OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diferenciální rovnice patří mezi nejužívanější nástroje matematiky v aplikacích. Jsou to rovnice, kde neznámou je funkce a rovnice obsahuje i derivace této funkce. Lze očekávat, že pro získání řešení je potřeba umět integrovat.

Teorie diferenciálních rovnice je velmi obsáhlá a složitá. Tato kapitola slouží jen k povrchní orientaci v této teorii a není míněna jako přesný matematický výklad. Na některých místech bude nutné použít pojmy z teorie funkcí více proměnných, která je obsažena v dalších kapitolách.

Některé matematické úlohy jdou přibližně spočítat selským rozumem.

Základní rozdělení diferenciálních rovnic je na rovnice :

- *parciální* (ty používají parciální derivace funkcí více proměnných),

- *obyčejné* (ty používají derivace funkcí jedné proměnné).

Parciální diferenciální rovnice se v této části probírat nebudou, a proto se bude v dalším přívlastek „obyčejné" vynechávat nebo se bude název *obyčejné diferenciální rovnice* zkracovat na o.d.r..

Nechť F je funkce $n+2$ proměnných, $n \in \mathbb{N}$, a y je funkcí x. Pak rovnici

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nazýváme obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu.

Řešením této rovnice na intervalu I je funkce $y = y(x)$, která vyhovuje dané rovnici na intervalu I (a tedy má na I derivace až do řádu n).

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1.ŘÁDU

Diferenciální rovnice 1.řádu se uvádí ve tvaru obecném, t.j. $F(x, y, y') = 0$,
nebo ve tvaru vyřešeném pro y', tj. $y' = f(x, y)$.

Nejjednodušší diferenciální rovnicí je rovnice $y' = 0$. Jejím řešením jsou konstantní funkce.

Směr mořských proudů určuje, kam bude plout láhev.

Někdy jde o deterministickou záležitost. Sorry.

Někdy záleží taky na náhodě. Sorry.

Budeme zkoumat, pro které funkce f popisující proudění mořských proudů dostaneme řešení a zda bude jednoznačně určeno.

VĚTA. Existence a jednoznačnost řešení 1. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v okolí bodu (x_0, y_0). Pak existuje v okolí bodu x_0 řešení rovnic

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0\,.$$

Je-li navíc i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ spojitá v okolí bodu (x_0, y_0), pak je toto řešení jediné.

Důkaz. Naznačíme důkaz pro předpoklad spojitosti $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (viz *Poznámky* pro postup bez tohoto předpokladu).

Řešení obou rovnic $y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0$ dohromady je ekvivalentní řešení integrální rovnice

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{dx}$$

na nějakém okolí bodu x_0 (dokažte).

Důkaz té ekvivalence spočívá v derivování rovnosti s integrálem (tím dostaneme první z rovnic). Dosazením $x = x_0$ dostaneme druhou.

Obrácená implikace je snadná (jde o integrál z derivace).

Následující posloupnost funkcí existuje na nějakém okolí bodu x_0:

$$y_0(x) = y_0 \,, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,\mathrm{dx} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \,.$$

Použitím věty o střední hodnotě se dostane odhad

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(c_x)) \right| |y_n(x) - y_{n-1}(x)|\,\mathrm{dx} \leq \\ &\leq K \max_x |y_n(x) - y_{n-1}(x)||x - x_0| \leq \\ &\leq K^n |x - x_0|^n \max_x |y_1(x) - y_0| \,. \end{aligned}$$

Lze nyní zvolit takové malé okolí bodu x_0, že $K|x - x_0| < 1/2$ pro x z tohoto okolí.

V tomto okolí tedy bude pro každé x posloupnost $\{y_n(x)\}$ cauchyovská a bude konvergovat k nějakému bodu, který se označí $y(x)$.

Pomocí věty o přehození limity a integrálu z kapitoly 26 se ukáže, že funkce y řeší uvedenou integrální rovnici.

Pro jednoznačnost viz *Otázky*.

O.D.R. SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

Rovnice

$$y' = g(x)h(y)$$

se nazývá rovnice se separovanými proměnnými, protože se proměnné x, y dají od sebe oddělit.

Napíše-li se y' ve tvaru $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, pak se převodem y na levou stranu a x na pravou stranu dostane rovnost

$$\frac{\mathrm{dy}}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{dx} \quad \text{pro } h(y) \neq 0 \,.$$

Jestliže se nyní formálně přidá před obě strany integrál, dostane se rovnost množiny primitivních funkcí na intervalech, kde existují:

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{dx} \,,$$

což je řešení dané rovnice v implicitním tvaru na oněch intervalech.

Jediná další řešení zadané rovnice $y' = g(x)h(y)$ jsou všechny kořeny rovnice $h(y) = 0$, tj. jestliže $h(y_0) = 0$, pak konstantní funkce $y = y_0$ je řešení dané rovnice.

Jestliže $H(y), G(x)$ jsou primitivní funkce k $1/h(y), g(x)$ resp., na intervalu I, pak pro každé reálné číslo C je funkce $y = y(x)$ zadaná implicitním zápisem $H(y) = G(x) + C$ (pokud existuje) řešením dané rovnice na intervalu I.

Tedy v celku jde o postup:

$$y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = g(x)h(y)$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{dx} \quad \text{pro} \quad h(y) \neq 0$$

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

$$H(y) = G(x) + C$$

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C)\ .$$

s přidáním konstantních řešení (kořenů rovnice $h(y) = 0$).

Věta o existenci řešení říká, že řešení dané rovnice v nějakém bodě (x_0, y_0) existuje, pokud je g spojitá v nějakém okolí bodu x_0 a h spojitá v nějakém okolí bodu y_0. Předchozí postup ukazuje, že řešení může existovat i v jiných případech.

Uvedená věta dále říká, že je-li navíc h' na spojitá v okolí y_0 (nebo je h lipschitzovská), prochází bodem (x_0, y_0) jediné řešení.

Nesmíme zapomenout na to, že diferenciální rovnice a jejich řešení byly po dlouhou dobu zdrojem rozvoje matematické analýzy.

Řešily se základní úlohy z mechaniky, fyziky, chemie a ostatních věd.

To soustředilo na jejich řešení mnoho významných matematiků.

Tím se objevilo spousta různých triků na spousta různých typů rovnic.

O.D.R. S HOMOGENNÍ FUNKCÍ

Funkce $f(x, y)$ dvou proměnných se nazývá *homogenní*, jestliže pro libovolné nenulové reálné číslo t platí $f(tx, ty) = f(x, y)$ v celém definičním oboru funkce f.

Speciálně tedy platí $f(x, y) = f(1, y/x)$ pro $x \neq 0$.

V rovnici $y' = f(x, y)$, kde funkce f je homogenní, lze substitucí nové závisle proměnné $u(x) = y(x)/x$ (a tedy $y' = u'x + u$) přejít na rovnici se separovanými proměnnými:

$$u'x + u = f(1, u)\ .$$

Po vyřešení této rovnice je nutné se vrátit k původní závisle proměnné $y(x)$.

Získaná řešení jsou na intervalech neobsahujících 0. Pokud se jedná např. o intervaly $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ a původní rovnice má smysl pro nějaký bod $(0, y_0)$, je nutné hledat řešení y i v bodě $x = 0$ tak, aby $y(0) = y_0$. Znamená to posunout řešení na obou intervalech tak, aby se jejich jednostranné limity v bodě 0 rovnaly číslu y_0 (za podmínek existenční věty to musí jít). Připomíná to *lepení* primitivních funkcí. Toto lepení se používá i v jiných situacích, např. při hledání řešení rovnic se separovanými proměnnými.

LINEÁRNÍ O.D.R. 1.ŘÁDU

Rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ se nazývá lineární.

Důvodem pro tento název je skutečnost, že levá strana je lineární vzhledem k proměnné y (viz *Poznámky*).

Důsledkem je vlastnost, že je-li $q = 0$, pak lineární kombinace několika řešení této rovnice je zase jejím řešením – ověřte.

Rovnice s nulovou pravou stranou se často nazývá homogenní a s nenulovou pravou stranou pak nehomogenní.

Postupů na získání řešení rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ je několik, např. takovéto tříkrokové řešení (provedeme nejdříve formálně):

1. krok. Nejdříve se vyřeší rovnice s nulovou pravou stranou (tj. $y' + p(x)y = 0$), což je rovnice se separovanými proměnnými. Dostaneme výsledek (podrobnosti proveďte sami):

$$y(x) = Ke^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}}\ .$$

2. krok. Toto řešení $y(x)$ se dosadí do původní rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ a předpokládáme, že K je funkcí x. Po úpravě dostaneme rovnici pro K:

$$K' = q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,.$$

Vyřešíme integrací

$$K(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx} + C\,,$$

kde C je libovolná konstanta.

3. krok. Obecným řešením původní rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ je tedy

$$y(x) = K(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}} \;=\; e^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}}\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx} \,+\, Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,,$$

kde C je libovolná konstanta.

Uvedený postup (záměny konstanty K za funkci $K(x)$) se nazývá variace konstant a je výhodný hlavně pro lineární rovnice vyššího řádu.

Jde vlastně o "uhodnutí"tvaru řešení. Vyřešíme nejdříve podobnou úlohu (homogenní rovnici) k zadané úloze (nehomogenní rovnici). Pak podle výsledku té podobné úlohy ve tvaru $y(x) = K \cdot\; y_h(x)$ zkusíme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $y(x) = K(x) \cdot\; y_h(x)$.

Uvedený postup dává řešení na intervalu I, pokud mají funkce p a $qe^{\int p}$ na tomto intervalu primitivní funkce. V tomto případě má rovnice v každém bodě (x_0, y_0), kde $x_0 \in I$, jediné řešení (protože existuje jediná konstanta C řešící danou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$). Věta o existenci a jednoznačnosti (pro spojitá p, q) pro lineární rovnice tedy vyplývá z uvedeného postupu.

Z tvaru řešení je snadno vidět, že pro libovolné $x_0 \in I$ a libovolné číslo y_0 existuje konstanta C tak, že $y(x_0) = y_0$.

To je v souladu s větou o existenci řešení.

Protože v tomto případě je $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -p(x)$ spojitá funkce na I, řešení existují jediná, což je snadno vidět i z uvedeného obecného řešení.

Všimněte si, že uvedené obecné řešení rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ je součtem obecného řešení homogenní rovnice

$$Cy_h(x) \;=\; Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}}$$

a jednoho partikulárního řešení rovnice nehomogenní.

$$y_0(x) \;=\; e^{-\int p(x)\,\mathrm{dx}}\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx}\,.$$

Obecné řešení rovnice s nulovou pravou stranou je libovolný násobek (číslem) jednoho nenulového partikulárního řešení této rovnice.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

Učení 1

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

Podobně jako u rovnic 1. řádu se i diferenciální rovnice 2. řádu uvádějí v implicitním tvaru $F(x, y, y', y'') = 0$ nebo ve tvaru vyřešeném pro y'', tj. $y'' = f(x, y, y')$.

Opět je potřeba znát větu o existenci a jednoznačnosti řešení. V další části bude ukázáno, že řešení diferenciální rovnice 2. řádu je stejné jako řešení určité soustavy dvou diferenciálních rovnic 1. řádu, a pro ty se věta o existenci a jednoznačnosti řešení dokazuje podobně jako pro jednu diferenciální rovnici 1. řádu.

VĚTA. Existence a jednoznačnost řešení 2. Nechť funkce $f(x, y, y')$ je spojitá v okolí bodu (x_0, y_0, y_1). Pak existuje v okolí tohoto bodu řešení rovnic

$$y'' = f(x, y, y')\,, \quad y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y_1\,.$$

Jsou-li navíc i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$, $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ spojité v okolí bodu (x_0, y_0, y_1), pak je toto řešení jediné.

Z daného bodu daným směrem existuje řešení.

SPECIÁLNÍ PŘÍPADY FUNKCE f

Případ $y'' = f(x)$

Dvojí integrací se dostane

$$y = \int \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x + C_1 x + C_2\,.$$

Ve výsledku jsou dvě volitelné konstanty, které se určí z počátečních podmínek $y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y_1$ pro řešení.

Je-li f spojitá na intervalu I, dvojí integraci lze provést a pro libovolná čísla y_0, y_1 se dají najít jediná C_1, C_2 tak, že výsledné řešení $y(x)$ splňuje počáteční podmínky (ověřte).

Případ $y'' = f(y)$

Po vynásobení rovnice faktorem $2y'$ bude levá strana tvaru $2y'y''$ a tato funkce proměnné x má za primitivní funkci y'^2 proměnné x. Pravá strana je tvaru $2f(y)y'$ a tato funkce proměnné x má za primitivní funkci $2F(y)$ proměnné x, kde F je primitivní k f. To znamená, že $y'^2 = 2F(y) + C_1$.

Tím se dostala diferenciální rovnice prvního řádu (v implicitním tvaru) se separovanými proměnnými. Uvedený postup vyžaduje opatrnost. Jednak se násobilo $2y'$ a tedy se mohla ztratit konstantní řešení $y = y_0$ pro $f(y_0) = 0$. Dále je nutné se omezit jen na takové y a C_1, že $2F(y) + C_1 \geq 0$.

Případ $y'' = f(y')$

Substitucí závisle proměnné $z(x) = y'(x)$ se převede rovnice na rovnici 1.ř. $z' = f(z)$, jejímž řešením je

$$x = \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)} = F(z) + C\,.$$

Nyní je nutné za z dosadit zpátky y' a vyřešit diferenciální rovnici 1.řádu $x = F(y') + C$, což nemusí být jednoduché.

Protože se dělilo funkcí f, jsou dalšími řešeními původní rovnice i lineární funkce $y = ax + b$, kde a jsou kořeny rovnice $f(t) = 0$.

Případ $y'' = f(x, y')$

Substitucí závisle proměnné $z(x) = y'(x)$ se převede rovnice na rovnici 1.ř.

$$z' = f(x, z)\,.$$

Její řešení se musí ještě jednou zintegrovat

$$y = \int z(x)\, \mathrm{d}x + C_2\,.$$

V obecném řešení pro z vyjde konstanta C_1.

Případ $y'' = f(y, y')$

Dosazením nové funkce p vztahem $y' = p(y)$ se opět sníží řád rovnice, protože $y'' = p'(y)y' = p'p$ a tedy dostaneme rovnici

$$p'p = f(y, p)\,.$$

Po vyřešení této rovnice se musí vyřešit i rovnice $y' = p(y)$.

LINEÁRNÍ O.D.R. 2.ŘÁDU

Rovnice

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$$

se nazývá lineární.

Stejně jako u lineárních rovnic 1. řádu je důvodem pro tento název skutečnost, že levá strana je lineární vzhledem k proměnné y.

Věta o existenci se na tento případ aplikuje snadno: *Jsou-li funkce* a_0, a_1, q *spojité na intervalu* I*, prochází každým bodem* $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *právě jedno řešení lineární diferenciální rovnice* $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$ *splňující rovnosti* $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$.

Nechť koeficienty a_0, a_1 v rovnici $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ jsou konstantní a λ_1, λ_2 jsou kořeny tzv. charakteristické rovnice $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Pak existují dvě lineárně nezávislá řešení y_1, y_2 rovnice $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ tvaru

1. $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$, pokud λ_1, λ_2 jsou různé reálné kořeny;
2. $xe^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_1 x}$, pokud λ_1, λ_2 jsou stejné kořeny;
3. $e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, pokud λ_1, λ_2 jsou komplexní kořeny tvaru $\alpha \pm \beta\mathrm{i}$.

Obecné řešení dané rovnice je pak tvaru $C_1y_1 + C_2y_2$ (viz *Otázky*).

Známe-li dvě lineárně nezávislá řešení y_1, y_2 rovnice bez pravé strany, získáme řešení rovnice s pravou stranou variací konstant, tj. řešení je tvaru $C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, kde C_1, C_2 jsou řešení soustavy

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= q \end{aligned}$$

(viz *Otázky* pro vysvětlení).

Je-li pravá strana $q(x)$ tvaru $P_k(x)e^{ax}\sin(bx)$ (nebo $\cos$ místo $\sin$), kde P_k je polynom stupně k, je partikulární řešení tvaru

$$x^r\left(Q_k(x)e^{ax}\sin(bx) + R_k(x)e^{ax}\cos(bx)\right),$$

kde Q_k, R_k jsou polynomy stupně k a

1. $r = 0$, jestliže $a + b\mathrm{i}$ není kořenem charakteristické rovnice;
2. $r = 1$, jestliže $a + b\mathrm{i}$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice;
3. $r = 2$, jestliže $a + b\mathrm{i}$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (pak $b = 0$).

Dosadí-li se tento obecný tvar řešení s zatím neznámými koeficienty v polynomech Q_k, R_k do původní rovnice, dají se tyto koeficienty vypočítat porovnáním koeficientů u stejných mocnin.

Známe-li jedno řešení $u(x)$ lineární rovnice $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, substitucí $y = u \cdot z$ dostaneme rovnici

$$uz'' + z'(2u' + a_1 u) = q\,,$$

u které lze další substitucí $w = z'$ snížit řád a vyřešit.

VĚTA. Nechť je dána rovnice $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$, kde funkce a_0, a_1, q jsou spojité na intervalu I.

1. Obecné řešení rovnice je součtem obecného řešení homogenní rovnice $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ a jednoho řešení nehomogenní rovnice.

2. Obecné řešení homogenní rovnice je lineární kombinací dvou lineárně nezávislých řešení, tj. tvaru

$$C_1 y_1 + C_2 y_2\,,$$

kde y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá (pro $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ není $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ v žádném (ekv., aspoň v jednom) bodě I).

3. Dvě řešení y_1, y_2 rovnice bez pravé strany jsou lineárně nezávislá právě když tzv. Wronského determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový alespoň v jednom bodě $x \in I$ (pak je nenulový na celém I).

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

Učení 2

SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Podobně jako u jediné diferenciální rovnice se i soustavy diferenciálních rovnic dají uvést buď v implicitním tvaru nebo ve tvaru rozřešeném pro derivace funkcí.

Soustavy lze obvykle substitucemi převést na soustavy 1.řádu (tj. vyskytují se v nich jen derivace 1.řádu – viz *Otázky*).

Příkladem soustavy může být soustava zachycující počet útočníků $x(t)$ a počet obránců $y(t)$ v čase t nesmyslné války:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2y(t) \\ y'(t) &= -x(t)\,. \end{aligned}$$

Postupy budou vysvětleny na soustavě 1.řádu dvou rovnic o dvou neznámých y, z proměnné x.

Obecný tvar takové soustavy vyřešené vzhledem k derivacím je

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z)\,, \end{aligned}$$

kde f_1, f_2 jsou funkce 3 proměnných.

VĚTA. Existence a jednoznačnost řešení 3. Nechť funkce $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$ a jejich první parciální derivace podle y a z jsou spojité v oblasti G. Pak pro každý bod $(x_0, y_0, z_0) \in G$ existuje jediné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z)\,, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Důkaz. se skoro neliší od důkazu existence a jednoznačnosti pro jednu diferenciální rovnici 1.řádu. Rozdíly jsou jen formální dané jinou situací. Proveďte důkaz sami.

Každou diferenciální rovnici 2.řádu $y'' = f(x, y, y')$ lze převést pomocí nové závisle proměnné $z = y'$ na soustavu 1.řádu, která má stejná řešení pro y:

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= f(x, y, z)\,. \end{aligned}$$

LINEÁRNÍ SOUSTAVY

Lineární soustava diferenciálních rovnic je tvaru

$$\begin{aligned} y' &= ay + bz + g \\ z' &= cy + dz + h\,, \end{aligned}$$

kde a, b, c, d, g, h jsou funkce proměnné x definované na intervalu I.

Tvrzení o existenci a řešení pro tento případ říká:

VĚTA. Nechť v uvedené lineární soustavě diferenciálních rovnic jsou funkce a, b, c, d, g, h spojité na intervalu I Pak pro každé $x_0 \in I, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení y, z soustavy, které je definované na celém I a pro nějž platí $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty lze vždy řešit. Podobně je tomu u lineární soustavy. Nechť jsou tedy funkce a, b, c, d konstantní.

Dalším předpokladem je nenulový determinant soustavy $ad - bc$ (rozvažte, co nastane, je-li tento determinant nulový).

Z posledního předpokladu plyne, že lze vypočítat v okolí daného bodu $x_0 \in I$ např. z z první rovnice a dosadit do druhé rovnice:

$$z = (y' - ay - g)/b, z' = (y'' - ay')/b \quad \text{a tudíž } y'' - y'(a + d) - y(bc - ad) = bh - dg\,.$$

Výsledkem je tedy lineární diferenciální rovnice 2.řádu. Jejím vyřešením se dostane řešení y původní soustavy a dosazením do $z = (y' - ay - g)/b$ se dostane řešení z.

Např. lze řešení (y, z) brát jako vektor Y, koeficienty jako matici A, takže soustavu lze přepsat do tvaru

$$Y' = AY + G\,,$$

kde G je vektor (g, h). Pro podrobnosti, jak dále postupovat, viz *Příklady*.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3

Učení 3

STABILITA ŘEŠENÍ

Uvažujme opět situaci útočníků a obránců. Podle počátečních podmínek buď zvítězí útočníci, nebo obránci.

Existuje linie, která odděluje počáteční podmínky zaručující přežití jedné skupiny.

V libovolném okolí bodu na čáře života jsou počáteční podmínky vhodné pro obě skupiny.

Pokud by válku počítal počítač a trochu zaokrouhloval při výpočtech, tak si nemůžeme být jisti, zda lze věřit výpočtům a na čí vítězství vsadit.

Pokud soustava má chování takové, že globální chování jejího řešení je nezávislé na počátečních podmínkách, máme pocit stability.

Není vždy možné najít přesné řešení diferenciální rovnice pro dané počáteční podmínky a je vhodné vědět, zda řešení, které jen málo nesplňuje počáteční podmínky v bodě x_0 se málo liší od správného řešení na celém intervalu.

DEFINICE. Řešení $\overline{y}$ rovnice $y'' = f(x, y, y')$, splňující počáteční podmínky $\overline{y}(x_0) = y_0, \overline{y}'(x_0) = y_1$ se nazývá stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé řešení y Z podmínky

$$|y(x_0) - y_0| < \delta, |y'(x_0) - y_1| < \delta$$

vyplývá

$$|y(x) - \overline{y}(x)| < \varepsilon, |y'(x) - \overline{y}'(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x > x_0 .$$

Jestliže platí navíc

$$\lim_{x\to\infty} |y(x) - \overline{y}(x)| = \lim_{x\to\infty} |y'(x) - \overline{y}'(x)| = 0 ,$$

nazývá se $\overline{y}(x)$ asymptoticky stabilní.

Takto znázorníme stabilitu řešení:

Takto znázorníme asymptoticky stabilní řešení:

Podobně se definuje stabilita řešení soustavy diferenciálních rovnic. Nechť je dána soustava

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z) , \end{aligned}$$

kde f_1, f_2 jsou spojité funkce na intervalu $I \times J \times K$, a jsou dány počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$ pro $x_0 \in I, y_0 \in J, z_0 \in K$.

DEFINICE. Řešení $\overline{y}, \overline{z}$ uvedené soustavy, které splňuje uvedené počáteční podmínky, se nazývá stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé řešení y, z soustavy platí

$$|y(x_0) - y_0| < \delta, |z(x_0) - z_0| < \delta \Rightarrow |y(x) - \overline{y}(x)| < \varepsilon, |z(x) - \overline{z}(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } x > x_0 .$$

Pokud navíc

$$\text{resp. } \lim_{x\to\infty} |y(x) - \overline{y}(x)| = \lim_{x\to\infty} |z(x) - \overline{z}(x)| = 0 ,$$

nazývá se řešení $\overline{y}, \overline{z}$ asymptoticky stabilní.

Někdy se ještě definuje striktně stabilní řešení, což je řešení, které je současně stabilní a asymptoticky stabilní. Pokud není řešení ani stabilní ani asymptoticky stabilní, nazývá se nestabilní.

Následující obrázek znázorňuje stability nulového řešení homogenní lineární soustavy dvou rovnic.

Existují dosti obecné podmínky určující stabilitu řešení diferenciálních rovnic.

Pro názornost bude ukázán případ homogenní lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty a jeho nulového řešení. Nulového řešení proto, že je to tzv. kritický nebo singulární bod (viz *Poznámky*). V tomto případě je asymptoticky stabilní nulové řešení i stabilní.

Je dobré si všimnout, že odečtením vhodné lineární funkce (jaké?) se převede vyšetřování stability libovolného řešení na vyšetřování stability nulového řešení.

VĚTA. Nulové řešení rovnice $y'' + py' + qy = 0 , (p, q \in \mathbb{R})$, je

1. asymptoticky stabilní právě když $p > 0$ a $q > 0$;
2. stabilní a není asymptoticky stabilní právě když $p = 0$ a $q > 0$;
3. nestabilní právě když buď $p < 0$ nebo $p > 0$ a $q < 0$.

Důkaz lze provést vyřešením rovnice (proveďte).

Názorně lze pojem stability ukázat na řešení homogenní lineární soustavy diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy\,, \end{aligned}$$

kde řešení x, y jsou funkce proměnné t (např. chápané jako čas) a dávají parametrické vyjádření křivky v rovině. Předpokládá se, že determinant soustavy $ad - bc$ je nenulový. Soustavy, které neobsahují explicitně nezávisle proměnnou, se nazývají autonomní a mají specifické vlastnosti.

Bod $(0, 0)$ v rovině je kritický bod uvedené soustavy a jeho stabilita je daná předchozí větou, kde $p = -(a + d), q = ad - bc$.

Pomocí kořenů λ_1, λ_2 charakteristické rovnice $\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$ lze rovněž charakterizovat stabilitu nulového řešení a lze ji ještě dále rozdělit na zajímavé případy:

1. Jsou-li oba kořeny reálné, pak je nulové řešení buď uzel mají-li oba kořeny stejné znaménko (asymptoticky stabilní pro plus a nestabilní pro minus) nebo sedlo mají-li opačná znaménka (nestabilní).
2. Jsou-li oba kořeny komplexně sdružené, pak je nulové řešení buď střed, jsou-li kořeny ryze imaginární nebo ohnisko spirály buď konvergující k 0 (je-li reálná část kořenů záporná) nebo vzdalující se od 0 (je-li reálná část kořenů kladná) – v tomto posledním případě je 0 nestabilní.

Poznámky 4   Příklady 4   Otázky 4

Cvičení 4

Učení 4