum_0^\infty a_n x^n$. Protože $y' = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ a podobně pro y'', dosazením do diferenciální rovnice a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x^n se získá rekurentní vzorec pro a_n.

Najděte tento rekurentní vzorec a spočtěte prvních 8 koeficientů (první dva budou volitelné).

Používáme informace o derivování mocninné řady z kapitoly 25, je to tak?

Konec otázek 2.

Cvičení 2:

Příklad. Spočtěte řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0\,.$$

Řešení. Řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\,.$$

Dostaneme $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$. Tedy obecné řešení zadané rovnice je ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}\,.$$

Nuda.

Příklad. Spočtěte řešení rovnice

$$y'' + 2y' - 3y = 6 .$$

Řešení. Řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 .$$

Dostaneme $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x .$$

Označíme $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^x$.
Zřejmě jde o lineárně nezávislá řešení. To se zjistí pomocí Wronského determinantu

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^x \\ -3e^{-3x} & e^x \end{vmatrix} = 4e^{-3x}e^x \neq 0 .$$

Hledáme řešení zadané nehomogenní rovnice ve tvaru $y(x) = C_1(x)e^{-3x} + C_2(x)e^x$.
Dosadíme toto očekávané řešení do dané rovnice $y'' + 2y' - 3y = 6$.
Za tím účelem si spočítáme

$$y'(x) = -3C_1(x)e^{-3x} + C_2(x)e^x + C_1'(x)e^{-3x} + C_2'(x)e^x .$$

Zde při počítání druhé derivace dostaneme určitě C_1'' a C_2'', což je nemilé. Zachrání nás možnost zvolit jednu pomocnou rovnici. Tedy položíme

$$C_1'(x)e^{-3x} + C_2'(x)e^x = 0 .$$

Tím se vyhneme těm C_1'' a C_2''. S touto pomocnou rovnicí spočítáme $y''(x)$ lehce

$$y''(x) = 9C_1(x)e^{-3x} + C_2(x)e^x + -3C_1'(x)e^{-3x} + C_2'(x)e^x .$$

Dosadíme nyní do rovnice připravené vztahy. Dostaneme po úpravě

$$-3C_1'e^{-3x} + C_2'(x)e^x = 6 .$$

Spolu s pomocnou rovnicí budeme tedy řešit soustavu

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{-3x} + C_2'(x)e^x &= 0 \\ -3C_1'e^{-3x} + C_2'(x)e^x &= 6 \end{aligned}$$

s neznámými C_1' a C_2'.
Spočteme

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{3}{2}e^{3x} \\ C_2'(x) &= \frac{3}{2}e^x . \end{aligned}$$

Spočteme primitivní funkce

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\frac{1}{2}e^{3x} + K_1 \\ C_2(x) &= -\frac{3}{2}e^x + K_2 . \end{aligned}$$

Pak

$$y(x) = C_1(x)e^{-3x} + C_2(x)e^x = -2 + K_1e^{-3x} + K_2e^x .$$

Dostali jsme tedy obecné řešení zadané rovnice. Je tam obsaženo partikulární řešení $y_0(x) = 2$ a lineární kombinace dvou lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice.

Místo variace konstant jsme mohli využít speciálního tvaru pravé strany. Tedy můžeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y_0(x) = A$$

pro vhodnou konstantu A.

Tím lehce spočteme $y_0(x) = 2$.

Kdybychom počítali modifikovaný příklad s jinou pravou stranou, můžeme hledat řešení ve tvaru

pravá strana	tvar řešení
x	ax
e^{2x}	ae^{2x}
xe^{2x}	$(ax+b)e^{2x}$
x^2e^{2x}	$(ax^2+bx+c)e^{2x}$
e^x	axe^x
xe^x	$(ax+b)xe^x$
x^2e^x	$(ax^2+bx+c)xe^x$
$x\cos(5x)e^{2x}$	$(ax+b)\cos(5x)e^{2x} + (ax+b)\sin(5x)e^{2x}$

Pokud je vpravo polynom, má řešení také polynom stejného nebo nižšího stupně.

Pokud je vpravo exponenciála, má řešení také takovou exponenciálu.

Pokud je vpravo sinus nebo kosinus, má řešení obecně sinus i kosinus.

Pravidla se tvůrčím způsobem kombinují.

Tedy dostanem tvar řešení jako lineární kombinaci polynomů, exponenciál, sinů a kosinů.

Díky lineární nezávislosti takových výrazů dovedeme příslušné koeficienty spočítat.

Podle počtu neznámých koeficientů musíme sestavit příslušný počet rovnic. To půjde díky tomu, že funkce vystupující v rovnici jsou lineárně nezávislé.

Tedy například z rovnice

$$a \sin x + bxe^{x} + c \cos(3x)e^{-2x} + dx^3 = 0$$

spočítáme díky lineární nezávislosti zúčastněných funkcí výsledek $a = b = c = d = 0$.

Tedy z jedné rovnice o 4 neznámých spočteme všechny. O.K.

Příklad. Dvě tělesa o hmotnosti m_1, m_2 ve vzdálenosti r se přitahují vzájemně gravitační silou

$$F_g = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\ ,$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zkoumejte volný pád tělesa přitahovaného gravitační silou Země.

Řešení. Budeme zkoumat padající těleso. Označíme $x(t)$ dráhu volného pádu bez tření a vidíme, že použití gravitační síly mg udělí tělesu zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$mg = F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}\ .$$

Použili jsme druhý pohybový zákon: síla = hmotnost * zrychlení.
Tedy dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\ .$$

Řešení rovnice jsou funkce

$$x(t) = \frac{1}{2}dt^2 + v_0 t + x_0\ ,$$

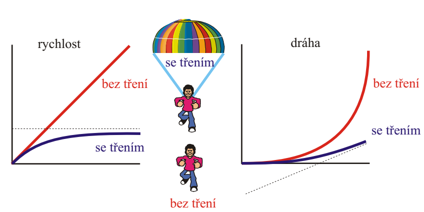
kde x_0 a v_0 udávají počáteční polohu a rychlost.
Pokud započítáme navíc sílu tření, dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - c\frac{dx}{dt}\ .$$

Pro nulové počáteční podmínky funkce dostaneme

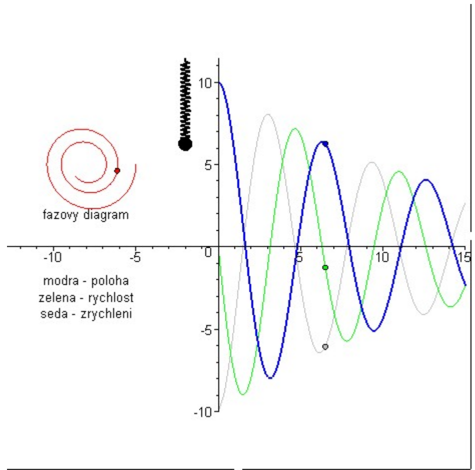
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct})\ ,$$

což potvrzuje známý fakt, že rychlost při volném pádu se třením neroste nade všechny meze.



Příklad. Zkoumejte kmitání závaží zavěšeného na pružině.

Řešení. Pružina v klidovém stavu má délku l. Po zavěšení závaží o hmotnosti m se prodlouží o délku d. Rovnováha nastane, pokud bude gravitační síla mg rovna síle pružiny, kterou je úměrná prodloužení.



Tedy platí rovnovážný stav $kd = mg$ s vhodnou konstantou k. Pokud závaží popotáhneme ještě o x dolů, prodlouží se na celkovou délku $l + d + x$. Nyní na závaží působí síla

$$mg - k(d + x) = -kx\ .$$

Tato síla uvádí po uvolnění závaží do pohybu se zrychlením x'', tedy musíme vyřešit rovnici

$$mx'' + kx = 0\ .$$

Pokud chceme ještě uvažovat tření, bude rovnice s časovou proměnnou t vypadat

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = 0\ .$$

Jedná se o volné tlumené kmity pružiny. Pokud tuto pružinu držíme v ruce a začneme ji ovlivňovat vnější silou $F(t)$, bude mít úloha ještě pravou stranu

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = F(t)\ .$$

Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

vede na řešení $x(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ s vhodnými konstantami a, b.
Zkoumejme rovnici s vnější silou

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F(t)\ .$$

Pokud je vnější síla periodická, například

$$F(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

a $\omega \neq \omega_0$, lze najít řešení ve tvaru

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\cos\omega_0 t\ .$$

Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = (\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega_0 t$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x'(0) = 0$ má řešení

$$x(t) = \cos\omega t - \cos\omega_0 t\ =\ 2\sin\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\ \sin\frac{\omega_0 - \omega}{2}t.$$

Pokud bude frekvence ω struny na kytaře blízko frekvence ω_0 ladičky, bude jeden sinus mít malou frekvenci $\omega_0 - \omega$ a uslyšíme znatelné pulsy v síle zvuku.

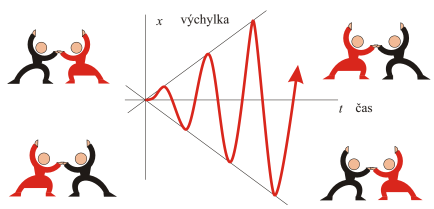
Rovnice

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = A\omega^2 \cos \omega t$$

má řešení

$$x(t) = \frac{1}{2} A\omega \, t \, \sin \omega t \, .$$

Řešení v sobě kumuluje vnější impuls a rozkmitá se nade všechna očekávání.



Postavíme-li mobilní telefon na pružnou podložku a ta se prohne o 2 milimetry, při jakém vyzváněcím tónu začne mobil tancovat?

Zpravidla se nelze vyhnout tlumení způsobenému třením. V rovnici

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = 0$$

můžeme dostat při silném tření například řešení

$$2e^{-2t} - e^{-t}$$

a pružina neosciluje.

Při slabém tření například řešení

$$e^{-t} \cos t$$

a pružina se bude uklidňovat do nekonečna kmitáním.

Při tření "tak akorát"(jedna speciální hodnota) bude například řešením

$$e^{-t}(1 + t) \, .$$

Konec cvičení 2.

Učení 2:

$(y'')^2 \stackrel{?}{=} (y^2)''$

Speciální úpravy se NEPOVOLUJÍ.

$\frac{\mathrm{dy}}{y} \stackrel{?}{=} d$

To "dé ypsilon"se nekrátí. I když je libovolně malé, nedovolujte si k němu nic ošklivého.

Konec učení 2.

SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

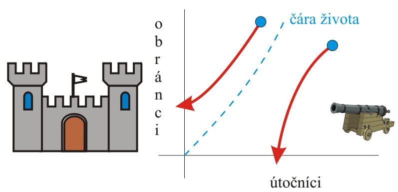
Podobně jako u jediné diferenciální rovnice se i soustavy diferenciálních rovnic dají uvést buď v implicitním tvaru nebo ve tvaru rozřešeném pro derivace funkcí.

Soustavy lze obvykle substitucemi převést na soustavy 1.řádu (tj. vyskytují se v nich jen derivace 1.řádu – viz *Otázky*).

Soustavy diferenciálních rovnic jsou důležité v mnoha aplikacích.

Příkladem soustavy může být soustava zachycující počet útočníků $x(t)$ a počet obránců $y(t)$ v čase t nesmyslné války:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= -2y(t) \\
y'(t) &= -x(t)\,.
\end{aligned}
$$



V daném okamžiku přesně víme, jak se bude válka bezprostředně vyvíjet. Řešením soustavy zjistíme úplnou budoucnost.

Zase budeme z lokální informace počítat globální.

Postupy budou vysvětleny na soustavě 1.řádu dvou rovnic o dvou neznámých y, z proměnné x.
Obecný tvar takové soustavy vyřešené vzhledem k derivacím je

$$
\begin{aligned}
y' &= f_1(x, y, z) \\
z' &= f_2(x, y, z)\,,
\end{aligned}
$$

kde f_1, f_2 jsou funkce 3 proměnných.

Soustava popisuje dvě veličiny, jejichž vývoj je ovlivňován vzájemnou interakcí.

Příslušná existenční věta pro uvedenou soustavu vypadá následovně:

VĚTA. Existence a jednoznačnost řešení 3. Nechť funkce $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ a jejich první parciální derivace podle y a z jsou spojité v oblasti G. Pak pro každý bod $(x_0,y_0,z_0) \in G$ existuje jediné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x,y,z) \\ z' &= f_2(x,y,z)\,, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínky $y(x_0)=y_0, z(x_0)=z_0$.

Důkaz. se skoro neliší od důkazu existence a jednoznačnosti pro jednu diferenciální rovnici 1.řádu. Rozdíly jsou jen formální dané jinou situací. Proveďte důkaz sami.

Každou diferenciální rovnici 2.řádu $y''=f(x,y,y')$ lze převést pomocí nové závisle proměnné $z=y'$ na soustavu 1.řádu, která má stejná řešení pro y:

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= f(x,y,z)\,. \end{aligned}$$

Za určitých dosti obecných předpokladů lze i obráceně soustavu, např. dvou rovnic 1.řádu, převést na jednu diferenciální rovnici 2.řádu.

LINEÁRNÍ SOUSTAVY

Lineární soustava diferenciálních rovnic je tvaru

$$\begin{aligned} y' &= ay + bz + g \\ z' &= cy + dz + h\,, \end{aligned}$$

kde a, b, c, d, g, h jsou funkce proměnné x definované na intervalu I.
Tvrzení o existenci a řešení pro tento případ říká:

VĚTA. Nechť v uvedené lineární soustavě diferenciálních rovnic jsou funkce a, b, c, d, g, h spojité na intervalu I Pak pro každé $x_0 \in I, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení y, z soustavy, které je definované na celém I a pro nějž platí $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty lze vždy řešit. Podobně je tomu u lineární soustavy. Nechť jsou tedy funkce a, b, c, d konstantní.

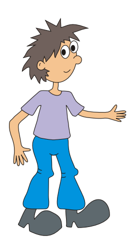
To děláme pro jednoduchost. Realita se musí přizpůsobit. Zatím.

Dalším předpokladem je nenulový determinant soustavy $ad - bc$ (rozvažte, co nastane, je-li tento determinant nulový).
Z posledního předpokladu plyne, že lze vypočítat v okolí daného bodu $x_0 \in I$ např. z z první rovnice a dosadit do druhé rovnice:

$$z = (y' - ay - g)/b, z' = (y'' - ay')/b \quad \text{a tudíž } y'' - y'(a + d) - y(bc - ad) = bh - dg\,.$$

Výsledkem je tedy lineární diferenciální rovnice 2.řádu. Jejím vyřešením se dostane řešení y původní soustavy a dosazením do $z = (y' - ay - g)/b$ se dostane řešení z.

Převod soustav na jednu rovnici a naopak je užitečná. Stačí budovat teorii jenom pro jeden případ.



Tedy stačí umět jen jedno. Jenom co si teda vybrat ...

Existují i jiné postupy.

Např. lze řešení (y, z) brát jako vektor Y, koeficienty jako matici A, takže soustavu lze přepsat do tvaru

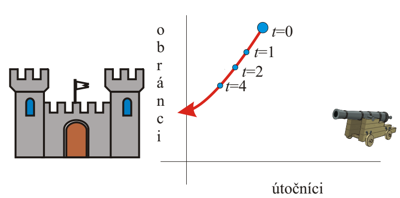
$$Y' = AY + G\,,$$

kde G je vektor (g, h). Pro podrobnosti, jak dále postupovat, viz *Příklady*.

Maticový a vektorový zápis je formální zjednodušení zápisů. Podstata zůstane stejná.

Poznámky 3:

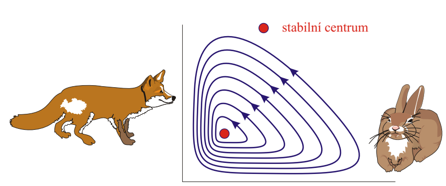
V systému dvou diferenciálních rovnic $x' = f(t, x, y), y' = g(t, x, y)$ lze chápat t jako parametr a řešení $x(t), y(t)$ jako parametrické vyjádření křivky.



Grafickým řešením jsou tedy křivky v rovině, partikulárním řešením je křivka procházející daným bodem. Tento pohled bude podrobněji probrán v další části této kapitoly.

Lišky a králíci.

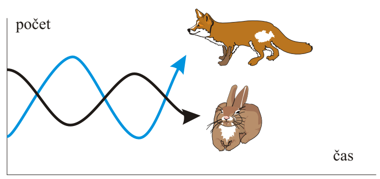
Známým příkladem sestavení soustavy diferenciálních rovnic je soužití lišek a králíků na nějaké nekonečné louce, kde je neomezené množství jetele pro králíky. Nechť $x(t)$ udává počet králíků v čase t a $y(t)$ značí počet lišek.



Protože králíci mají dost potravy, jejich časový přírůstek je přímo úměrný počtu králíků. Ale lišky králíky požírají tím více, čím více je nejen lišek ale i králíků. Tím se dostane vztah $x' = ax - bxy$ pro nějaká kladná čísla a, b.

Podobně je to s přírůstkem lišek: čím více je lišek, tím je jejich přírůstek menší (protože mají méně potravy), ale čím více je králíků, tím je přírůstek lišek více. Výsledný vztah je $y' = -cy + dxy$ pro nějaká kladná čísla c, d.

Uvedenou soustavu nelze vyřešit pomocí elementárních funkcí. Nicméně lze počítačem nakreslit grafy funkcí x a y. Oba grafy jsou podobné sinusoidám navzájem vůči sobě posunuté.



Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Vyřešte homogenní soustavu

$$\begin{aligned} y' &= -7y + z \\ z' &= -2y - 5z\,. \end{aligned}$$

2. Vyřešte nehomogenní soustavu

$$\begin{aligned} y' &= z + \cos x \\ y' &= 1 - y\,. \end{aligned}$$

3. Řešení homogenní lineární soustavy $Y' = AY + G$ (v maticovém tvaru) s konstantními koeficienty se hledá ve tvaru $Y = Be^{\lambda x}$, kde B je vektor (tzv. vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ).

Dosazením do soustavy se získá rovnost $\lambda B = AB$ neboli $(A - \lambda I)B = 0$, kde I je diagonální matice s jedničkami v diagonále.

Aby poslední rovnost měla netriviální řešení B, musí být determinant soustavy roven 0 – dostane se přesně charakteristická rovnice lineární diferenciální rovnice 2.řádu příslušné k dané soustavě.

Necht' λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice.

Pokud $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a B_1, B_2 jsou příslušná řešení rovnic $\lambda_i B = AB$, pak $Y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 x}$ je obecné řešení dané soustavy rovnic (c_i jsou reálné konstanty).

Jsou-li kořeny komplexní $a \pm ib$, lze snadno převést získané komplexní řešení na reálné stejným způsobem, jako tomu bylo u lineárních diferenciálních rovnic. Dostane se obecné řešení ve tvaru

$$Y = e^{ax}(B_1(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx)) + B_2(c_2\cos(bx) - c_1\sin(bx)))\,,.$$

Pokud $\lambda_1 = \lambda_2$, dostane se jediný vlastní vektor B a musí se najít další vektory B_1, B_2 tak, že $(B_1 + B_2 x)e^{\lambda_1 x}$ je řešení soustavy. Pak je obecné řešení tvaru

$$Y = e^{\lambda_1 x}(c_1 B + c_2(B_1 + B_2 x))\,.$$

Použijte tuto metodu na předchozí příklad 1.

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

1. Převeďte rovnici $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$ na soustavu

$$\begin{aligned} y' &= ay + bz + g \\ z' &= cy + dz + h\,. \end{aligned}$$

2. Diferenciální rovnici $F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ lze převést na soustavu n diferenciálních rovnic 1.řádu substitucemi $y_1 = y, y_2 = y', ..., y_n = y^{(n-1)}$. Napište výslednou soustavu rovnic.

3. Uvažte, kdy lze soustavu

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z) \end{aligned}$$

převést na jednu diferenciální rovnici 2.řádu. Můžete předpokládat existence prvních parciálních derivací funkcí f_1, f_2 v okolí bodu, ve kterém řešení hledáte.

Konec otázek 3.

Cvičení 3:

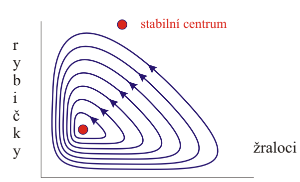
Příklad. Jak vzpomínají žraloci na 1. světovou válku?

Řešení. Sestavíme soustavu rovnic popisující soupeření dvou populací rybiček a žraloků.

Rybičky jsou x a žraloci y. Podobně jako u lišek a králíků sepíšeme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy\,. \end{aligned}$$

Stacionární řešení je $(c/d, a/b)$ je stabilní centrum.



Když se k soustavě dravec-kořist přidá vnější vliv, například rybolov v moři, projeví se to na pravé straně členy $-\varepsilon x$, $-\varepsilon y$. Tím v podstatě modifikujeme konstanty a a c. Posune se tím hodnota stabilního řešení ve prospěch jedné (čí?) strany.

Nové centrum bude $((c+\varepsilon)/d, (a-\varepsilon)/b)$, tedy oproti předchozímu stavu $(c/d, a/b)$ je v novém rovnovážném stavu více rybiček a méně žraloků.

Rybáři za 1. světové války nemohli ve Středozemním moři lovit, tak tam vzhostl počet žraloků a poklesl stav rybiček.

Jak tedy vzpomínají žraloci na 1. světovou válku. Se smíšenými pocity. Bylo jich spousta, ale měli hlad.

Příklad. Do boje jdou dvě armády (například mikroorganismů). Jejich počty v čase t označíme $x(t)$ a $y(t)$. Úbytek jedné armády je přímo úměrný velikosti druhé. Tady platí vztahy

$$\frac{dx}{dt} = -ky \; , \; \frac{dy}{dt} = -kx$$

s vhodnou konstantou k (předpokládáme stejně šikovné armády). Jak bude probíhat boj?

Řešení. Vynásobíme první rovnici x a druhou rovnici y a odečteme:

$$x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = 0 \; , \quad \text{čili} \quad \frac{d(x^2-y^2)}{dt} = 0 \; .$$

Vidíme tedy řešení $x^2 - y^2 = c$ pro vhodnou konstantu c.

Tedy pokud byly armády veliké x_0 a y_0, platí na konci války v čase T rovnost

$$x_0^2 - y_0^2 = x(T)^2 - y(T)^2 = x(T)^2 \; ,$$

tedy zbyde armáda x o velikosti

$$x(T) = \sqrt{x_0^2 - y_0^2} \; .$$

Pokud silná armáda z bojuje postupně se dvěma armádami x a y, zůstane

$$z(T) = \sqrt{z_0^2 - x_0^2 - y_0^2} \; .$$

V roce 1805 v bitvě u Trafalgaru admirál Nelson rozdělil loďstvo silnějšího protivníka na dvě poloviny a bojoval nejprve s jednou a pak s druhou polovinou. Vyhrál. Mohl to udělat lépe?

Příklad. Budeme se zabývat neštovicemi, což je vysoce nakažlivá nemoc. Pokud jí však někdo nepodlehne, získá natrvalo imunitu proti dalšímu nakažení.¨ Uvažujeme pouze populaci narozenou v čase $t = 0$ a její další vývoj. Označme $x(t)$ populaci v čase t a $y(t)$ tu část populace, která ještě neměla nemoc. Z důvodu nakažení se y zmenšuje rychlostí ay, kde a je koeficient nakažení, celková populace x se z důvodu nemoci zmenšuje rychlostí aby, kde b je koeficient úmrtnosti na nemoc.

Z důvodů nesouvisejících s nemocí se x i y zmenšují s rychlostí $d(t)$ závisející na čase t (roky). Sestavte soustavu popisující tuto situaci a vyřešte ji.

Řešení. Rovnice popisující tyto závislosti vypadají

$$\frac{dx}{dt} = -aby - d(t)x \ , \ \frac{dy}{dt} = -ay - d(t)y \ .$$

První rovnici vynásobíme y a druhou x a odečteme. Pak

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = -aby^2 + axy \ .$$

Vynásobíme integračním faktorem $1/y^2$ a dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = -ab + a\frac{x}{y} \ .$$

Tedy pro poměr $z = x/y$ dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = -ab + az \ , \ z(0) = 1$$

s řešením $z(t) = b + (1-b)e^{at}$.

Čili pro odhad konstant $a = b = 1/8$ dostaneme hodnotu $z(20)$ přibližně rovnu 11. Tedy pouze asi 9% dvacetiletých ještě neprodělalo nemoc.

Příklad. Převeďte jednu lineární rovnici vyššího řádu na soustavu lineárních rovnic prvního řádu. Řešení. Soustava

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots &= \ldots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

je šikovný zápis mnoha problémů.
Na tento zápis se dá převést problém

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

obsahující pouze jednu neznámou funkci pomocí převodního vztahu

$$x_1 = x, \ x_2 = x', \ \ldots, \ x_n = x^{(n-1)} \ ,$$

který vede k zápisu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ \ldots &= \ldots\ldots \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \ . \end{aligned}$$

Příklad. Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= 6x \end{aligned}$$

převeďte na jednu rovnici.
Formálním výpočtem

$$(D-1)x = y \ \ \& \ \ Dy = 6x \implies D(D-1)x = Dy = 6x \implies (D^2 - D - 6)x = 0$$

získáme rovnou řešení.

Takovýto formalismus je jistě v pořádku. Jenom tak jednodušší formou zapisujeme derivování rovnic formálním násobením operátorem D.

Práce s maticemi při řešení diferenciálních rovnic vede na řadu zajímavých postupů. Například lze definovat exponenciála od matice.

Soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2 \end{aligned}$$

lze psát maticovým a vektorovým zápisem

$$X' = AX + F$$

nebo též ve tvaru $TX = F$, kde $TX = X' - AX$.
Soustava

$$X' = AX \ , \ X(0) = I \ ,$$

kde I je jednotková matice, má řešení

$$X(t) = e^{At} \ ,$$

kde používáme operátorový počet $A \mapsto e^A$ (popřípadě definujeme e^A pomocí konvergentní řady $I + A/1! + A^2/2! + \cdots$).

Příklad. Nechť je dvojice pružin se závažími z rovnovážných pozic vychýlena tak, že horní závaží o hmotnosti m_1 je vychýleno o x a dolní závaží o hmotnosti m_2 je vychýleno o y směrem dolů. Řešte soustavu

$$m_1 x'' = k_2(y - x) - k_1 x \ , \ m_2 y'' = k_2(y - x)$$

popisující chování systému.

Řešení. Po dosazení z první do druhé dostaneme pro y rovnici

$$(D^4 + (a+b+c)D^2 + ab)y = 0$$

pro vhodné konstanty.

Charakteristická rovnice má jednoduché komplexní kořeny, proto je řešení y i x ve tvaru

$$c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t + c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t \,.$$

Zde ω_1 a ω_2 jsou přirozené frekvence systému.

Proto se to chová tak chaoticky.

Konec cvičení 3.

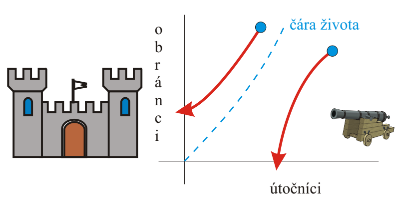
Učení 3:

Já se bojím o králíčky. Řešit tu soustavu nebudu.

Konec učení 3.

STABILITA ŘEŠENÍ

Uvažujme opět situaci útočníků a obránců. Podle počátečních podmínek buď zvítězí útočníci, nebo obránci.

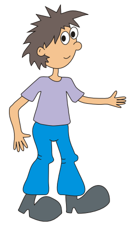


Existuje linie, která odděluje počáteční podmínky zaručující přežití jedné skupiny.

V libovolném okolí bodu na čáře života jsou počáteční podmínky vhodné pro obě skupiny.

Pokud by válku počítal počítač a trochu zaokrouhloval při výpočtech, tak si nemůžeme být jisti, zda lze věřit výpočtům a na čí vítězství vsadit.

Pokud soustava má chování takové, že globální chování jejího řešení je nezávislé na počátečních podmínkách, máme pocit stability.



Politická stabilita je tedy závislá na chování.

Není vždy možné najít přesné řešení diferenciální rovnice pro dané počáteční podmínky a je vhodné vědět, zda řešení, které jen málo nesplňuje počáteční podmínky v bodě x_0 se málo liší od správného řešení na celém intervalu.

DEFINICE. Řešení $\overline{y}$ rovnice $y'' = f(x, y, y')$, splňující počáteční podmínky $\overline{y}(x_0) = y_0, \overline{y}'(x_0) = y_1$ se nazývá stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé řešení y Z podmínky

$$|y(x_0) - y_0| < \delta, |y'(x_0) - y_1| < \delta$$

vyplývá

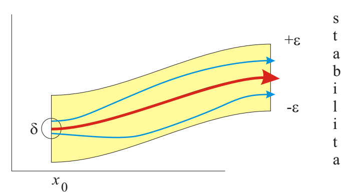
$$|y(x) - \overline{y}(x)| < \varepsilon, |y'(x) - \overline{y}'(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x > x_0 .$$

Jestliže platí navíc

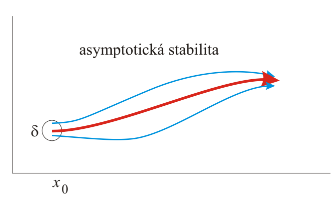
$$\lim_{x\to\infty} |y(x) - \overline{y}(x)| = \lim_{x\to\infty} |y'(x) - \overline{y}'(x)| = 0 ,$$

nazývá se $\overline{y}(x)$ asymptoticky stabilní.

Takto znázorníme stabilitu řešení:



Takto znázorníme asymptoticky stabilní řešení:



Podobně se definuje stabilita řešení soustavy diferenciálních rovnic. Nechť je dána soustava

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z) , \end{aligned}$$

kde f_1, f_2 jsou spojité funkce na intervalu $I \times J \times K$, a jsou dány počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$ pro $x_0 \in I, y_0 \in J, z_0 \in K$.

DEFINICE. Řešení $\overline{y}, \overline{z}$ uvedené soustavy, které splňuje uvedené počáteční podmínky, se nazývá stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé řešení y, z soustavy platí

$$|y(x_0) - y_0| < \delta, |z(x_0) - z_0| < \delta \Rightarrow |y(x) - \overline{y}(x)| < \varepsilon, |z(x) - \overline{z}(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x > x_0 .$$

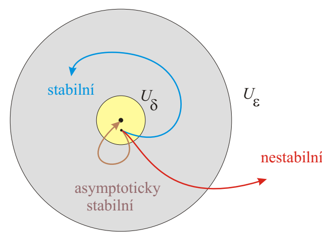
Pokud navíc

$$\text{resp. } \lim_{x\to\infty} |y(x) - \overline{y}(x)| = \lim_{x\to\infty} |z(x) - \overline{z}(x)| = 0\,,$$

nazývá se řešení $\overline{y}, \overline{z}$ asymptoticky stabilní.

Někdy se ještě definuje striktně stabilní řešení, což je řešení, které je současně stabilní a asymptoticky stabilní. Pokud není řešení ani stabilní ani asymptoticky stabilní, nazývá se nestabilní.

Následující obrázek znázorňuje stability nulového řešení homogenní lineární soustavy dvou rovnic.



Existují dosti obecné podmínky určující stabilitu řešení diferenciálních rovnic.

Pro názornost bude ukázán případ homogenní lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty a jeho nulového řešení. Nulového řešení proto, že je to tzv. kritický nebo singulární bod (viz *Poznámky*). V tomto případě je asymptoticky stabilní nulové řešení i stabilní.
Je dobré si všimnout, že odečtením vhodné lineární funkce (jaké?) se převede vyšetřování stability libovolného řešení na vyšetřování stability nulového řešení.

VĚTA. Nulové řešení rovnice $y'' + py' + qy = 0\,,\,(p, q \in \mathbb{R})$, je

1. asymptoticky stabilní právě když $p > 0$ a $q > 0$;
2. stabilní a není asymptoticky stabilní právě když $p = 0$ a $q > 0$;
3. nestabilní právě když buď $p < 0$ nebo $p > 0$ a $q < 0$.

Důkaz lze provést vyřešením rovnice (proveďte).

Názorně lze pojem stability ukázat na řešení homogenní lineární soustavy diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

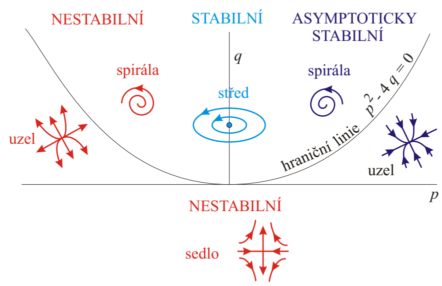
$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy\,, \end{aligned}$$

kde řešení x, y jsou funkce proměnné t (např. chápané jako čas) a dávají parametrické vyjádření křivky v rovině. Předpokládá se, že determinant soustavy $ad - bc$ je nenulový. Soustavy, které neobsahují explicitně nezávisle proměnnou, se nazývají autonomní a mají specifické vlastnosti.

Bod $(0, 0)$ v rovině je kritický bod uvedené soustavy a jeho stabilita je daná předchozí větou, kde $p = -(a + d), q = ad - bc$.

Pomocí kořenů λ_1, λ_2 charakteristické rovnice $\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$ lze rovněž charakterizovat stabilitu nulového řešení a lze ji ještě dále rozdělit na zajímavé případy:

1. Jsou-li oba kořeny reálné, pak je nulové řešení buď uzel mají-li oba kořeny stejné znaménko (asymptoticky stabilní pro plus a nestabilní pro minus) nebo sedlo mají-li opačná znaménka (nestabilní).
2. Jsou-li oba kořeny komplexně sdružené, pak je nulové řešení buď střed, jsou-li kořeny ryze imaginární nebo ohnisko spirály buď konvergující k 0 (je-li reálná část kořenů záporná) nebo vzdalující se od 0 (je-li reálná část kořenů kladná) – v tomto posledním případě je 0 nestabilní.



Poznámky 4:

Kritické body diferenciálních rovnic se lépe vysvětlují na soustavách rovnic. Jak už bylo naznačeno v předchozím textu, je lépe brát funkce x, y jako funkce parametru t (času) a představovat si tuto dvojici jako parametrické vyjádření křivky v rovině.

Nechť je dána tzv. autonomní soustava (funkce na pravých stranách nezávisí na čase)

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\,, \end{aligned}$$

kde f, g jsou spojité funkce v rovině a mají tam spojité parciální derivace prvního řádu.

Každým bodem roviny prochází řešení této soustavy, které se nemění s "časem".

Fyzikálně si lze tento stav představit jako proudění částic v rovině, přičemž směr a rychlost proudění v daném bodě nezávisí na čase.

Může se stát, že graf řešení je jediný bod (x_0, y_0)(tj., pro každé t je $x(t) = x_0, y(t) = y_0$)?

To nastane, jestliže $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Takovému bodu v rovině se říká kritický nebo stacionární bod dané soustavy (někdy i singulární bod).

Kritické body jsou pak ty body, kde stojí částice na místě. Proudění okolo takových bodů je velmi zajímavé a popisují jej pojmy stability.

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. Popište stabilitu kritických bodů soustavy

$$\begin{aligned} x' &= -3x + y \\ y' &= -2x\,. \end{aligned}$$

2. Popište stabilitu kritických bodů soustavy

$$\begin{aligned} x' &= -x - x^2 + xy \\ y' &= -y + xy - y^2\,. \end{aligned}$$

V obou případech nakreslete příslušná vektorová pole v okolí kritického bodu.

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

1. Ukažte, že kritické body diferenciální rovnice popisující pohyb hmotného bodu zavěšeného na péru, jsou krajní body pohybu bodu (tj. když je péro nejvíce stlačené nebo nejvíce natažené).

Narýsujte vektorové pole řešení příslušné soustavy rovnic (první souřadnice je poloha bodu, druhá souřadnice je jeho rychlost v tomto bodě).

Konec otázek 4.

Cvičení 4: Příklad. Uvažujme dva státy a jejich armády x a y (počty vojáků $x(t)$ a $y(t)$ závisí na čase t). Pokud označíme A, B jejich vzájemnou nedůvěru, C, D ceny zbraní a E,F společenskou poptávku po zbrojení, lze zkoumat soustavu

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ay(t) - Cx(t) + E \\ \frac{dy(t)}{dt} &= Bx(t) - Dy(t) + F\,. \end{aligned}$$

Je proces odzbrojování stabilní?

Příklad. Přidáme-li samoomezující člen do rovnice dravec-kořist, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -kx - ax^2 + bxy = x(-k - ax + by) \\ \frac{dy}{dt} &= my - cxy - dy^2 = y(m - cx - dy)\,. \end{aligned}$$

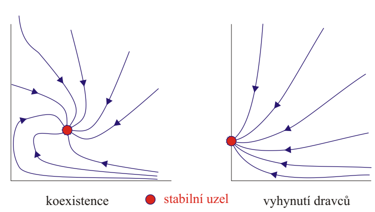
Zjistěte stabilitu řešení.

Řešení. Řešení je vždy stabilní. Rovnovážný stav odpovídá konstantám

$$x_0 = \frac{bm - dk}{ad - bc}\ ,\ y_0 = \frac{am + ck}{ad + bc}\ .$$

y_0 je vždy kladné, ale x_0 může být nula. To vede k vyhynutí dravců.

Dravci se raději musí krotit, aby si nevyjedli zdroje potravy.



Budeme řešit obecně nelineární úlohy, například

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y)\ .\end{aligned}$$

Pravá strana určuje, jak se při daném stavu $x(t)$ a $y(t)$ bude měnit funkce x a y.

Pokud jednu rovnici vydělíme druhou, dostaneme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}\,, \quad \text{nebo} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}\,.$$

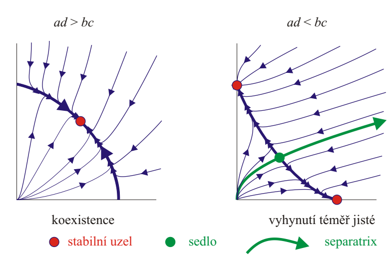
Tedy ve fázové rovině (x, y) mají trajektorie v každém bodě jasně definovanou směrnici, čímž se otevírá názorná možnost, jak se o řešení hodně dozvědět pomocí trajektorií.

Příklad. Zkoumejte soupeřivé populace pomocí soustavy diferenciálních rovnic. Řešení. Uvažujeme soustavu rovnic popisující soupeření dvou populací x a y

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= kx - ax^2 - bxy = x(k - ax - by)\,, \\
\frac{dy}{dt} &= my - dy^2 - dxy = y(m - cx - dy)\,.
\end{aligned}$$

Člen xy v rovnicích odpovídá vzájemné interakci obou populací.
Vynulováním jednotlivých činitelů zjistíme stacionární body soustavy. Pro určité parametry existuje stabilní uzel dovolující přežití obou populací, jindy jediné stabilní řešení vede k zániku jedné populace. Křivku oddělující oblasti vedoucí k vyhynutí jedné populace budeme nazývat separatrix.

Někdy vyhynou jedni, jindy ti druzí . . .

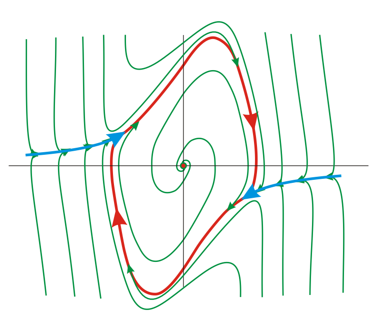


Příklad. Příkladem nelineární soustavy rovnic je soustava popisující nelineární oscilátor

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y \\
\frac{dy}{dt} &= k(1 - x^2)y - x\,.
\end{aligned}$$

Zkoumejte pomocí počítače fázovou rovinu.

Řešení. Tato soustava má (nejen díky obrázku) periodické řešení.



Podobný charakter mají procesy v lidském těle.
Tvorba některých látek se spouští až při indikaci jejich nedostatku. Tak v těle hladiny těchto látek periodicky kolísají.

Zásobu dříví na zimu si děláte až když minulá zásoba dochází.

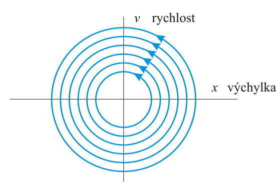
Příklad. U rovnice

$$u'' + pu' + qu = 0$$

můžeme zkoumat fázovou rovinu, ve které budeme sledovat chování $(u(t), v(t))$, kde $v(t) = u'(t)$. Křivky $t \mapsto (u(t), v(t))$ budeme nazývat trajektorie, graf trajektorie budeme nazývat orbita. Zkoumejte orbity

$$u'' + qu = 0 \ .$$

Řešení. Rovnice popisuje periodické kmitání.
Rovnici vyřešíme a dostaneme kombinaci sinů a kosinů. Orbity jsou kružnice.



Příklad. Zkoumejte chování kyvadla.
Řešení. Netlumené kyvadlo popisují rovnice

$$\frac{dx}{dt} = y \ , \ \frac{dy}{dt} = -k \sin x \ .$$

Odvodíme z nich, že

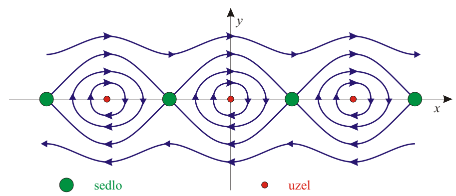
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \sin x}{y} \ .$$

To po separaci proměnných vede na křivky implicitně vyjádřené

$$\frac{1}{2}y^2 + (k - k\cos x) = E \ .$$

Zde y odpovídá rychlosti a první sčítanec odpovídá kinetické energii, druhý sčítanec potenciální energii a součet celkové energii (konstanta nezávislá na čase).

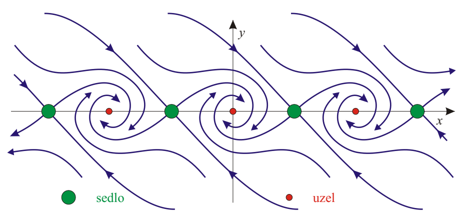
Fázová rovina netlumeného kyvadla:



Tlumené kyvadlo je popsáno rovnicí obsahující člen $-cy$ odpovídající tření

$$\frac{dx}{dt} = y\,,\ \frac{dy}{dt} = -k \sin x - cy\,.$$

Na obrázku vidíme nestabilní sedla a stabilní centrum spirál u tlumeného kyvadla.



Konec cvičení 4.

Učení 4:

Je-li politická situace asymptoticky stabilní, mohu místo ideálního politika zvolit někoho skoro ideálního?

Raději bych obyčejnou stabilitu.

Konec učení 4.