

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH



V reálných situacích závisejí děje obvykle na více proměnných než jen na jedné (např. na teplotě i na tlaku), závislost na jedné proměnné je spíše výjimkou.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH



V reálných situacích závisejí děje obvykle na více proměnných než jen na jedné (např. na teplotě i na tlaku), závislost na jedné proměnné je spíše výjimkou.



Nicméně funkce jedné proměnné tvoří modelový základ pro teorie obecnějších funkcí, tedy i pro funkce dvou, tří a více proměnných.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBECNOSTI



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBECNOSTI



Reálná funkce více proměnných je zobrazení definované na nějaké podmnožině (na svém definičním oboru) euklidovského prostoru \mathbb{R}^n (pro $n > 1$) s hodnotami v \mathbb{R} .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBECNOSTI



Reálná funkce více proměnných je zobrazení definované na nějaké podmnožině (na svém definičním oboru) euklidovského prostoru \mathbb{R}^n (pro $n > 1$) s hodnotami v \mathbb{R} .



Protože body \mathbb{R}^n jsou n -tice reálných čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) , bývá takováto funkce f často značena jako $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, což vysvětluje termín *více proměnných*.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence

kompaktnost

vlastnosti

konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Boľzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity

funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cylindrické souřad-

nice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

OBECNOSTI



Reálná funkce více proměnných je zobrazení definované na nějaké podmnožině (na svém definičním oboru) euklidovského prostoru \mathbb{R}^n (pro $n > 1$) s hodnotami v \mathbb{R} .



Protože body \mathbb{R}^n jsou n -tice reálných čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) , bývá takováto funkce f často značena jako $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, což vysvětluje termín *více proměnných*.



Pro pochopení i názornost stačí probírat případy roviny a prostoru (tj. $n = 2, n = 3$).



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsou však situace, kdy je vhodnější použít obecný případ \mathbb{R}^n než jeho specifikaci na rovinu nebo prostor. To je například skládání funkcí více proměnných.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsou však situace, kdy je vhodnější použít obecný případ \mathbb{R}^n než jeho specifikaci na rovinu nebo prostor. To je například skládání funkcí více proměnných.



Je třeba dávat pozor. Formální zápis ČEHOKOLIV v \mathbb{R}^n je HÓROR.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Naopak, funkce jedné reálné proměnné s hodnotami v nějakém euklidovském prostoru je zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a je to vlastně n -tice (f_1, f_2, \dots, f_n) reálných funkcí jedné reálné proměnné (f_k je složení f s projekcí \mathbb{R}^n na k -tou složku, tj. $f_k(x)$ je k -tá souřadnice bodu $f(x)$) — ověřte si to.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Naopak, funkce jedné reálné proměnné s hodnotami v nějakém euklidovském prostoru je zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a je to vlastně n -tice (f_1, f_2, \dots, f_n) reálných funkcí jedné reálné proměnné (f_k je složení f s projekcí \mathbb{R}^n na k -tou složku, tj. $f_k(x)$ je k -tá souřadnice bodu $f(x)$) — ověřte si to.



Zobrazení $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je tedy n -tice reálných funkcí k -proměnných. Každé takové zobrazení se nazývá *funkce více proměnných*, pokud $k > 1$. Je-li $n = 1$, jedná se o *reálnou funkci*.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Naopak, funkce jedné reálné proměnné s hodnotami v nějakém euklidovském prostoru je zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a je to vlastně n -tice (f_1, f_2, \dots, f_n) reálných funkcí jedné reálné proměnné (f_k je složení f s projekcí \mathbb{R}^n na k -tou složku, tj. $f_k(x)$ je k -tá souřadnice bodu $f(x)$) — ověřte si to.



Zobrazení $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je tedy n -tice reálných funkcí k -proměnných. Každé takové zobrazení se nazývá *funkce více proměnných*, pokud $k > 1$. Je-li $n = 1$, jedná se o *reálnou funkci*.



To je ono. Přečtěte si to ještě pětkrát.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE V \mathbb{R}^N



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
 - limity
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE V \mathbb{R}^N



Před zkoumáním funkcí jedné proměnné bylo nutné vysvětlit vlastnosti reálné přímky.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE V \mathbb{R}^N



Před zkoumáním funkcí jedné proměnné bylo nutné vysvětlit vlastnosti reálné přímky.



Ze stejného důvodu následuje popis některých vlastností roviny a prostoru, které budou v následujícím textu často používány.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

KONVERGENCE V \mathbb{R}^N



Před zkoumáním funkcí jedné proměnné bylo nutné vysvětlit vlastnosti reálné přímky.



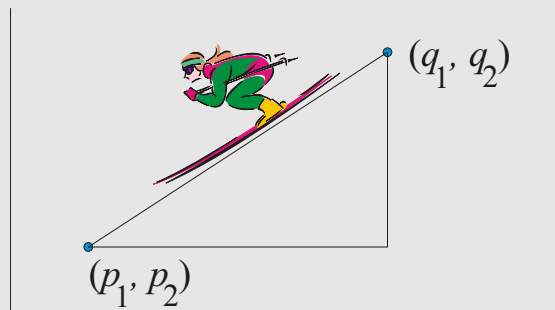
Ze stejného důvodu následuje popis některých vlastností roviny a prostoru, které budou v následujícím textu často používány.



Vzpomeňte si z geometrie na pojem vzdálenosti bodu p od bodu q značený $|p - q|$:

$$|p - q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}.$$

(Pro body p, q, \dots budou často čísla p_1, p_2 , resp. q_1, q_2 , atd., značit příslušné souřadnice těchto bodů.)



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzhledem k tomu, že některé pojmy pro \mathbb{R}^n jsou jen formální modifikací obdobných pojmů z \mathbb{R} , nebudou k nim už uváděny další poznámky.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
 - limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzhledem k tomu, že některé pojmy pro \mathbb{R}^n jsou jen formální modifikací obdobných pojmů z \mathbb{R} , nebudou k nim už uváděny další poznámky.



Definice budou (až na výjimky) uvedeny v \mathbb{R}^2 a čtenář je žádán, aby si zformuloval příslušnou definici v \mathbb{R}^3 nebo v \mathbb{R}^n .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je vhodné určit vlastnosti podmnožin roviny. Uvědomte si, že na rozdíl od přímky, kde jsou základním kamenem úsečky (tj. intervaly), je různorodost obdobných množin v rovině velká (kruhy, elipsy, čtverce, kosodélníky,...).



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

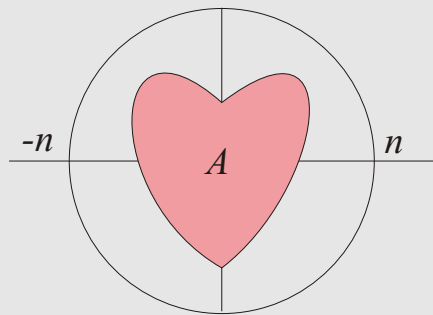
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je vhodné určit vlastnosti podmnožin roviny. Uvědomte si, že na rozdíl od přímky, kde jsou základním kamenem úsečky (tj. intervaly), je různorodost obdobných množin v rovině velká (kruhy, elipsy, čtverce, kosodélníky,...).



DEFINICE.

1. Množina A v \mathbb{R}^2 se nazývá **omezená**, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|a| \leq n$ pro každé $a \in A$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

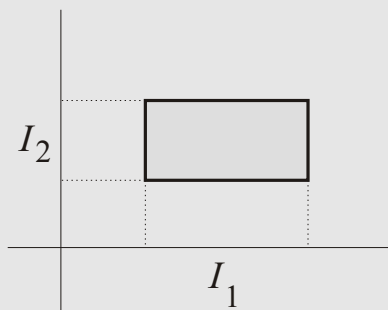
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. **Interval** J v \mathbb{R}^2 je součin intervalů v \mathbb{R} , tj. $J = I_1 \times I_2$, kde I_1, I_2 jsou intervaly v \mathbb{R} .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

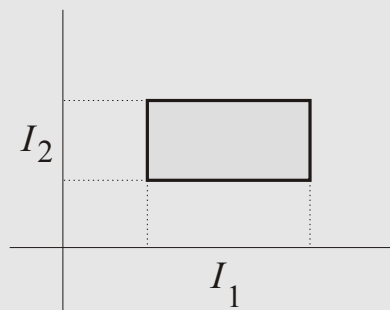
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. **Interval** J v \mathbb{R}^2 je součin intervalů v \mathbb{R} , tj. $J = I_1 \times I_2$, kde I_1, I_2 jsou intervaly v \mathbb{R} .



Tento interval J se nazývá **otevřený** (nebo **uzavřený**), jestliže jsou oba intervaly I_1, I_2 otevřené (resp. uzavřené).



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Boľzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity

funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cyklindrické souřad-
nice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

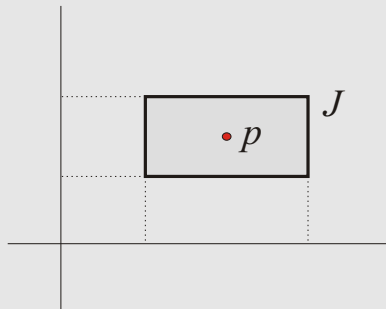
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Množina U v rovině je **okolí** bodu p , jestliže existuje otevřený interval J tak, že $p \in J \subset U$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti

- konvergence
- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

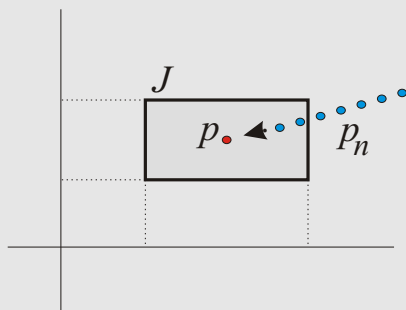
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Posloupnost $\{p_n\}$ bodů v rovině **konverguje** k bodu p , jestliže každé okolí bodu p obsahuje skoro všechna p_n .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

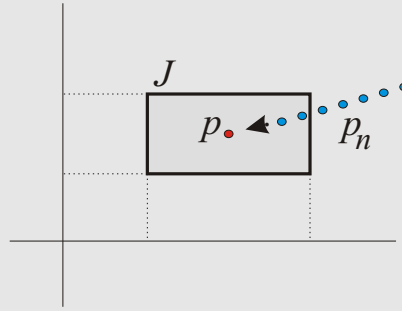
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Posloupnost $\{p_n\}$ bodů v rovině **konverguje** k bodu p , jestliže každé okolí bodu p obsahuje skoro všechna p_n .



5. Podmnožina A roviny se nazývá **uzavřená**, jestliže limity posloupností z A leží v A .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

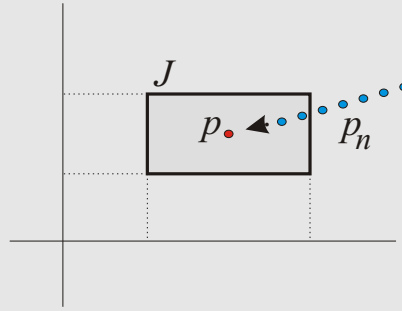
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

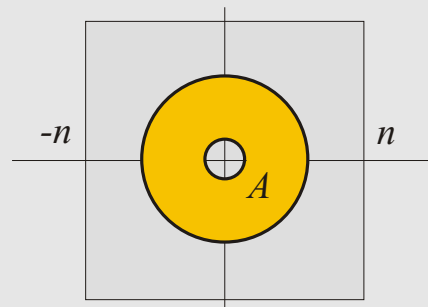
4. Posloupnost $\{p_n\}$ bodů v rovině **konverguje** k bodu p , jestliže každé okolí bodu p obsahuje skoro všechna p_n .



5. Podmnožina A roviny se nazývá **uzavřená**, jestliže limity posloupností z A leží v A .



Omezená uzavřená množina se nazývá **kompaktní**.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Boľzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cylindrické souřad-
nice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kompakt je vždy UZAVŘENÝ.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Kompakt je vždy UZAVŘENÝ.



I když je krabička s CD-čkem otevřená ;-)

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Podmnožina A roviny se nazývá **otevřená**, jestliže žádná posloupnost z doplňku množiny A nekonverguje k bodu v A . (Tj. doplněk množiny A je uzavřená množina.)



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podmnožina A roviny se nazývá **otevřená**, jestliže žádná posloupnost z doplňku množiny A nekonverguje k bodu v A . (Tj. doplněk množiny A je uzavřená množina.)



6. Bod p je **hromadným bodem** množiny A , jestliže každé okolí bodu P obsahuje nekonečně mnoho bodů A . **Hranice** otevřené množiny A je množina všech hromadných bodů A neležících v A .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podmnožina A roviny se nazývá **otevřená**, jestliže žádná posloupnost z doplňku množiny A nekonverguje k bodu v A . (Tj. doplněk množiny A je uzavřená množina.)



6. Bod p je **hromadným bodem** množiny A , jestliže každé okolí bodu P obsahuje nekonečně mnoho bodů A . **Hranice** otevřené množiny A je množina všech hromadných bodů A neležících v A .



Množina, která vznikne z nějaké otevřené množiny přidáním části její hranice, se bude nazývat **polootvřená**.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podmnožina A roviny se nazývá **otevřená**, jestliže žádná posloupnost z doplňku množiny A nekonverguje k bodu v A . (Tj. doplněk množiny A je uzavřená množina.)



6. Bod p je **hromadným bodem** množiny A , jestliže každé okolí bodu P obsahuje nekonečně mnoho bodů A . **Hranice** otevřené množiny A je množina všech hromadných bodů A neležících v A .



Množina, která vznikne z nějaké otevřené množiny přidáním části její hranice, se bude nazývat **polootvřená**.



Pojmy využívající pojmu vzdálenost (otevřená a uzavřená množina) jdou studovat v \mathbb{R} , \mathbb{R}^n i v obecných metrických prostorech.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.
2. Množina A je otevřená, jestliže s každým jejím bodem p leží v A i nějaký otevřený interval obsahující p (tj. A je okolím každého svého bodu)

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.
2. Množina A je otevřená, jestliže s každým jejím bodem p leží v A i nějaký otevřený interval obsahující p (tj. A je okolím každého svého bodu)
3. Množina je omezená, jestliže je obsažena v nějaké kouli se středem v počátku.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.
2. Množina A je otevřená, jestliže s každým jejím bodem p leží v A i nějaký otevřený interval obsahující p (tj. A je okolím každého svého bodu)
3. Množina je omezená, jestliže je obsažena v nějaké kouli se středem v počátku.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.
2. Množina A je otevřená, jestliže s každým jejím bodem p leží v A i nějaký otevřený interval obsahující p (tj. A je okolím každého svého bodu)
3. Množina je omezená, jestliže je obsažená v nějaké kouli se středem v počátku.



Klasické cvičení pro každého.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci v \mathbb{R}^n , $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci v \mathbb{R}^n , $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.



Prostor \mathbb{R}^n bude brán jako lineární prostor nad tělesem \mathbb{R} (součiny a podíly bodů v \mathbb{R}^n nebudou používány).



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci v \mathbb{R}^n , $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.



Prostor \mathbb{R}^n bude brán jako lineární prostor nad tělesem \mathbb{R} (součiny a podíly bodů v \mathbb{R}^n nebudou používány).



Převeďte z \mathbb{R} na \mathbb{R}^n důkazy následujících tvrzení (pro Bolzanovu-Weierstrassova věta je návod v *Otázkách*).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci v \mathbb{R}^n , $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.



Prostor \mathbb{R}^n bude brán jako lineární prostor nad tělesem \mathbb{R} (součiny a podíly bodů v \mathbb{R}^n nebudou používány).



Převeďte z \mathbb{R} na \mathbb{R}^n důkazy následujících tvrzení (pro Bolzanovu-Weierstrassova věta je návod v *Otázkách*).



Platí

- **pozorování** o jednoznačnosti limit, limitě konstantní posloupnosti a limitě podpo-
slopností; ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci v \mathbb{R}^n , $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.



Prostor \mathbb{R}^n bude brán jako lineární prostor nad tělesem \mathbb{R} (součiny a podíly bodů v \mathbb{R}^n nebudou používány).



Převeďte z \mathbb{R} na \mathbb{R}^n důkazy následujících tvrzení (pro Bolzanovu-Weierstrassova věta je návod v *Otázkách*).



Platí

- **pozorování** o jednoznačnosti limit, limitě konstantní posloupnosti a limitě podposloupností; ↓
- **charakterizace limit** kromě 5.tvrzení o supremu a infimu; ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci v \mathbb{R}^n , $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.



Prostor \mathbb{R}^n bude brán jako lineární prostor nad tělesem \mathbb{R} (součiny a podíly bodů v \mathbb{R}^n nebudou používány).



Převeďte z \mathbb{R} na \mathbb{R}^n důkazy následujících tvrzení (pro Bolzanovu-Weierstrassova věta je návod v *Otázkách*).



Platí

- **pozorování** o jednoznačnosti limit, limitě konstantní posloupnosti a limitě podposloupností; ↓
- **charakterizace limit** kromě 5.tvrzení o supremu a infimu; ↓
- **charakterizace konvergence** pomocí Bolzanovy–Cauchyovy vlastnosti posloupnosti.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro konvergenci v \mathbb{R}^n , $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.



Prostor \mathbb{R}^n bude brán jako lineární prostor nad tělesem \mathbb{R} (součiny a podíly bodů v \mathbb{R}^n nebudou používány).



Převeďte z \mathbb{R} na \mathbb{R}^n důkazy následujících tvrzení (pro Bolzanovu-Weierstrassova věta je návod v *Otázkách*).



Platí

- **pozorování** o jednoznačnosti limit, limitě konstantní posloupnosti a limitě podposloupností; ↓
- **charakterizace limit** kromě 5.tvrzení o supremu a infimu; ↓
- **charakterizace konvergence** pomocí Bolzanovy–Cauchyovy vlastnosti posloupnosti.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

- limita součtu a násobku konstantou. ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

- limita součtu a násobku konstantou. ↓
- Bolzanova-Weierstrassova věta: Z každé omezené posloupnosti v \mathbb{R}^n lze vybrat podposloupnost konvergující v \mathbb{R}^n .

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Neexistence uspořádání.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Neexistence uspořádání.



Velkým rozdílem oproti \mathbb{R} je neexistence vhodného uspořádání v \mathbb{R}^n pro $n > 1$. Nelze tedy mluvit např. o monotónních funkcích dvou proměnných.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Neexistence uspořádání.



Velkým rozdílem oproti \mathbb{R} je neexistence vhodného uspořádání v \mathbb{R}^n pro $n > 1$. Nelze tedy mluvit např. o monotónních funkcích dvou proměnných.



V některých případech lze uspořádání obejít. Např. interval v \mathbb{R} je vlastně tzv. konvexní množina, tj. množina, která s každými dvěma svými body obsahuje i úsečku, která je spojuje.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

Neexistence uspořádání.



Velkým rozdílem oproti \mathbb{R} je neexistence vhodného uspořádání v \mathbb{R}^n pro $n > 1$. Nelze tedy mluvit např. o monotónních funkcích dvou proměnných.



V některých případech lze uspořádání obejít. Např. interval v \mathbb{R} je vlastně tzv. konvexní množina, tj. množina, která s každými dvěma svými body obsahuje i úsečku, která je spojuje.



Tato definice konvexity je platná v libovolném \mathbb{R}^n a lze pak definovat i konvexní a konkávní funkce více proměnných.

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

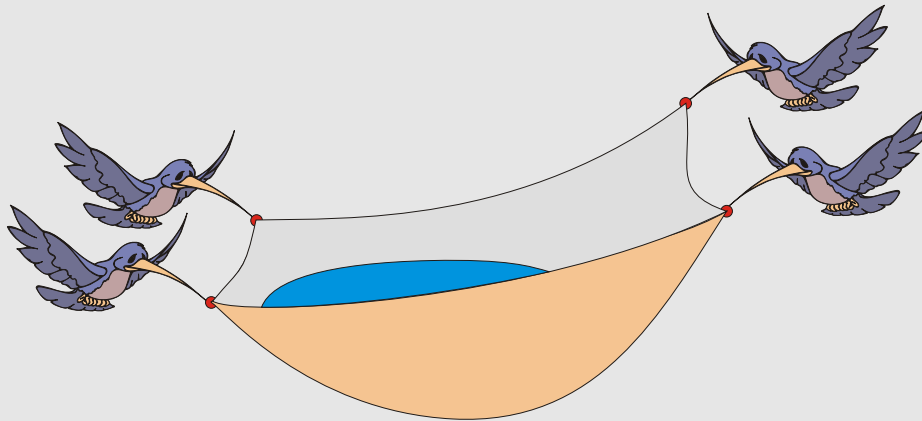
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nekonečna. ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nekonečna. ↓

V \mathbb{R}^n pro $n > 1$ existuje jediné nekonečno ∞ . Na reálné přímce bylo možné udělat neomezenou cestu (jednoduchou, která se nevracela) jen napravo ($k + \infty$) nebo nalevo ($k - \infty$).



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nekonečna. ↓

V \mathbb{R}^n pro $n > 1$ existuje jediné nekonečno ∞ . Na reálné přímce bylo možné udělat neomezenou cestu (jednoduchou, která se nevracela) jen napravo ($k + \infty$) nebo nalevo ($k - \infty$).



V rovině je takovýchto neomezených cest různě zakřivených a různých směrů nekonečně mnoho a muselo by proto být i nekonečně mnoho nekonečten. To není vhodné a používá se jen jedno nekonečno.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nekonečna. ↓

V \mathbb{R}^n pro $n > 1$ existuje jediné nekonečno ∞ . Na reálné přímce bylo možné udělat neomezenou cestu (jednoduchou, která se nevracela) jen napravo ($k + \infty$) nebo nalevo ($k - \infty$).



V rovině je takovýchto neomezených cest různě zakřivených a různých směrů nekonečně mnoho a muselo by proto být i nekonečně mnoho nekonečten. To není vhodné a používá se jen jedno nekonečno.



To, že je jedno nekonečno,
je mi nekonečně jedno.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vhodnou představou o přidání nekonečna je stočení roviny do koule bez horního (severního) pólu.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vhodnou představou o přidání nekonečna je stočení roviny do koule bez horního (severního) pólu.



Nekonečno je pak tento severní pól. Jeho okolí jsou množiny obsahující doplňky kruhů (nebo koulí) se středem v počátku. Lze tedy standardně definovat konvergenci k nekonečnu (každé okolí nekonečna obsahuje skoro všechny členy dané posloupnosti).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

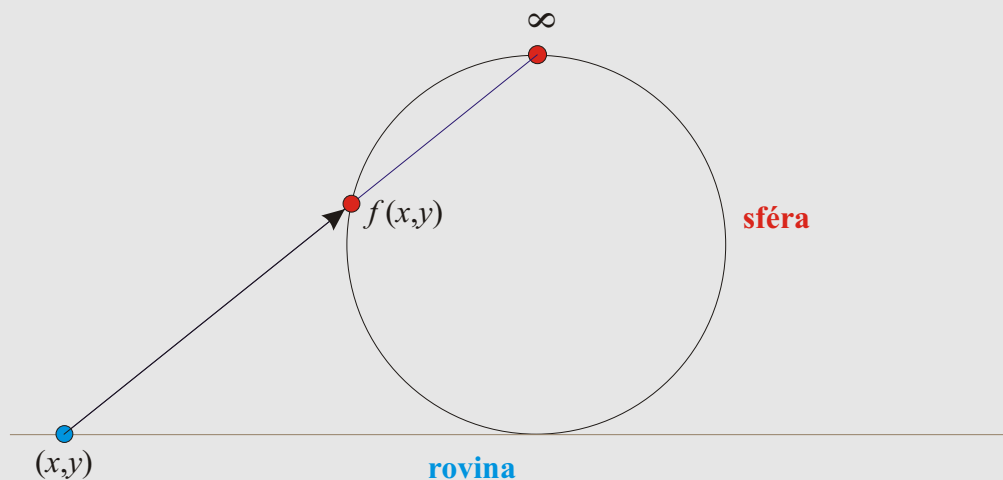
Vhodnou představou o přidání nekonečna je stočení roviny do koule bez horního (severního) pólu.



Nekonečno je pak tento severní pól. Jeho okolí jsou množiny obsahující doplňky kruhů (nebo koulí) se středem v počátku. Lze tedy standardně definovat konvergenci k nekonečnu (každé okolí nekonečna obsahuje skoro všechny členy dané posloupnosti).



Rovina spolu s tímto nekonečnem se nazývá *rozšířená rovina*.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

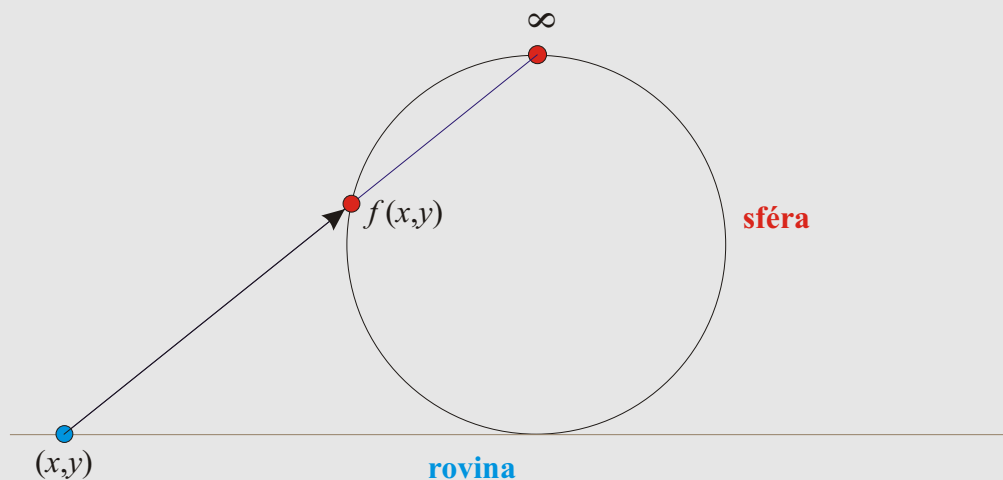
Vhodnou představou o přidání nekonečna je stočení roviny do koule bez horního (severního) pólu.



Nekonečno je pak tento severní pól. Jeho okolí jsou množiny obsahující doplňky kruhů (nebo koulí) se středem v počátku. Lze tedy standardně definovat konvergenci k nekonečnu (každé okolí nekonečna obsahuje skoro všechny členy dané posloupnosti).



Rovina spolu s tímto nekonečnem se nazývá *rozšířená rovina*.



Intervaly a množiny. Intervaly jsou tedy obdélníky (mající strany rovnoběžné s osami) a to buď jen jejich vnitřky, jedná-li se o otevřené intervaly, nebo i s hranicí, jedná-li se o uzavřené intervaly.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

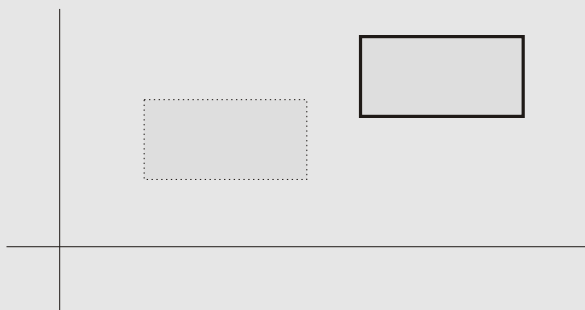
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Každý kruh o středu x_0 je okolím tohoto bodu. Uvědomte si, že množina U je okolím bodu x_0 právě když obsahuje nějaký kruh (nedegerovaný) se středem x_0 .

Konec poznámek 1.

LEKCE17-FVP obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastností funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Geometricky chápaná hranice čtverce, kruhu, apod. množin v rovině, je hranice totožná s hranicí definovanou v tomto textu.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Geometricky chápaná hranice čtverce, kruhu, apod. množin v rovině, je hranice totožná s hranicí definovanou v tomto textu.
2. Čtverec libovolně umístěný v rovině je spolu se svou hranicí uzavřenou množinou, bez své hranice je otevřenou množinou.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence

kompaktnost

vlastnosti

konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Boľzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity

funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cyklindrické souřad-
nice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Geometricky chápaná hranice čtverce, kruhu, apod. množin v rovině, je hranice totožná s hranicí definovanou v tomto textu.
2. Čtverec libovolně umístěný v rovině je spolu se svou hranicí uzavřenou množinou, bez své hranice je otevřenou množinou.
3. Libovolná přímka v rovině je uzavřenou množinou, která není polootevřená.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Geometricky chápaná hranice čtverce, kruhu, apod. množin v rovině, je hranice totožná s hranicí definovanou v tomto textu.
2. Čtverec libovolně umístěný v rovině je spolu se svou hranicí uzavřenou množinou, bez své hranice je otevřenou množinou.
3. Libovolná přímka v rovině je uzavřenou množinou, která není polootevřená.
4. Posloupnost $\{(n, \sin n)\}$ v rovině konverguje k ∞ .

Konec příkladů 1.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že otevřený interval je otevřenou množinou, uzavřený interval je uzavřenou množinou a součin dvou polootevřených intervalů je polootevřená množina.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. (a) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k bodu (x, y) právě když $x_n \rightarrow x$ a $y_n \rightarrow y$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. (a) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k bodu (x, y) právě když $x_n \rightarrow x$ a $y_n \rightarrow y$.



(b) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k ∞ právě když jedna z posloupností $\{|x_n|\}$, $\{|y_n|\}$ konverguje k $+\infty$ (právě když $\{|(x_n, y_n)|\}$ konverguje k ∞).



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastností funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. (a) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k bodu (x, y) právě když $x_n \rightarrow x$ a $y_n \rightarrow y$.



(b) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k ∞ právě když jedna z posloupností $\{|x_n|\}$, $\{|y_n|\}$ konverguje k $+\infty$ (právě když $\{|(x_n, y_n)|\}$ konverguje k ∞).



3. Ukažte, že podmnožina roviny je omezená právě když její projekce na osu x i na osu y jsou omezené.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. (a) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k bodu (x, y) právě když $x_n \rightarrow x$ a $y_n \rightarrow y$.



(b) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k ∞ právě když jedna z posloupností $\{|x_n|\}$, $\{|y_n|\}$ konverguje k $+\infty$ (právě když $\{|(x_n, y_n)|\}$ konverguje k ∞).



3. Ukažte, že podmnožina roviny je omezená právě když její projekce na osu x i na osu y jsou omezené.



4. Z předchozích dvou charakterizací konvergence a omezenosti pomocí projekcí na \mathbb{R} dokažte Bolzanovu-Weierstrassovu větu v rovině.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Ukažte, že projekce otevřené množiny na obě osy jsou otevřené podmnožiny přímky.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Ukažte, že projekce otevřené množiny na obě osy jsou otevřené podmnožiny přímky.



Najděte příklad, že projekce uzavřené množiny na osu nemusí být uzavřená množina.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Dokažte, že z každé posloupnosti v rovině lze vybrat podposloupnost konvergující v rozšířené rovině (viz *Poznámky* pro tento pojem).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

7. Uvědomte si, že okolí bodu v rovině zůstanou stejná, definujeme-li je tak, že obsahují nějaký kruh (místo intervalů) se středem v onom bodě.

Konec otázek 1.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Zjistěte, zda množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ je polootevřená.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Zjistěte, zda množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ je polootevřená.



Řešení. Lehce vidíme, že se jedná o mezikružší. Podle definice jde o zároveň o polootevřenou množinu.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Zjistěte, zda množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ je polootevřená.



Řešení. Lehce vidíme, že se jedná o mezikružší. Podle definice jde o zároveň o polootevřenou množinu.



Když je v definici \leq nebo \geq , je veliká šance na uzavřenou množinu. Pokud jde o neostré nerovnosti dostaneme zpravidla otevřenou množinu.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Zjistěte, zda množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ je polootevřená.



Řešení. Lehce vidíme, že se jedná o mezikružší. Podle definice jde o zároveň o polootevřenou množinu.



Když je v definici \leq nebo \geq , je veliká šance na uzavřenou množinu. Pokud jde o neostré nerovnosti dostaneme zpravidla otevřenou množinu.



Neplatí to vždy. Například \mathbb{R}^2 je zároveň otevřená i uzavřená :-)

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje otevřená kompaktní množina?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje otevřená kompaktní množina?



Řešení. Ano.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje otevřená kompaktní množina?



Řešení. Ano.



A není moc veliká ;-)



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Je reálná osa otevřená v rovině?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Je reálná osa otevřená v rovině?



Řešení. Ne.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Je reálná osa otevřená v rovině?



Řešení. Ne.



Vlevo a vpravo ano. Ale nahoru a dolů ne ...



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Je reálná osa otevřená v rovině?



Řešení. Ne.



Vlevo a vpravo ano. Ale nahoru a dolů ne ...



Rovina má svoje specifika.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI FUNKCÍ V \mathbb{R}^N



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI FUNKCÍ V \mathbb{R}^N



Často se i u funkcí více proměnných, např. $f(x, y)$, používá jedna proměnná, která se bude značit velkým písmenem kvůli odlišení. Takže pro $f(x, y)$ je $f(P)$ hodnota funkce f v bodě $P = (x, y)$. Je možné si body P představovat jako vektory.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI FUNKCÍ V \mathbb{R}^N



Často se i u funkcí více proměnných, např. $f(x, y)$, používá jedna proměnná, která se bude značit velkým písmenem kvůli odlišení. Takže pro $f(x, y)$ je $f(P)$ hodnota funkce f v bodě $P = (x, y)$. Je možné si body P představovat jako vektory.



To si promyslete.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VLASTNOSTI FUNKCÍ V \mathbb{R}^N



Často se i u funkcí více proměnných, např. $f(x, y)$, používá jedna proměnná, která se bude značit velkým písmenem kvůli odlišení. Takže pro $f(x, y)$ je $f(P)$ hodnota funkce f v bodě $P = (x, y)$. Je možné si body P představovat jako vektory.



To si promyslete.



Taky se tím šetří psací potřeby a klávesnice.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Funkce více proměnných, která má jednobodový obor hodnot, se nazývá **konstantní** (tedy $f(P) = f(Q)$ pro všechna $P, Q \in \mathcal{D}(f)$).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

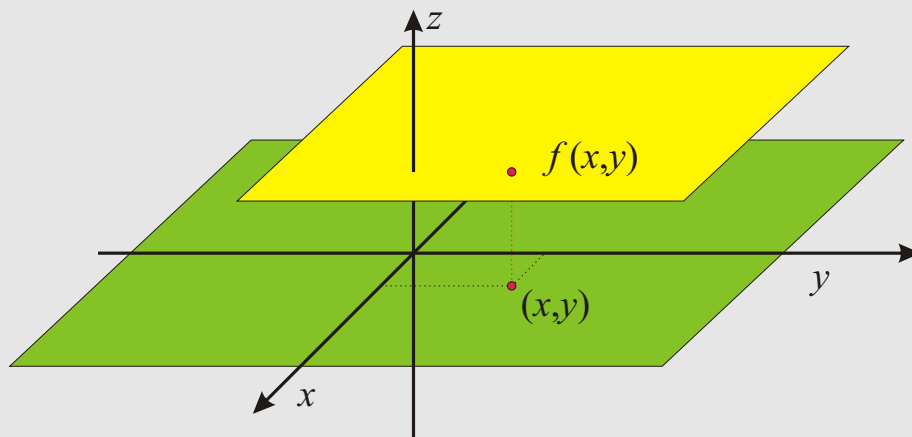
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Funkce více proměnných, která má jednobodový obor hodnot, se nazývá **konstantní** (tedy $f(P) = f(Q)$ pro všechna $P, Q \in \mathcal{D}(f)$).



Grafem konstantní funkce dvou proměnných je rovina rovnoběžná s rovinou x, y nebo její část.



LEKCE17-FVP obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti

- konvergence
- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce f více proměnných se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $P \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-P \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-P) = f(P)$ (resp. $f(-P) = -f(P)$) pro všechna $P \in \mathcal{D}(f)$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

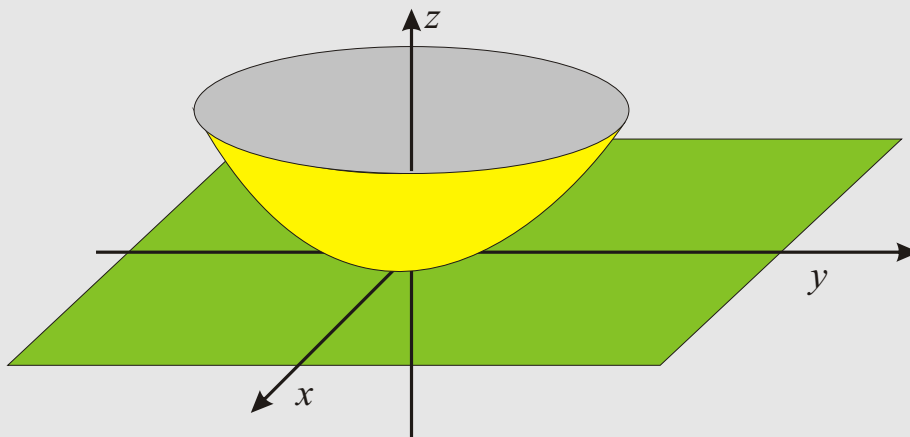
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce f více proměnných se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $P \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-P \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-P) = f(P)$ (resp. $f(-P) = -f(P)$) pro všechna $P \in \mathcal{D}(f)$.



Graf sudé funkce dvou proměnných je symetrický podle osy z .



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

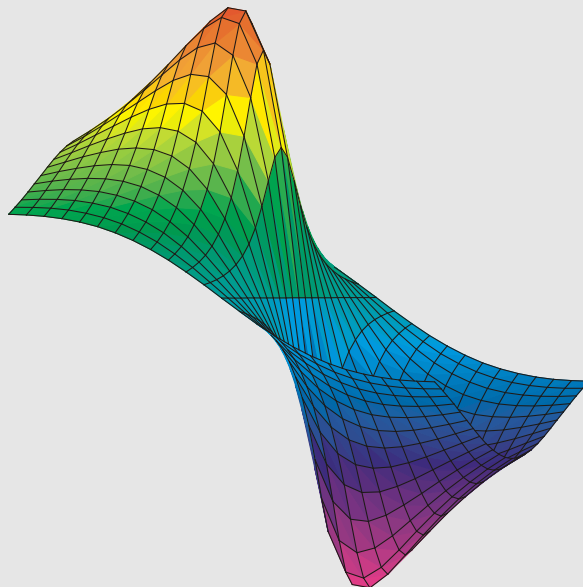
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Graf liché funkce je symetrický podle počátku.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce f více proměnných je **omezená** (resp. **shora omezená** nebo **zdola omezená**), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(P)| \leq k$ (resp. $f(P) \leq k$, nebo $f(P) \geq k$) pro všechna $P \in \mathcal{D}(f)$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce f více proměnných je **omezená** (resp. **shora omezená** nebo **zdola omezená**), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(P)| \leq k$ (resp. $f(P) \leq k$, nebo $f(P) \geq k$) pro všechna $P \in \mathcal{D}(f)$.



Každá taková vlastnost se v příkladech musí ověřit. T.j. například řešit nerovnosti a podobné legrácky.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce dvou proměnných, značí $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f + g, f \cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě P postupně

$$\max\{f(P), g(P)\}, \min\{f(P), g(P)\}, f(P) + g(P), f(P) \cdot g(P), f(P)/g(P) .$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce dvou proměnných, značí $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f + g, f \cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě P postupně

$$\max\{f(P), g(P)\}, \min\{f(P), g(P)\}, f(P) + g(P), f(P) \cdot g(P), f(P)/g(P) .$$



Složení $f \circ g$ zobrazení g z podmnožiny \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k a zobrazení f z podmnožiny \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^m je zobrazení z podmnožiny \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m která má v bodě $P \in \mathbb{R}^n$ hodnotu $f(g(P))$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence

kompaktnost

vlastnosti

konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Boľzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity

funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cyklindrické souřadnice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce dvou proměnných, značí $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f + g, f \cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě P postupně

$$\max\{f(P), g(P)\}, \min\{f(P), g(P)\}, f(P) + g(P), f(P) \cdot g(P), f(P)/g(P).$$



Složení $f \circ g$ zobrazení g z podmnožiny \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k a zobrazení f z podmnožiny \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^m je zobrazení z podmnožiny \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m která má v bodě $P \in \mathbb{R}^n$ hodnotu $f(g(P))$.



Zde pracujeme po přehlednost se zobrazeními.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

SPOJITOST

DEFINICE. Necht' f je funkce více proměnných, $P \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{P_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k P necht' $\lim f(P_n) = f(P)$. Pak se říká, že f je **spojitá v bodě P** a tento bod se nazývá **bodem spojitosti** funkce f .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

SPOJITOST

DEFINICE. Necht' f je funkce více proměnných, $P \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{P_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k P necht' $\lim f(P_n) = f(P)$. Pak se říká, že f je **spojitá v bodě P** a tento bod se nazývá **bodem spjitosti** funkce f .



Je-li f spjitá v každém bodě množiny A , říká se, že f je **spjitá na množině A** .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spjitost

- charakterizace spjitosti
- spjitost součtu,...
- spjitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

SPOJITOST

DEFINICE. Necht' f je funkce více proměnných, $P \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{P_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k P necht' $\lim f(P_n) = f(P)$. Pak se říká, že f je **spojitá** v bodě P a tento bod se nazývá **bodem spjitosti** funkce f .



Je-li f spjitá v každém bodě množiny A , říká se, že f je **spjitá na množině** A .



Je-li f spjitá v každém bodě svého definičního oboru, říká se, že f je **spjitá**.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spjitost

charakterizace spjitosti
spjitost součtu, ...
spjitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

SPOJITOST

DEFINICE. Necht' f je funkce více proměnných, $P \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{P_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k P necht' $\lim f(P_n) = f(P)$. Pak se říká, že f je **spojitá** v **bodě** P a tento bod se nazývá **bodem spjitosti** funkce f .



Je-li f spjitá v každém bodě množiny A , říká se, že f je **spjitá na množině** A .



Je-li f spjitá v každém bodě svého definičního oboru, říká se, že f je **spjitá**.



Spjitost se dělá přes posloupnosti. Jde to i jinak:

LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spjitost

- charakterizace spjitosti
- spjitost součtu,...
- spjitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Následující věta ukazuje alternativní možnost definice spojitosti funkce více proměnných. Důkaz je stejný jako pro funkce jedné proměnné.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující věta ukazuje alternativní možnost definice spojitosti funkce více proměnných. Důkaz je stejný jako pro funkce jedné proměnné.



VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f více proměnných a bod A jejího definičního oboru:

1. Funkce f je spojitá v bodě A .

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující věta ukazuje alternativní možnost definice spojitosti funkce více proměnných. Důkaz je stejný jako pro funkce jedné proměnné.



VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f více proměnných a bod A jejího definičního oboru:

1. Funkce f je spojitá v bodě A .
2. Pro každé okolí U bodu $f(A)$ existuje okolí V bodu A takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$.

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Následující věta ukazuje alternativní možnost definice spojitosti funkce více proměnných. Důkaz je stejný jako pro funkce jedné proměnné.



VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f více proměnných a bod A jejího definičního oboru:

1. Funkce f je spojitá v bodě A .
2. Pro každé okolí U bodu $f(A)$ existuje okolí V bodu A takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$.
3. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - f(A)| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f)$ a $|P - A| < \delta$.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

I důkaz následujícího tvrzení je stejný jako důkaz **odpovídající věty** pro jednu proměnnou, protože se vlastně používá jen tvrzení o součtu, součinu a podílu limit posloupností v \mathbb{R} .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

I důkaz následujícího tvrzení je stejný jako důkaz **odpovídající věty** pro jednu proměnnou, protože se vlastně používá jen tvrzení o součtu, součinu a podílu limit posloupností v \mathbb{R} .



VĚTA. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě P , jsou i funkce $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f + g$, $f \cdot g$ a f/g (v případě $g(P) \neq 0$) spojité v bodě P .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity
- funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

I důkaz následujícího tvrzení je stejný jako důkaz **odpovídající věty** pro jednu proměnnou, protože se vlastně používá jen tvrzení o součtu, součinu a podílu limit posloupností v \mathbb{R} .



VĚTA. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě P , jsou i funkce $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f + g$, $f \cdot g$ a f/g (v případě $g(P) \neq 0$) spojité v bodě P .



Součet, součin a podíl
spojitých funkcí je spojitá
funkce.



LEKCE17-FVP obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definuje-li se polynom dvou proměnných x, y jako funkce vzniklá použitím konečně mnoha uvedených aritmetických operací na funkce $f(x, y) = x$ a $g(x, y) = y$, jsou polynomy spojité funkce na \mathbb{R}^2 .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definuje-li se polynom dvou proměnných x, y jako funkce vzniklá použitím konečně mnoha uvedených aritmetických operací na funkce $f(x, y) = x$ a $g(x, y) = y$, jsou polynomy spojité funkce na \mathbb{R}^2 .



Grafy těch f a g jsou roviny, ale dohromady se z nich dá udělat koukám pěkný guláš.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definuje-li se polynom dvou proměnných x, y jako funkce vzniklá použitím konečně mnoha uvedených aritmetických operací na funkce $f(x, y) = x$ a $g(x, y) = y$, jsou polynomy spojité funkce na \mathbb{R}^2 .



Grafy těch f a g jsou roviny, ale dohromady se z nich dá udělat koukám pěkný guláš.



Racionální funkce dvou proměnných jsou podíly polynomů dvou proměnných a jsou tedy spojité na svém definičním oboru.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Také důkaz spojitosti složené funkce je stejný jako pro jednu proměnnou. Pro jednoduchost formulace je tvrzení uvedeno pro zobrazení definovaná na celých prostorech.

VĚTA. Necht' $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitá v bodě P a $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ je funkce spojitá v $g(P)$. Pak složení $f \circ g$ je spojité v bodě P .



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Také důkaz spojitosti složené funkce je stejný jako pro jednu proměnnou. Pro jednoduchost formulace je tvrzení uvedeno pro zobrazení definovaná na celých prostorech.

VĚTA. Necht' $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitá v bodě P a $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ je funkce spojitá v $g(P)$. Pak složení $f \circ g$ je spojité v bodě P .



Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Jsou-li např. g_1, g_2 funkce dvou proměnných spojité v bodě (x, y) a f je funkce dvou proměnných spojitá v bodě $(g_1(x, y), g_2(x, y))$, je funkce $f \circ (g_1, g_2)$ spojitá v bodě (x, y) .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jsou-li např. g_1, g_2 funkce dvou proměnných spojité v bodě (x, y) a f je funkce dvou proměnných spojitá v bodě $(g_1(x, y), g_2(x, y))$, je funkce $f \circ (g_1, g_2)$ spojitá v bodě (x, y) .



Je-li f spojitá funkce více proměnných, je i $|f|$ spojitá funkce.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jsou-li např. g_1, g_2 funkce dvou proměnných spojité v bodě (x, y) a f je funkce dvou proměnných spojitá v bodě $(g_1(x, y), g_2(x, y))$, je funkce $f \circ (g_1, g_2)$ spojitá v bodě (x, y) .



Je-li f spojitá funkce více proměnných, je i $|f|$ spojitá funkce.



To se dokáže opět tak, že $|f|$ se napíše jako složená funkce.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEMMA. Je-li f spojitá na intervalu I a P, Q jsou body I s hodnotami $f(P) < 0 < f(Q)$, pak existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEMMA. Je-li f spojitá na intervalu I a P, Q jsou body I s hodnotami $f(P) < 0 < f(Q)$, pak existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.



Opět máme mezihodnotu.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEMMA. Je-li f spojitá na intervalu I a P, Q jsou body I s hodnotami $f(P) < 0 < f(Q)$, pak existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.



Opět máme mezihodnotu.



Důkaz. Úsečka spojující body P a Q leží celá v I a dá se popsat jako množina $\{(1 - t)P + tQ; t \in [0, 1]\}$. Funkce $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná jako $g(t) = f((1 - t)P + tQ)$ je spojitá funkce jedné proměnné (ukážte to) a podle **Bolzanovy věty** existuje t tak, že $g(t) = 0$. Tedy existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důsledkem lemmatu (se stejným důkazem jako v případě jedné proměnné) je tvrzení:



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důsledkem lemmatu (se stejným důkazem jako v případě jedné proměnné) je tvrzení:



VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Důsledkem lemmatu (se stejným důkazem jako v případě jedné proměnné) je tvrzení:



VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.



Zobrazujeme do \mathbb{R} , tam se nedá vyhýbat. V prostoru by to tak nevyšlo!



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje kompaktní množinu na kompaktní podmnožinu \mathbb{R} .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje kompaktní množinu na kompaktní podmnožinu \mathbb{R} .



Důkaz. Necht' f je spojitá funkce definovaná na kompaktní množině $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v obraze $f(A)$ konvergující v \mathbb{R}^* . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $P_n \in A$ tak, že $f(P_n) = x_n$. Podle **Bolzanovy-Weierstrassovy věty** existuje (protože A je omezená) konvergentní podposloupnost $\{P_{k_n}\}$ s limitou P . Protože A je uzavřená, je $P \in A$. Ze spojitosti f vyplývá, že body $f(P_{k_n})$ konvergují k $f(P)$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ tedy leží v $f(A)$, z čehož vyplývá, že $f(A)$ je uzavřená i omezená.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje kompaktní množinu na kompaktní podmnožinu \mathbb{R} .



Důkaz. Necht' f je spojitá funkce definovaná na kompaktní množině $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v obraze $f(A)$ konvergující v \mathbb{R}^* . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $P_n \in A$ tak, že $f(P_n) = x_n$. Podle **Bolzanovy-Weierstrassovy věty** existuje (protože A je omezená) konvergentní podposloupnost $\{P_{k_n}\}$ s limitou P . Protože A je uzavřená, je $P \in A$. Ze spojitosti f vyplývá, že body $f(P_{k_n})$ konvergují k $f(P)$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ tedy leží v $f(A)$, z čehož vyplývá, že $f(A)$ je uzavřená i omezená.



Tuto větu nejméně stokrát použijete. Věřte mi.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



DŮSLEDEK. Spojitá reálná funkce více proměnných dosahuje na uzavřené omezené množině A své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body $C, D \in A$ takové, že

$$f(C) = \sup_{P \in A} f(P), \quad f(D) = \inf_{P \in A} f(P).$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Spojitá reálná funkce více proměnných dosahuje na uzavřené omezené množině A své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body $C, D \in A$ takové, že

$$f(C) = \sup_{P \in A} f(P), \quad f(D) = \inf_{P \in A} f(P).$$



Tak vidíte, že mám pravdu.
Tak se budou hledat extrémů funkcí.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LIMITA



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LIMITA



DEFINICE. Necht' C je hromadný bod definičního oboru funkce f .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LIMITA



DEFINICE. Necht' C je hromadný bod definičního oboru funkce f .



Říkáme, že **limita funkce** f v bodě C se rovná A (značení $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$, nebo $f(P) \rightarrow A$ pro $P \rightarrow C$), jestliže $\lim f(P_n) = A$ pro každou prostou posloupnost $\{P_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k C .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

LIMITA



DEFINICE. Necht' C je hromadný bod definičního oboru funkce f .



Říkáme, že **limita funkce** f v bodě C se rovná A (značení $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$, nebo $f(P) \rightarrow A$ pro $P \rightarrow C$), jestliže $\lim f(P_n) = A$ pro každou prostou posloupnost $\{P_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ konvergující k C .



Tím samozřejmě nikoho nepřekvapím.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro limity funkcí více proměnných platí obdobná tvrzení, jako pro limity funkce jedné proměnné.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limity funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro limity funkcí více proměnných platí obdobná tvrzení, jako pro limity funkce jedné proměnné.



I postupy důkazů jsou stejné a proto nebudou opakovány; studující by si však měli tato tvrzení sami dokázat:



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro limity funkcí více proměnných platí obdobná tvrzení, jako pro limity funkce jedné proměnné.



I postupy důkazů jsou stejné a proto nebudou opakovány; studující by si však měli tato tvrzení sami dokázat:



VĚTA.

1. Necht' $C \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě C právě když $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = f(C)$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro limity funkcí více proměnných platí obdobná tvrzení, jako pro limity funkce jedné proměnné.



I postupy důkazů jsou stejné a proto nebudou opakovány; studující by si však měli tato tvrzení sami dokázat:



VĚTA.

1. Necht' $C \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě C právě když $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = f(C)$.



2. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



3. Je ekvivalentní pro funkci f , hromadný bod C definičního oboru f a bod A :

(a) $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A;$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je ekvivalentní pro funkci f , hromadný bod C definičního oboru f a bod A :

(a) $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$;



(b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f)$, $P \neq C$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je ekvivalentní pro funkci f , hromadný bod C definičního oboru f a bod A :

(a) $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$;



(b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f)$, $P \neq C$.



(c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f)$, $0 < |P - C| < \delta$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je ekvivalentní pro funkci f , hromadný bod C definičního oboru f a bod A :

(a) $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$;



(b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f), P \neq C$.



(c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f), 0 < |P - C| < \delta$.



4. Necht' C je hromadný bod definičního oboru funkce $f + g$. Pak platí (píše se \lim místo $\lim_{P \rightarrow C}$):



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je ekvivalentní pro funkci f , hromadný bod C definičního oboru f a bod A :

(a) $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$;



(b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f), P \neq C$.



(c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f), 0 < |P - C| < \delta$.



4. Necht' C je hromadný bod definičního oboru funkce $f + g$. Pak platí (píše se \lim místo $\lim_{P \rightarrow C}$):



(a) $\lim(f(P) + g(P)) = \lim f(P) + \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je ekvivalentní pro funkci f , hromadný bod C definičního oboru f a bod A :

(a) $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$;



(b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f), P \neq C$.



(c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f), 0 < |P - C| < \delta$.



4. Necht' C je hromadný bod definičního oboru funkce

$f + g$. Pak platí (píše se \lim místo $\lim_{P \rightarrow C}$):



(a) $\lim(f(P) + g(P)) = \lim f(P) + \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;



(b) $\lim(f(P) \cdot g(P)) = \lim f(P) \cdot \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Je ekvivalentní pro funkci f , hromadný bod C definičního oboru f a bod A :

(a) $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = A$;



(b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f)$, $P \neq C$.



(c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f)$, $0 < |P - C| < \delta$.



4. Necht' C je hromadný bod definičního oboru funkce

$f + g$. Pak platí (píše se \lim místo $\lim_{P \rightarrow C}$):



(a) $\lim(f(P) + g(P)) = \lim f(P) + \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;



(b) $\lim(f(P) \cdot g(P)) = \lim f(P) \cdot \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;



(c) $\lim \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim f(P)}{\lim g(P)}$, pokud má pravá strana smysl;

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Necht' g je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , f z \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^m a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $B = \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak $\lim_{P \rightarrow C} (f \circ g)(P) = \lim_{Q \rightarrow B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C , kromě, možná, bodu C .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Necht' g je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , f z \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^m a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $B = \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak $\lim_{P \rightarrow C} (f \circ g)(P) = \lim_{Q \rightarrow B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C , kromě, možná, bodu C .



6. Necht' f, g jsou funkce více proměnných definované na množině A a C buď hromadný bod A .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity
- funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Necht' g je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , f z \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^m a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $B = \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak $\lim_{P \rightarrow C} (f \circ g)(P) = \lim_{Q \rightarrow B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C , kromě, možná, bodu C .



6. Necht' f, g jsou funkce více proměnných definované na množině A a C buď hromadný bod A .



(a) Jestliže $\lim_{P \rightarrow C} f(P) < \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) < g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Necht' g je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , f z \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^m a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $B = \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak $\lim_{P \rightarrow C} (f \circ g)(P) = \lim_{Q \rightarrow B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C , kromě, možná, bodu C .



6. Necht' f, g jsou funkce více proměnných definované na množině A a C buď hromadný bod A .



(a) Jestliže $\lim_{P \rightarrow C} f(P) < \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) < g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$.



(b) Jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) \leq g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$, pak $\lim_{P \rightarrow C} f(P) \leq \lim_{P \rightarrow C} g(P)$ (pokud obě limity existují).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Necht' g je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , f z \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^m a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $B = \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak $\lim_{P \rightarrow C} (f \circ g)(P) = \lim_{Q \rightarrow B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C , kromě, možná, bodu C .



6. Necht' f, g jsou funkce více proměnných definované na množině A a C buď hromadný bod A .



(a) Jestliže $\lim_{P \rightarrow C} f(P) < \lim_{P \rightarrow C} g(P)$, pak existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) < g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$.



(b) Jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) \leq g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$, pak $\lim_{P \rightarrow C} f(P) \leq \lim_{P \rightarrow C} g(P)$ (pokud obě limity existují).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ta tvrzení sice nejsou román, ale nemělo by být obtížné je plynule číst.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

1. Necht' funkce f, g, h jsou funkce více proměnných definované na množině A , C je hromadný bod A , U okolí C a pro $P \in A \cap U, P \neq C$ je $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$. Jestliže existují $\lim_{P \rightarrow C} f(P)$, $\lim_{P \rightarrow C} h(P)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim_{P \rightarrow C} g(P)$ a rovná se oběma zbývajícím. ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

1. Necht' funkce f, g, h jsou funkce více proměnných definované na množině A , C je hromadný bod A , U okolí C a pro $P \in A \cap U, P \neq C$ je $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$. Jestliže existují $\lim_{P \rightarrow C} f(P)$, $\lim_{P \rightarrow C} h(P)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim_{P \rightarrow C} g(P)$ a rovná se oběma zbývajícím. ↓



To bylo o policajtech.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

1. Necht' funkce f, g, h jsou funkce více proměnných definované na množině A , C je hromadný bod A , U okolí C a pro $P \in A \cap U, P \neq C$ je $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$. Jestliže existují $\lim_{P \rightarrow C} f(P)$, $\lim_{P \rightarrow C} h(P)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim_{P \rightarrow C} g(P)$ a rovná se oběma zbývajícím. ↓



To bylo o policajtech.

- ↓
2. Necht' $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu C . Pak platí rovnost $\lim_{P \rightarrow C} f(P)g(P) = 0$.
- ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK.

1. Necht' funkce f, g, h jsou funkce více proměnných definované na množině A , C je hromadný bod A , U okolí C a pro $P \in A \cap U, P \neq C$ je $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$. Jestliže existují $\lim_{P \rightarrow C} f(P)$, $\lim_{P \rightarrow C} h(P)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim_{P \rightarrow C} g(P)$ a rovná se oběma zbývajícím. ↓



To bylo o policajtech.

- ↓
2. Necht' $\lim_{P \rightarrow C} f(P) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu C . Pak platí rovnost $\lim_{P \rightarrow C} f(P)g(P) = 0$.
- ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



V případě $\lim_{P \rightarrow C} f(x) = +\infty$
není nutné v prvním důsledku uvažovat funkci h , a podobně u limity $-\infty$ není nutné uvažovat funkci f .

LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Zatímco definiční obor M funkce f dvou proměnných je podmnožina roviny, její obor hodnot je podmnožina přímky.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
 - limity
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

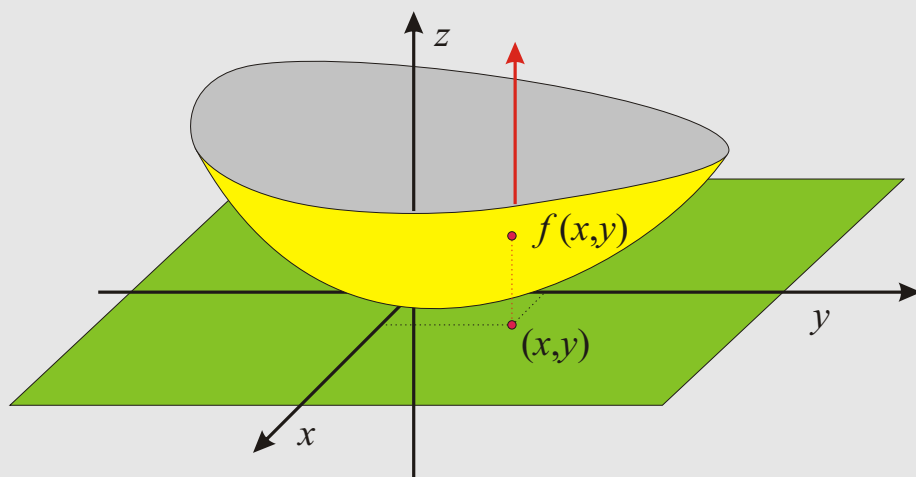
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Zatímco definiční obor M funkce f dvou proměnných je podmnožina roviny, její obor hodnot je podmnožina přímky.



Grafem takové funkce je podmnožina prostoru $\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in M\} \mathbb{R}^3$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

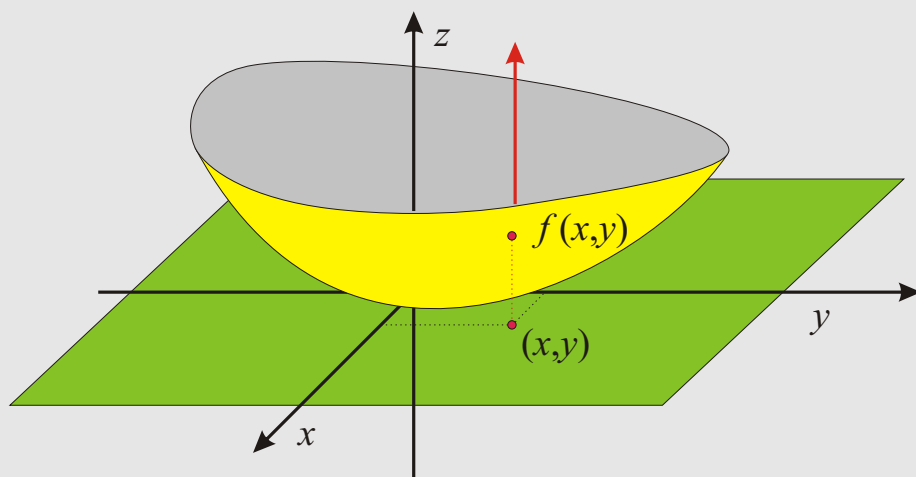
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Zatímco definiční obor M funkce f dvou proměnných je podmnožina roviny, její obor hodnot je podmnožina přímky.



Grafem takové funkce je podmnožina prostoru $\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in M\} \mathbb{R}^3$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je to plocha s vlastností, že každá přímka rovnoběžná s osou z protíná plochu nejvýše v jednom bodě.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy jde vlastně o toto: máte na zemi položenou plachtu. Na některých místech ji podepřete a tak získáte graf funkce dvou proměnných. Pokud přitom plachtu neprotrhnete, jde o spojitou funkci.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

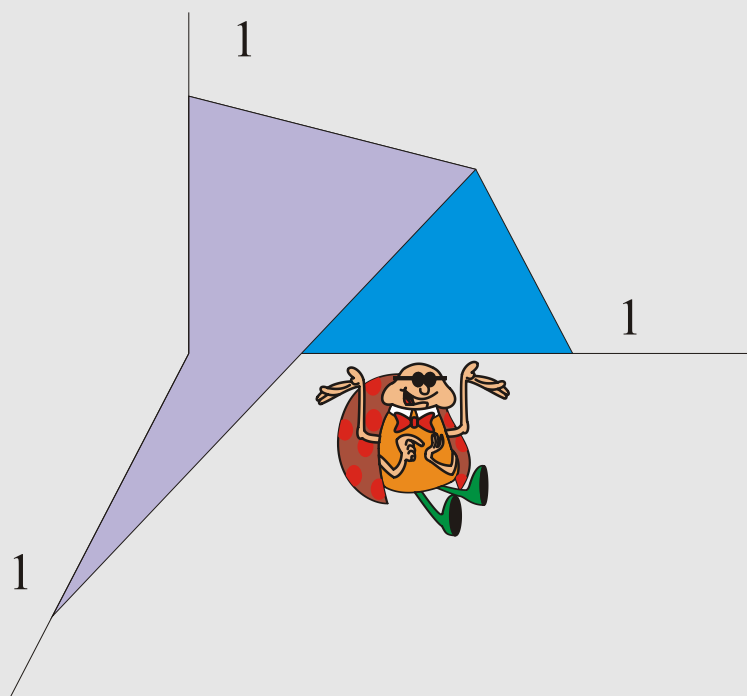
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tedy jde vlastně o toto: máte na zemi položenou plachtu. Na některých místech ji podepřete a tak získáte graf funkce dvou proměnných. Pokud přitom plachtu neprotrhnete, jde o spojitou funkci.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Graf funkce tří proměnných leží už ve čtyřrozměrném prostoru.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

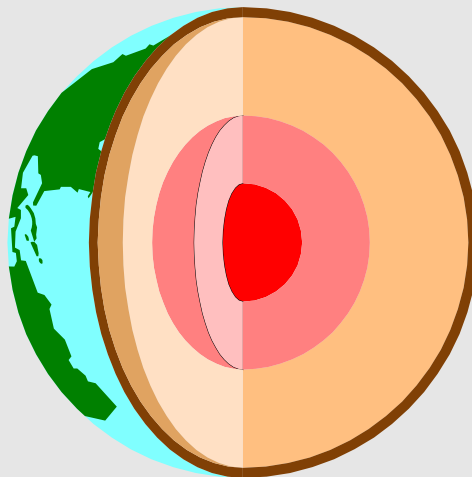
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Graf funkce tří proměnných leží už ve čtyřrozměrném prostoru.



Takováto funkce může například znázorňovat teplotu $f(x, y, z)$ v bodě (x, y, z) . Pomůžeme si barvami k označení bodů se stejnou teplotou. Například teplota v nitru Země:



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Skládání funkcí. ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Skládání funkcí. ↓

Skládání funkcí více proměnných má více možností než u funkcí jedné proměnné.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Skládání funkcí. ↓

Skládání funkcí více proměnných má více možností než u funkcí jedné proměnné.



Např., má-li být výsledkem $f \circ g$ reálná funkce dvou proměnných, může být f reálná funkce jedné proměnné a g reálná funkce dvou proměnných, nebo f reálná funkce dvou proměnných a g dvojice (g_1, g_2) reálných funkcí dvou proměnných (pak $(f \circ g)(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$), atd.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Skládání funkcí. ↓

Skládání funkcí více proměnných má více možností než u funkcí jedné proměnné.



Např., má-li být výsledkem $f \circ g$ reálná funkce dvou proměnných, může být f reálná funkce jedné proměnné a g reálná funkce dvou proměnných, nebo f reálná funkce dvou proměnných a g dvojice (g_1, g_2) reálných funkcí dvou proměnných (pak $(f \circ g)(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$), atd.



Někdy je nutné dávat pozor. Např. $f \circ (g_1, g_2)$, kde f je funkce dvou proměnných a g_1, g_2 jsou funkce jedné proměnné může znamenat buď funkci dvou proměnných, která v bodě (x, y) má hodnotu $f(g_1(x), g_2(y))$, nebo funkci jedné proměnné, která v bodě x má hodnotu $f(g_1(x), g_2(x))$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Skládání funkcí. ↓

Skládání funkcí více proměnných má více možností než u funkcí jedné proměnné.



Např., má-li být výsledkem $f \circ g$ reálná funkce dvou proměnných, může být f reálná funkce jedné proměnné a g reálná funkce dvou proměnných, nebo f reálná funkce dvou proměnných a g dvojice (g_1, g_2) reálných funkcí dvou proměnných (pak $(f \circ g)(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$), atd.



Někdy je nutné dávat pozor. Např. $f \circ (g_1, g_2)$, kde f je funkce dvou proměnných a g_1, g_2 jsou funkce jedné proměnné může znamenat buď funkci dvou proměnných, která v bodě (x, y) má hodnotu $f(g_1(x), g_2(y))$, nebo funkci jedné proměnné, která v bodě x má hodnotu $f(g_1(x), g_2(x))$.



Je tedy nutné upřesnit, o jaký případ se jedná.

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Aritmetika funkcí.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika funkcí.



Aritmetické operace s funkcemi f, g je možné definovat jen na průniku jejich definičních oborů.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aritmetika funkcí.



Aritmetické operace s funkcemi f, g je možné definovat jen na průniku jejich definičních oborů.



Není tedy možné používat součet funkce dvou proměnných a funkce tří proměnných!!!

Konec poznámek 2.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Funkce $x^4 \sin(xy^2)$ je spojitá funkce.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Zjistěte možnost spojitého rozšíření funkce $f(x, y) = x^2y/(x^2 + y^2)$ do bodu (0,0) (tj., zda existuje limita $f(x, y)$ v bodě (0,0)).



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
 - limity
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Funkce $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ nemá limitu v počátku, protože se dostanou různé hodnoty limit posloupností, které se k počátku blíží po různých přímkách.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence

kompaktnost

vlastnosti

konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Bolzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity

funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cyklindrické souřadnice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Funkce $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ nemá limitu v počátku, protože se dostanou různé hodnoty limit posloupností, které se k počátku blíží po různých přímkách.



Pro posloupnost $\{(1/n, k/n)\}_n$ je $\lim_n f((1/n, k/n)) = 1/(1 + k^2)$ a tedy závisí na volbě k .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Funkce $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ nemá limitu v počátku, protože se dostanou různé hodnoty limit posloupností, které se k počátku blíží po různých přímkách.



Pro posloupnost $\{(1/n, k/n)\}_n$ je $\lim_n f((1/n, k/n)) = 1/(1 + k^2)$ a tedy závisí na volbě k .



4. Změníte-li v předchozím příkladě funkci f na $x^2y/(x^4 + y^2)$, dostanete při stejné volbě posloupností blížících se k počátku po přímkách vždy 0.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Funkce $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ nemá limitu v počátku, protože se dostanou různé hodnoty limit posloupností, které se k počátku blíží po různých přímkách.



Pro posloupnost $\{(1/n, k/n)\}_n$ je $\lim_n f((1/n, k/n)) = 1/(1 + k^2)$ a tedy závisí na volbě k .



4. Změníte-li v předchozím příkladě funkci f na $x^2y/(x^4 + y^2)$, dostanete při stejné volbě posloupností blížících se k počátku po přímkách vždy 0.



Ale blížíte-li se po parabole $y = x^2$, dostanete hodnotu 1/2.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Funkce $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ nemá limitu v počátku, protože se dostanou různé hodnoty limit posloupností, které se k počátku blíží po různých přímkách.



Pro posloupnost $\{(1/n, k/n)\}_n$ je $\lim_n f((1/n, k/n)) = 1/(1 + k^2)$ a tedy závisí na volbě k .



4. Změníte-li v předchozím příkladě funkci f na $x^2y/(x^4 + y^2)$, dostanete při stejné volbě posloupností blížících se k počátku po přímkách vždy 0.



Ale blížíte-li se po parabole $y = x^2$, dostanete hodnotu 1/2.



Takže limita této funkce v počátku opět neexistuje.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ podle věty o limitě složené funkce (za vnitřní funkci se použije $z = x^2 + y^2$).



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Funkce $\lg(x/y)(x^2 - y^2)^{-1}$ je spojitá, protože x/y je spojitá jako racionální funkce, složení s \lg (funkce jedné proměnné) je spojité a vynásobení s racionální funkcí $(x^2 - y^2)^{-1}$ je také spojité.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Funkce $\lg(x/y)(x^2 - y^2)^{-1}$ je spojitá, protože x/y je spojitá jako racionální funkce, složení s \lg (funkce jedné proměnné) je spojité a vynásobení s racionální funkcí $(x^2 - y^2)^{-1}$ je také spojité.



Jaký má daná funkce definiční obor?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Funkce $\lg(x/y)(x^2 - y^2)^{-1}$ je spojitá, protože x/y je spojitá jako racionální funkce, složení s \lg (funkce jedné proměnné) je spojité a vynásobení s racionální funkcí $(x^2 - y^2)^{-1}$ je také spojité.



Jaký má daná funkce definiční obor?



V kterých bodech hranice svého definičního oboru lze tuto funkce dodefinovat tak, že bude v těchto bodech spojitá?

Konec příkladů 2.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte, že podmnožina roviny A je kompaktní, právě když lze z každé posloupnosti v A vybrat podposloupnost konvergující v A .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte, že podmnožina roviny A je kompaktní, právě když lze z každé posloupnosti v A vybrat podposloupnost konvergující v A .



To je tedy další možná definice kompaktnosti.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte, že podmnožina roviny A je kompaktní, právě když lze z každé posloupnosti v A vybrat podposloupnost konvergující v A .



To je tedy další možná definice kompaktnosti.

2. Uvědomte si, že tvrzení o aritmetice okolí v \mathbb{R} vlastně tvrdí:



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte, že podmnožina roviny A je kompaktní, právě když lze z každé posloupnosti v A vybrat podposloupnost konvergující v A .



To je tedy další možná definice kompaktnosti.

2. Uvědomte si, že tvrzení o aritmetice okolí v \mathbb{R} vlastně tvrdí:



VĚTA.

1. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z \mathbb{R} jejich součet $x + y$ je spojitá.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte, že podmnožina roviny A je kompaktní, právě když lze z každé posloupnosti v A vybrat podposloupnost konvergující v A .



To je tedy další možná definice kompaktnosti.

2. Uvědomte si, že tvrzení o aritmetice okolí v \mathbb{R} vlastně tvrdí:



VĚTA.

1. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z \mathbb{R} jejich součet $x + y$ je spojitá.



2. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z \mathbb{R} jejich součin xy je spojitá.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 2 :

1. Dokažte, že podmnožina roviny A je kompaktní, právě když lze z každé posloupnosti v A vybrat podposloupnost konvergující v A .



To je tedy další možná definice kompaktnosti.

2. Uvědomte si, že tvrzení o aritmetice okolí v \mathbb{R} vlastně tvrdí:



VĚTA.

1. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z \mathbb{R} jejich součet $x + y$ je spojitá.



2. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z \mathbb{R} jejich součin xy je spojitá.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z \mathbb{R} jejich podíl x/y je spojitá.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z \mathbb{R} jejich podíl x/y je spojitá.



3. Ověřte, že na základě předchozího odstavce je možné dokázat spojitost součtu, atd. dvou funkcí f, g pomocí spojitosti složené funkce přiřazující bodu (x, y) nejdříve bod roviny $(f(x, y), g(x, y))$ a potom součet (součin, podíl) souřadnic tohoto bodu.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Je funkce $2x^2y - zy^5 + 6xyz^3 - 7$ polynomem?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Je funkce $2x^2y - zy^5 + 6xyz^3 - 7$ polynomem?



Jestliže ano, jak vznikla podle definice polynomu?



LEKCE17-FVP
obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Ověřte, že definiční obor racionální funkce je vždy otevřená podmnožina roviny.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Dokažte, že Bolzanova věta platí, vezmou-li se místo intervalů v definičním oboru funkce otevřené *souvislé* množiny (to jsou takové otevřené množiny, které s každou svou dvojicí bodů obsahují i lomenou čáru, která je spojuje).



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Dokažte, že Bolzanova věta platí, vezmou-li se místo intervalů v definičním oboru funkce otevřené *souvislé* množiny (to jsou takové otevřené množiny, které s každou svou dvojicí bodů obsahují i lomenou čáru, která je spojuje).



Uvažte, že lze použít i množiny, které s každou svou dvojicí bodů obsahují i spojitou křivku, která je spojuje.

Konec otázek 2.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Zkoumejte funkci

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Zkoumejte funkci

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$



Ověřte, zda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y).$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Zkoumejte funkci

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$



Ověřte, zda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y).$$



Řešení. Lehce ověříme, že funkce f je rovna 1 na x -ové ose a -1 na y -ové ose.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Zkoumejte funkci

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$



Ověřte, zda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y).$$



Řešení. Lehce ověříme, že funkce f je rovna 1 na x -ové ose a -1 na y -ové ose.



O spojitém rozšíření nemůže být ani řeči.

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9





Záměna pořadí limitění není samozřejmě v tomto případě možná.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

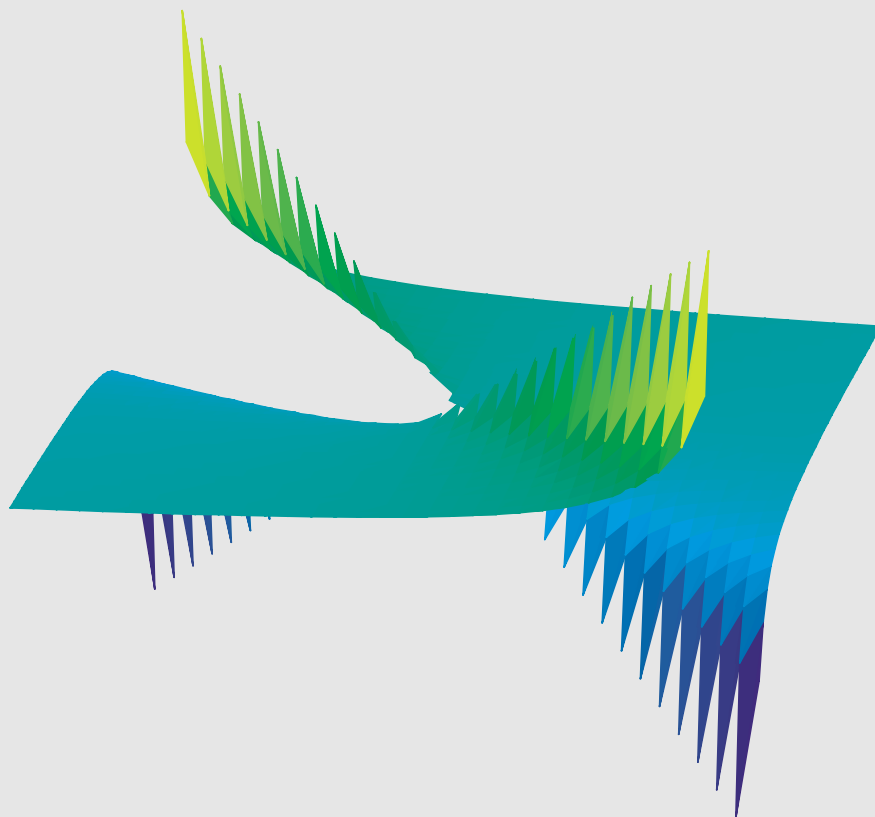
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limity funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

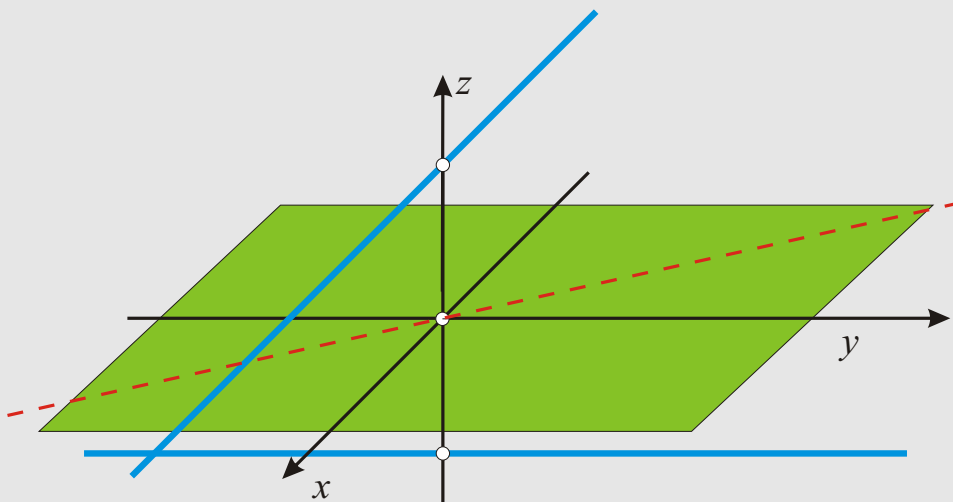
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na následujícím obrázku vidíme pouze chování na osách.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

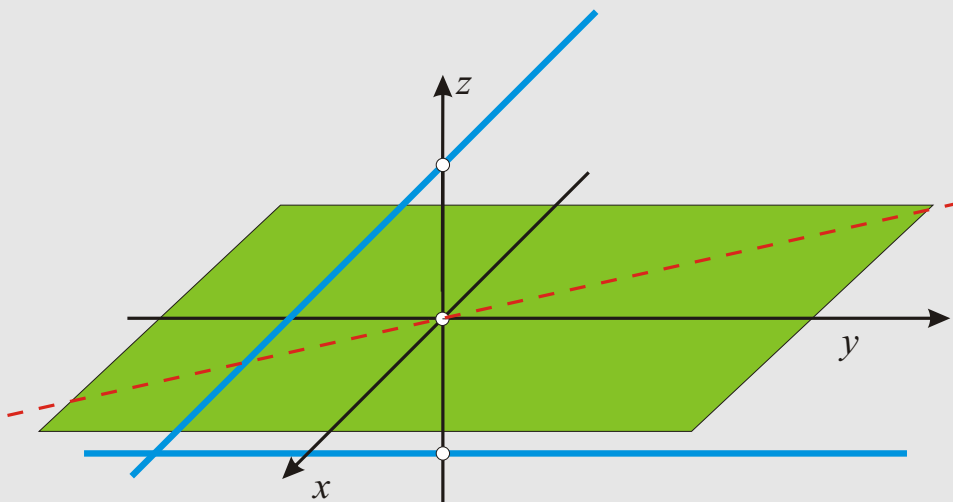
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na následujícím obrázku vidíme pouze chování na osách.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Uvědomme si, že na skoro každém řezu rovnoběžném s osami jde o lineární lomenou funkci jedné proměnné.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} ?$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



Navíc je rovna jedničce na přímce $y = x$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



Navíc je rovna jedničce na přímce $y = x$.



Tedy funkce nemá v počátku limitu.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



Navíc je rovna jedničce na přímce $y = x$.



Tedy funkce nemá v počátku limitu.



Jde to ověřit podle definice?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

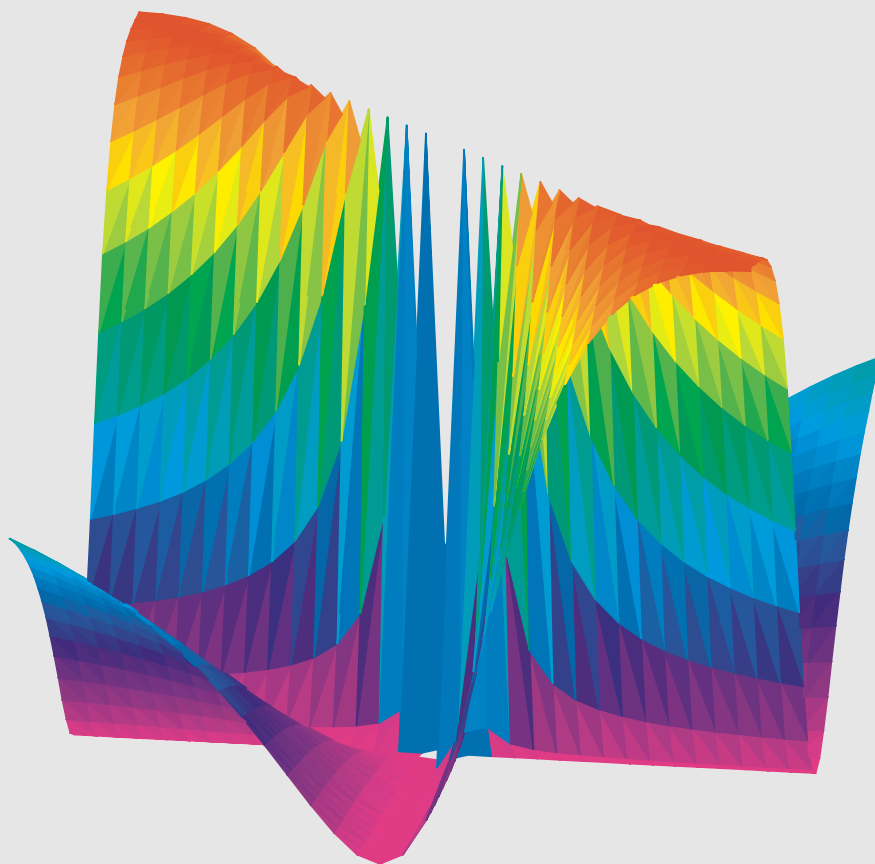
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce ve skutečnosti vypadá takto a dělá přes počátek jakýsi most.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} ?$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
 - limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



Navíc je rovna $1/2$ na přímce $y = x$ a $-1/2$ na přímce $y = -x$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} ?$$



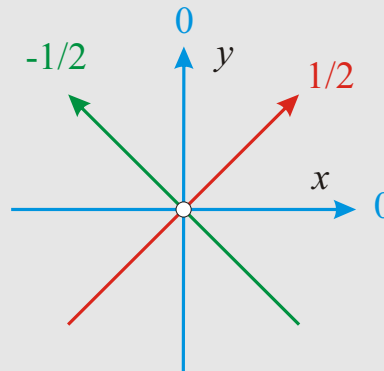
Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



Navíc je rovna $1/2$ na přímce $y = x$ a $-1/2$ na přímce $y = -x$.



Schematicky



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

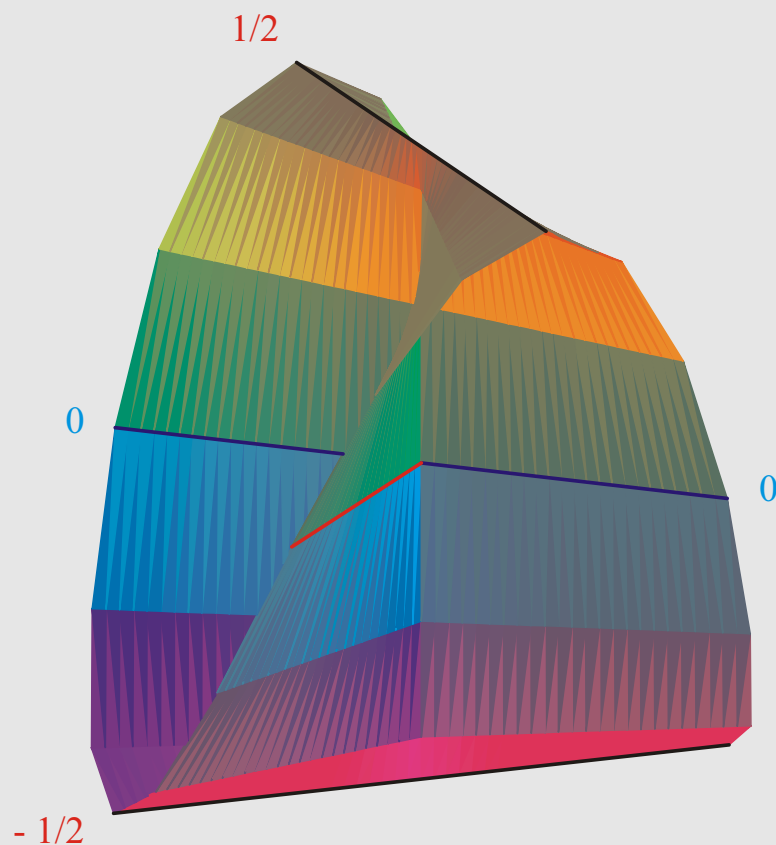
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přesný graf vypadá takto



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Pokud použijeme polární souřadnice, jde funkce přepsat na tvar $(r, \alpha) \mapsto \cos \alpha \sin \alpha$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud použijeme polární souřadnice, jde funkci přepsat na tvar $(r, \alpha) \mapsto \cos \alpha \sin \alpha$.



Tedy se funkce rovná konstantě na každé polopřímce vycházející z počátku v rovině xy .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud použijeme polární souřadnice, jde funkci přepsat na tvar $(r, \alpha) \mapsto \cos \alpha \sin \alpha$.



Tedy se funkce rovná konstantě na každé polopřímce vycházející z počátku v rovině xy .



Jedná se tedy o pěknou přímkovou plochu.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud použijeme polární souřadnice, jde funkci přepsat na tvar $(r, \alpha) \mapsto \cos \alpha \sin \alpha$.



Tedy se funkce rovná konstantě na každé polopřímce vycházející z počátku v rovině xy .



Jedná se tedy o pěknou přímkovou plochu.



Takové triky s polárními souřadnicemi použijeme často.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

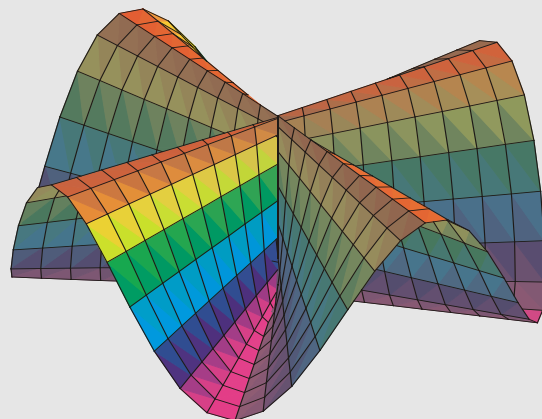
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tak jde sestrojít funkce, která má graf roven pěknému čtyřlístku.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} ?$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Existuje

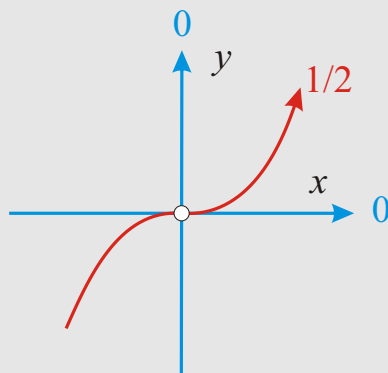
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} ?$$



Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.



Navíc je rovna 1/2 na kubické paraboly $y = x^3$.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tak vidíme, že spojitost musíme ověřovat po různých křivkách, ale můžeme tak pouze ověřit nespojitost.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tak vidíme, že spojitost musíme ověřovat po různých křivkách, ale můžeme tak pouze ověřit nespojitost.



Spojitost se musí dokázat!



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tak vidíme, že spojitost musíme ověřovat po různých křivkách, ale můžeme tak pouze ověřit nespojitost.



Spojítost se musí dokázat!



Použijeme buď definici pomocí posloupností nebo definici $\varepsilon - \delta$.

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} .$$



Řešení. Funkční hodnota je rovna

$$\exp(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2)) .$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} .$$



Řešení. Funkční hodnota je rovna

$$\exp(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2)) .$$



Nyní uděláme úpravy a dostaneme



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} .$$



Řešení. Funkční hodnota je rovna

$$\exp(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2)) .$$



Nyní uděláme úpravy a dostaneme



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Snad ne !



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Upravíme

$$|(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2))| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) \right| .$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Upravíme

$$|(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2))| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) \right|.$$



První činitel je omezený číslem 1/2 (známý odhad).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Upravíme

$$|(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2))| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) \right|.$$



První činitel je omezený číslem $1/2$ (známý odhad).



Druhý činitel má limitu 0 (vznikne ze známé limity $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ s použitím věty o limitě složené funkce).



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Upravíme

$$|(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2))| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) \right|.$$



První činitel je omezený číslem 1/2 (známý odhad).



Druhý činitel má limitu 0 (vznikne ze známé limity $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ s použitím věty o limitě složené funkce).



Tedy díky spojitosti exponenciály dostaneme celkovou limitu 1.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Upravíme

$$|(x^2 y^2 \log(x^2 + y^2))| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) \right|.$$



První činitel je omezený číslem 1/2 (známý odhad).



Druhý činitel má limitu 0 (vznikne ze známé limity $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x$ s použitím věty o limitě složené funkce).



Tedy díky spojitosti exponenciály dostaneme celkovou limitu 1.



Rychle vzpomínejte na další užitečné limity!



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

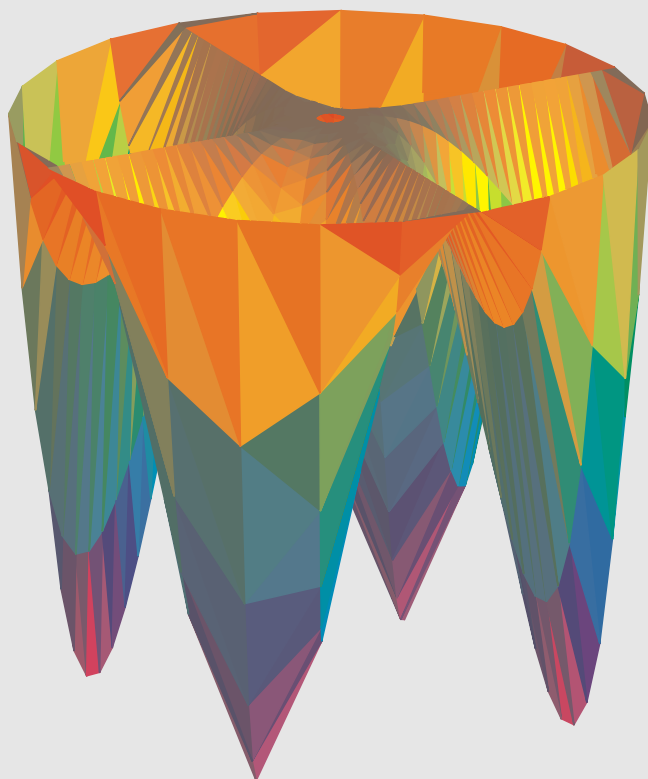
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Takhle vypadá graf u počátku



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Implicitní popsání plochy



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Implicitní popsání plochy



Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Implicitní popsání plochy



Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.



Podobně je tomu s křivkami, a navíc i plochami, v 3-dimenzionálního prostoru.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Implicitní popsání plochy



Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.



Podobně je tomu s křivkami, a navíc i plochami, v 3-dimenzionálního prostoru.



DEFINICE. Necht' A je polootevřená množina v \mathbb{R}^3 a f je spojitá funkce na A .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Bolzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cylindrické souřad-
nice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Implicitní popsání plochy



Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.



Podobně je tomu s křivkami, a navíc i plochami, v 3-dimenzionálního prostoru.



DEFINICE. Necht' A je polootevřená množina v \mathbb{R}^3 a f je spojitá funkce na A .



Rovnice

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{pro } (x, y, z) \in A,$$

popisuje **implicitně plochu** $P = \{(x, y, z); f(x, y, z) = 0\}$ v trojrozměrném prostoru.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti

spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce

plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Implicitní popsání plochy



Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.



Podobně je tomu s křivkami, a navíc i plochami, v 3-dimenzionálního prostoru.



DEFINICE. Necht' A je polootevřená množina v \mathbb{R}^3 a f je spojitá funkce na A .



Rovnice

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{pro } (x, y, z) \in A,$$

popisuje **implicitně plochu** $P = \{(x, y, z); f(x, y, z) = 0\}$ v trojrozměrném prostoru.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti

spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce

plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Speciální případ je $z = f(x, y)$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

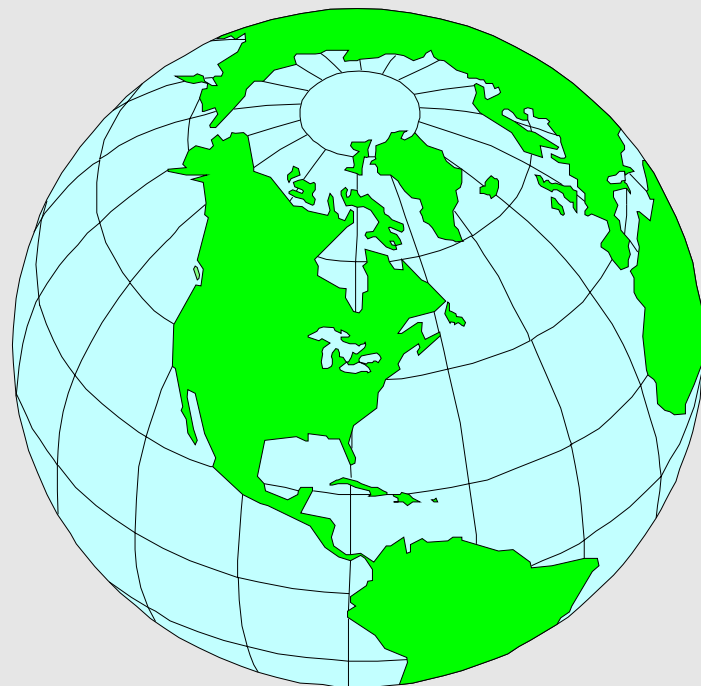
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Např. rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ popisuje povrch koule o poloměru a a středu v počátku.

V definici popsaná množina P byla nazvána plochou. Stejně jako křivka v rovině může být degenerovaná, tj. bod (nebo naopak vyplní např. celý čtverec), může i tato množina P být bodem nebo křivkou nebo i tělesem. V praxi používaných případech se však jedná o „pravé“ plochy.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivka v prostoru se pomocí implicitního zadání popisuje jako průnik dvou implicitně zadaných ploch.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

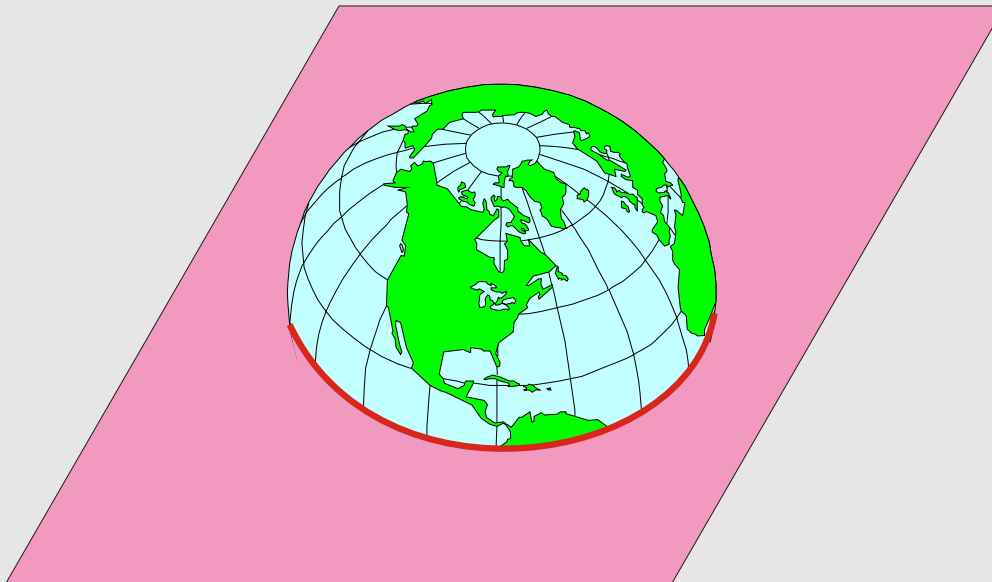
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Křivka v prostoru se pomocí implicitního zadání popisuje jako průnik dvou implicitně zadaných ploch.



Např. kružnice se středem v počátku a poloměru a jako průnik povrchu koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ s rovinou $px + qy + rz = 0$:



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parametrické popsání množin



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parametrické popsání množin



Stejně jako v případě křivek v rovině, bývá i v prostoru práce s parametrickým popisem křivek a ploch jednodušší.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parametrické popsání množin



Stejně jako v případě křivek v rovině, bývá i v prostoru práce s parametrickým popisem křivek a ploch jednodušší.



DEFINICE. Necht' φ, ψ, τ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parametrické popsání množin



Stejně jako v případě křivek v rovině, bývá i v prostoru práce s parametrickým popisem křivek a ploch jednodušší.



DEFINICE. Necht' φ, ψ, τ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.



Rovnice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \tau(t) \quad \text{pro } t \in I$$

popisují **parametricky křivku** $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in I\}$ v trojrozměrném prostoru.

Platí zde stejná poznámka, jako u implicitně zadaných ploch, že výsledkem může být i degenerovaná plocha, nebo naopak těleso.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Parametrické popsání množin



Stejně jako v případě křivek v rovině, bývá i v prostoru práce s parametrickým popisem křivek a ploch jednodušší.



DEFINICE. Necht' φ, ψ, τ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.



Rovnice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \tau(t) \quad \text{pro } t \in I$$

popisují **parametricky křivku** $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in I\}$ v trojrozměrném prostoru.

Platí zde stejná poznámka, jako u implicitně zadaných ploch, že výsledkem může být i degenerovaná plocha, nebo naopak těleso.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

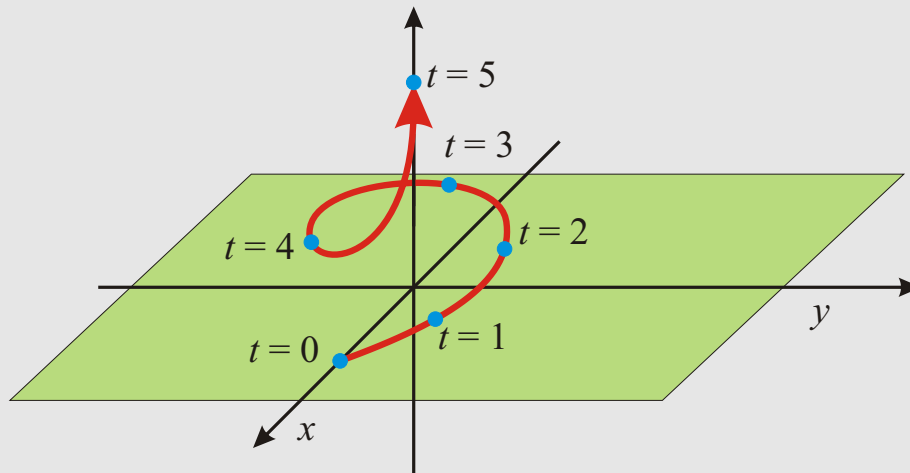
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť A je polootevřená množina v rovině a φ, ψ, τ jsou spojité funkce na A .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť A je polootevřená množina v rovině a φ, ψ, τ jsou spojité funkce na A .



Rovnice

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \tau(u, v) \quad \text{pro } (u, v) \in A$$

popisují **parametricky plochu** $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in A\}$ v trojrozměrném prostoru.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť A je polootevřená množina v rovině a φ, ψ, τ jsou spojité funkce na A .



Rovnice

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \tau(u, v) \quad \text{pro } (u, v) \in A$$

popisují **parametricky plochu** $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in A\}$ v trojrozměrném prostoru.



Množina A je zde jako dvojrozměrný svět parametrů, které popisují pomocí zobrazení $(u, v) \mapsto (x, y, z)$ trojrozměrný svět obrazů.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť A je polootevřená množina v rovině a φ, ψ, τ jsou spojité funkce na A .



Rovnice

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \tau(u, v) \quad \text{pro } (u, v) \in A$$

popisují **parametricky plochu** $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in A\}$ v trojrozměrném prostoru.



Množina A je zde jako dvojrozměrný svět parametrů, které popisují pomocí zobrazení $(u, v) \mapsto (x, y, z)$ trojrozměrný svět obrazů.



To je to samé jako u křivky.
O.Ā.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

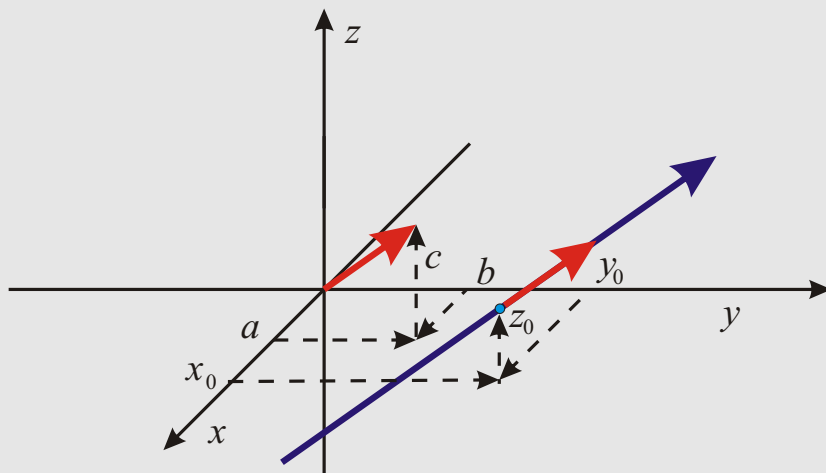
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Např. rovnice

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct, t \in (-\infty, +\infty)$$

popisuje přímku procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a mající směr vektoru (a, b, c) .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rovnice

$$x = x_0 + a_1u + a_2v, y = y_0 + b_1u + b_2v, z = z_0 + c_1u + c_2v$$

pro $u, v \in (-\infty, +\infty)$, popisuje rovinu procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a rovnoběžnou s vektory $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence

kompaktnost

vlastnosti

konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Boľzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity

funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cylindrické souřadnice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Rovnice

$$x = x_0 + a_1u + a_2v, y = y_0 + b_1u + b_2v, z = z_0 + c_1u + c_2v$$

pro $u, v \in (-\infty, +\infty)$, popisuje rovinu procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a rovnoběžnou s vektory $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$.



Zase je zde vztah mezi parametry (u, v) a jejich obrazy (x, y, z) .



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

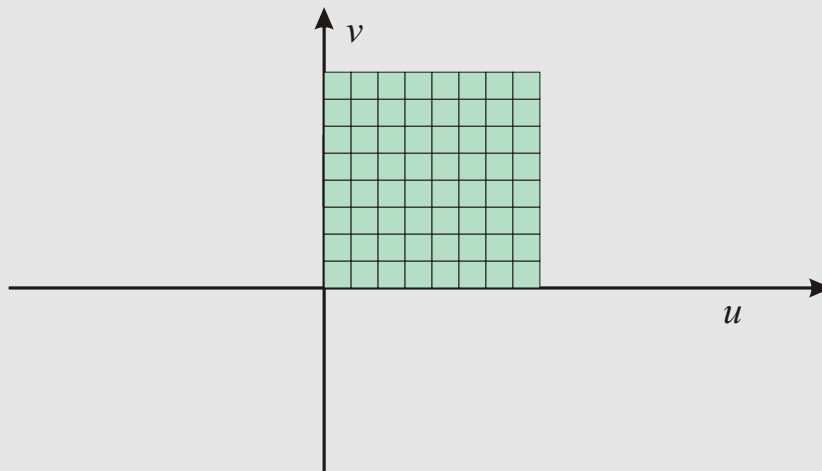
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Svět parametrů při parametrizování roviny



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

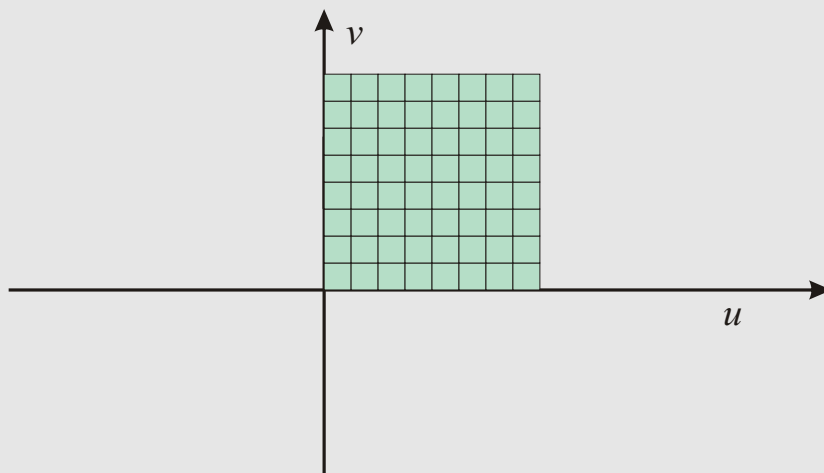
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Svět parametrů při parametrizování roviny



Svět obrazů při parametrizování roviny

LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

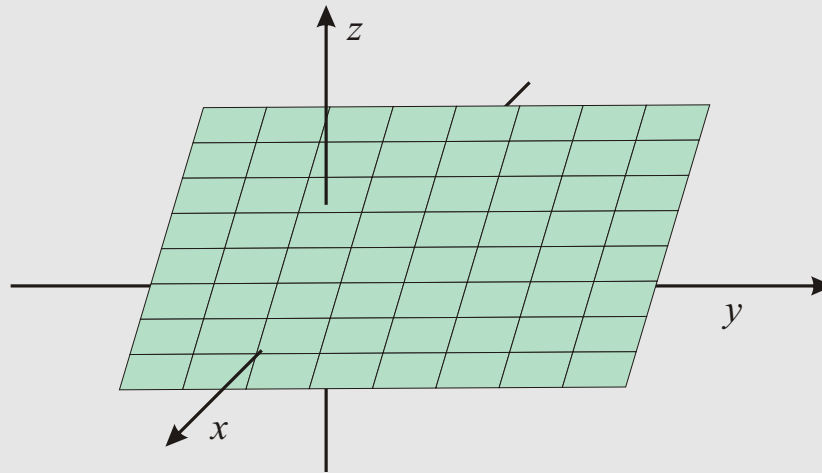
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' přijde obvykle na řadu šroubovnice :-)



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Ted' přijde obvykle na řadu šroubovnice :-)



To je matematický šroub?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cyklindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Svět parametrů u šroubovnice



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

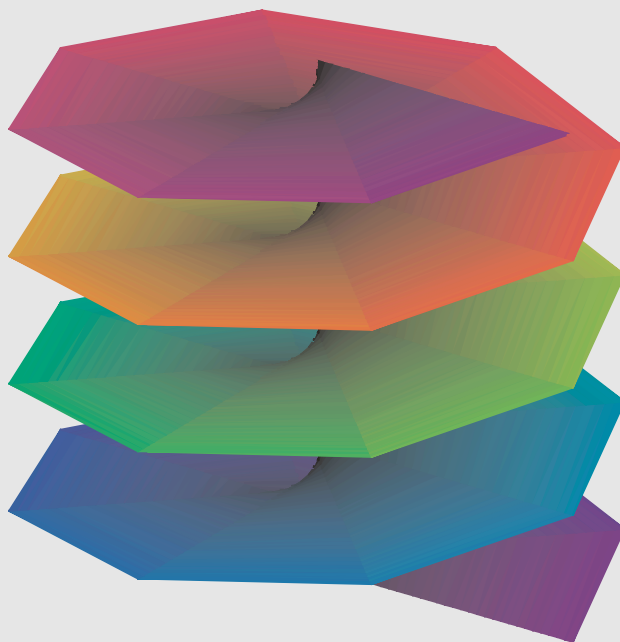
Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Svět parametrů u šroubovnice



Svět obrazů u šroubovnice



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je hezké, že si odpovídají i barvičky.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Je hezké, že si odpovídají i barvičky.



To je tím, že jsem se hodně snažila :-)



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic ↓

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic ↓

Povrch válce (kolmého na rovinu xy) o středu v počátku a poloměru r bez podstav se parametricky popíše jako

$$x = r \cos u, y = r \sin u, z = v, \quad u \in [0, 2\pi), v \in I,$$

kde I je nějaký interval v \mathbb{R} .



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic ↓

Povrch válce (kolmého na rovinu xy) o středu v počátku a poloměru r bez podstav se parametricky popíše jako

$$x = r \cos u, y = r \sin u, z = v, \quad u \in [0, 2\pi), v \in I,$$

kde I je nějaký interval v \mathbb{R} .



V rovinách rovnoběžných s rovinou xy jsou tedy použity polární souřadnice k popisu průniku této roviny s plochou.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic ↓

Povrch válce (kolmého na rovinu xy) o středu v počátku a poloměru r bez podstav se parametricky popíše jako

$$x = r \cos u, y = r \sin u, z = v, \quad u \in [0, 2\pi), v \in I,$$

kde I je nějaký interval v \mathbb{R} .



V rovinách rovnoběžných s rovinou xy jsou tedy použity polární souřadnice k popisu průniku této roviny s plochou.



Tento „přenos“ polárních souřadnic do prostoru popisuje následující definice.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Cylindrické (válnové) souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z) , kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y) :



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. **Cylindrické (válnové)** souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z) , kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y) :



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} (+\pi), z = z$$

$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = z.$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. **Cylindrické (válnové)** souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z) , kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y) :



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} (+\pi), z = z$$
$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = z.$$



Množina je popsána cylindrickými souřadnicemi zadáním funkce $z(r, \alpha)$ (nebo $r(\alpha, z)$).
(Uvědomte si, proč je v popisu úhlu α v závorce $(+)$.)



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Cylindrické (válcové) souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z) , kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y) :



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} (+\pi), z = z$$
$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = z.$$



Množina je popsána cylindrickými souřadnicemi zadáním funkce $z(r, \alpha)$ (nebo $r(\alpha, z)$). (Uvědomte si, proč je v popisu úhlu α v závorce $(+)$.)



Jde opravdu v podstatě o polární souřadnice.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastností funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

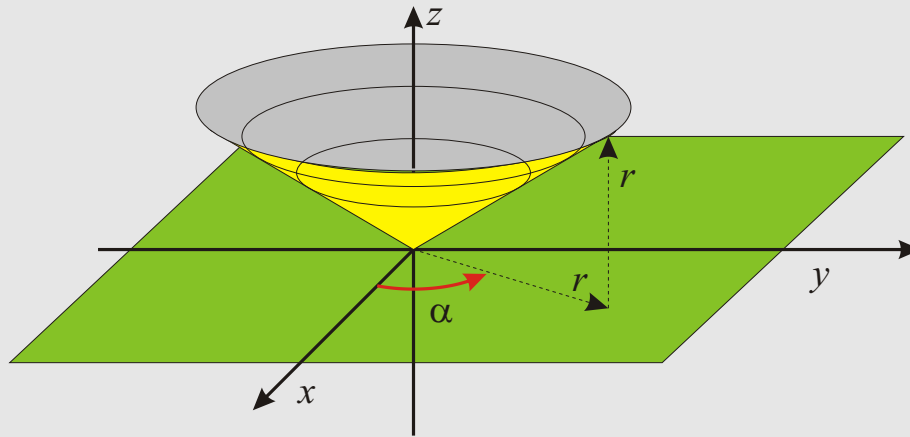
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Např. plášť kužele s vrcholem v počátku je dán rovnicí $z = r$ pro $\alpha \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, 1]$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

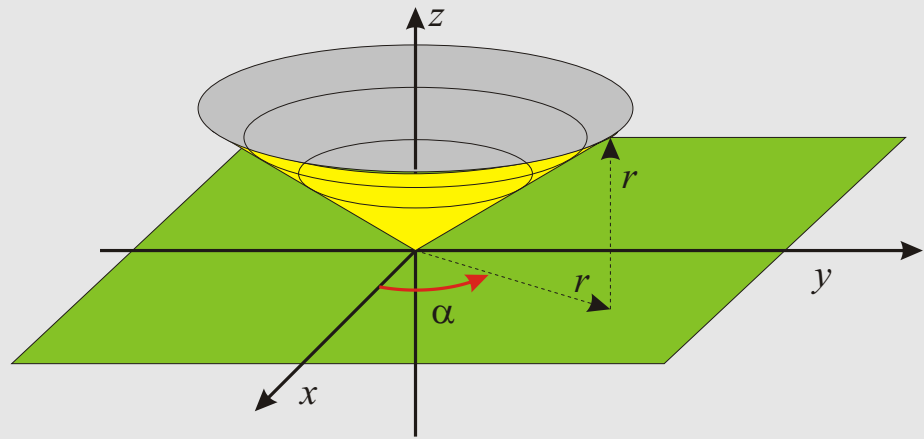
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Např. plášť kužele s vrcholem v počátku je dán rovnicí $z = r$ pro $\alpha \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, 1]$.



Hezkej cylindr ;-)



LEKCE17-FVP
obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence
- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popsání množiny pomocí sférických souřadnic



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popsání množiny pomocí sférických souřadnic



Povrch koule o poloměru a a středu v počátku se parametricky popíše jako

$$x = r \cos \beta \cos \alpha, y = r \cos \beta \sin \alpha, z = r \sin \beta, \quad \alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2], r = a.$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
 - limity
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Popsání množiny pomocí sférických souřadnic



Povrch koule o poloměru a a středu v počátku se parametricky popíše jako

$$x = r \cos \beta \cos \alpha, y = r \cos \beta \sin \alpha, z = r \sin \beta, \quad \alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2], r = a.$$



Podobným způsobem se určují zeměpisné souřadnice:



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Volbou různých nezáporných a lze tímto způsobem popsat každý bod prostoru.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Volbou různých nezáporných a lze tímto způsobem popsat každý bod prostoru.



DEFINICE. **Sférické** souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, β) , kde

$$x = r \cos \beta \cos \alpha, y = r \cos \beta \sin \alpha, z = r \sin \beta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \alpha = \arctg \frac{y}{x} (+\pi), \beta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Volbou různých nezáporných a lze tímto způsobem popsat každý bod prostoru.



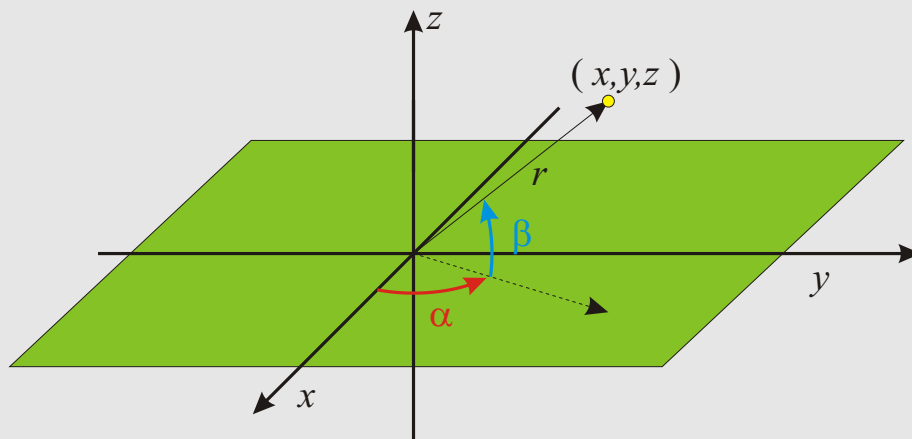
DEFINICE. Sférické souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, β) , kde

$$x = r \cos \beta \cos \alpha, y = r \cos \beta \sin \alpha, z = r \sin \beta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \alpha = \arctg \frac{y}{x} (+\pi), \beta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Množina je popsána sférickými souřadnicemi je-li zadána funkce $r(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in A$. Body množiny pak mají sférické souřadnice $(r(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$, kde (α, β) probíhají množinu A (ta bývá polootevřená, často interval na přímce nebo v rovině).



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Volbou různých nezáporných a lze tímto způsobem popsat každý bod prostoru.



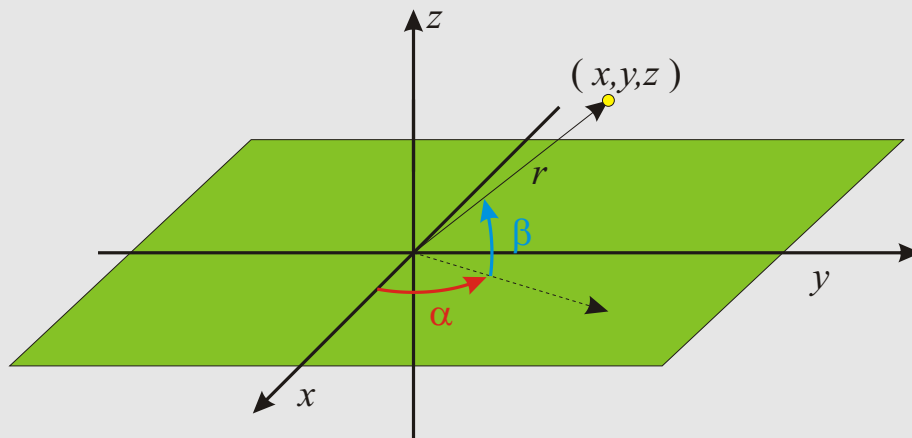
DEFINICE. Sférické souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, β) , kde

$$x = r \cos \beta \cos \alpha, y = r \cos \beta \sin \alpha, z = r \sin \beta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \alpha = \arctg \frac{y}{x} (+\pi), \beta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Množina je popsána sférickými souřadnicemi je-li zadána funkce $r(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in A$. Body množiny pak mají sférické souřadnice $(r(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$, kde (α, β) probíhají množinu A (ta bývá polootevřená, často interval na přímce nebo v rovině).



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Např. koule o poloměru a a středu v počátku je zadána rovnicí $r = a$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

- vlastnosti funkce
- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

V dané situaci nebývá jednoduché rozhodnout, jakou pro danou množinu zvolit parametrizaci.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence

kompaktnost

vlastnosti

konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti

spojitost součtu,...

spojitost složení

Boľzanova věta

Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity

funkce

plocha implicitně

plocha parametricky

cylické souřadnice

sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

V dané situaci nebývá jednoduché rozhodnout, jakou pro danou množinu zvolit parametrizaci.



Polární souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r .



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

V dané situaci nebývá jednoduché rozhodnout, jakou pro danou množinu zvolit parametrizaci.



Polární souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r .



Podobně je tomu u cylindrických souřadnic.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

V dané situaci nebývá jednoduché rozhodnout, jakou pro danou množinu zvolit parametrizaci.



Polární souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r .



Podobně je tomu u cylindrických souřadnic.



Sférické souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2 + z^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních nebo sférických souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r .



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí
spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

V dané situaci nebývá jednoduché rozhodnout, jakou pro danou množinu zvolit parametrizaci.



Polární souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r .



Podobně je tomu u cylindrických souřadnic.



Sférické souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2 + z^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních nebo sférických souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r .



Používají se i různé modifikace uvedených souřadnic. Např. výraz $x^2 + 4y^2$ se zjednoduší modifikovanými polárními souřadnicemi $x = r \cos \alpha$, $y = 2r \sin \alpha$.

Konec poznámek 3.

LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí
spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce
limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

1. Rovnost $y = x^2$ může znamenat jak funkci jedné proměnné (graf je parabola) tak implicitní zadání plochy v prostoru: $y - x^2 = 0$, kde chybí proměnná z – tj. $f(x, y, z) = y - x^2$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

1. Rovnost $y = x^2$ může znamenat jak funkci jedné proměnné (graf je parabola) tak implicitní zadání plochy v prostoru: $y - x^2 = 0$, kde chybí proměnná z – tj. $f(x, y, z) = y - x^2$.



Dovedete si představit tuto plochu?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti

konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Plocha zadaná rovností $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 4$ je elipsoid.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
 - konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Bolzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti funkce
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Jaká plocha je popsána rovností $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ověřte, že rovnost $r = 2 \sin \beta, \beta \in [0, \pi/2]$, popisuje ve sférických souřadnicích povrch koule o poloměru 1 a středu $(0, 0, 1)$.

Konec příkladů 3.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

Cylindrické souřadnice



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

Cylindrické souřadnice



(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

Cylindrické souřadnice



(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?



(b) Ve vzorci pro α je v závorce $+\pi$. Jaký je význam tohoto možného výběru?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti funkce limity
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 3 :

Cylindrické souřadnice



(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?



(b) Ve vzorci pro α je v závorce $+\pi$. Jaký je význam tohoto možného výběru?



(c) Kdy je vztah mezi (x, y, z) a (r, α, z) jednoznačný?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice



(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice



(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?



(b) Ve vzorci pro α je v závorce $+\pi$. Jaký je význam tohoto možného výběru? Proč tato možnost chybí ve vzorci pro β ?



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spojitosti
spojitost součtu, ...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice



(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?



(b) Ve vzorci pro α je v závorce $+\pi$. Jaký je význam tohoto možného výběru? Proč tato možnost chybí ve vzorci pro β ?



(c) Kdy je vztah mezi (x, y, z) a (r, α, β) jednoznačný?

Konec otázek 3.

LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastností funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Popište parapetricky anuloid.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Popište parapetricky anuloid.



Řešení. Zvolíme kružnici ležící v rovině xy o poloměru r se středem $(0, R)$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce

skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Popište parapetricky anuloid.



Řešení. Zvolíme kružnici ležící v rovině xy o poloměru r se středem $(0, R)$.



Její parametrizaci zvolíme $u \mapsto (r \sin u, R + r \cos u)$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Popište parapetricky anuloid.



Řešení. Zvolíme kružnici ležící v rovině xy o poloměru r se středem $(0, R)$.



Její parametrizaci zvolíme $u \mapsto (r \sin u, R + r \cos u)$.



Pro její rotaci okolo osy x potřebujeme další parametr.



LEKCE17-FVP obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

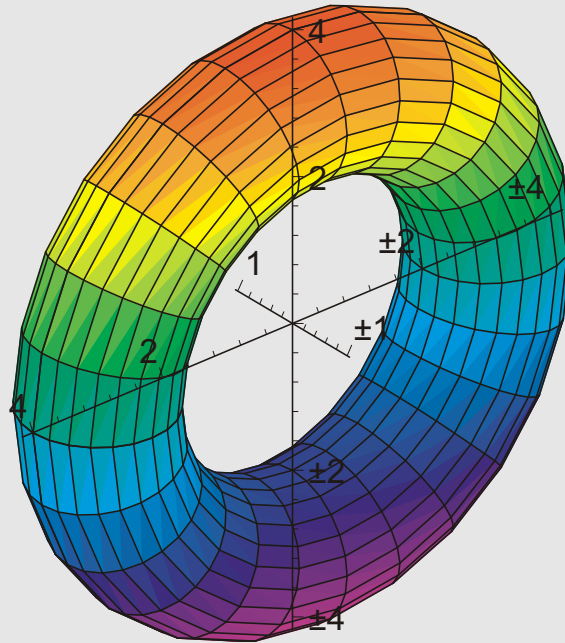
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

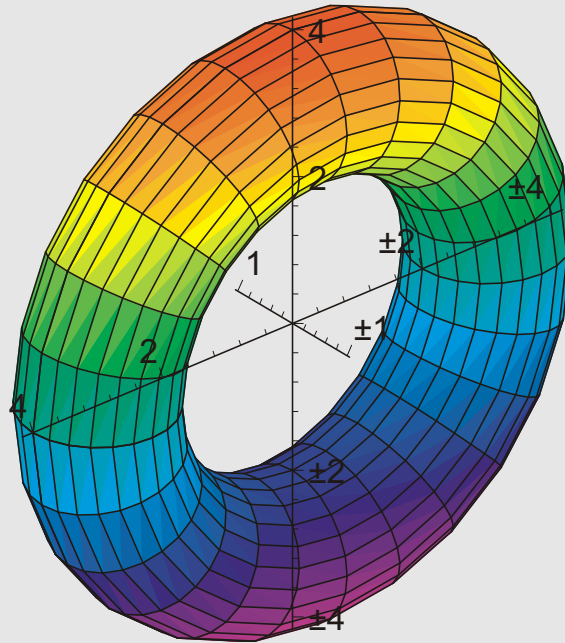
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Celkově dostaneme parametrizaci anuloidu

$$(u, v) \mapsto (R + u \cos(v/2), v, u \sin(v/2))$$

pro $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce
skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tomu bych chtěl rozumět :-)



LEKCE17-FVP

obecnosti

konvergence
kompaktnost
vlastnosti
konvergence

vlastnosti funkce skládání funkcí

spojitost

charakterizace spo-
jitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta

limita funkce

vlastnosti limity
funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřad-
nice
sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

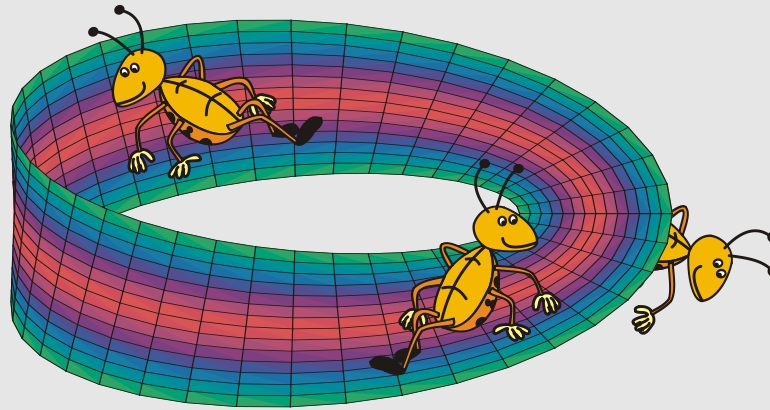
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Popište parametricky Mobiovu pásku.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

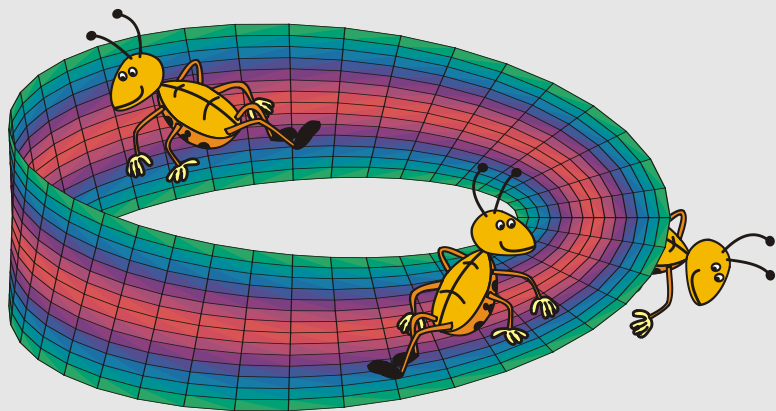
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Popište parametricky Mobiovu pásku.



Řešení. Množina vznikne rotací úsečky. Přitom pomalu úsečku otočíme o 180 stupňů.



LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cyklindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

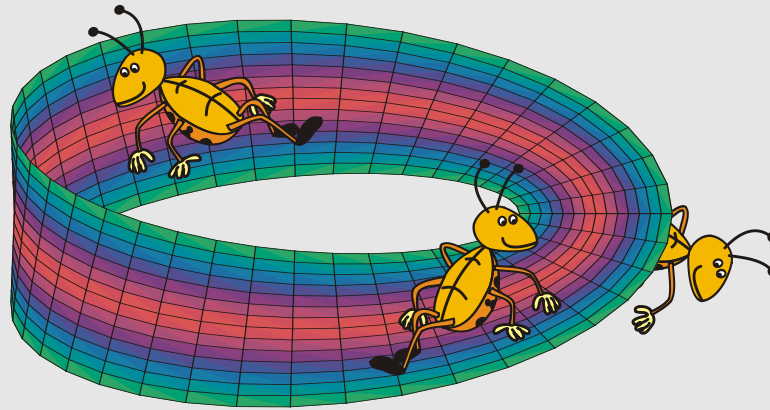
Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Popište parametricky Mobiovu pásku.



Řešení. Množina vznikne rotací úsečky. Přitom pomalu úsečku otočíme o 180 stupňů.



To se zpravidla nepovede
napoprvé bez chyby :-)

Konec cvičení 3.

LEKCE17-FVP

obecnosti

- konvergence
- kompaktnost
- vlastnosti
- konvergence

vlastnosti funkce

- skládání funkcí

spojitost

- charakterizace spojitosti
- spojitost součtu,...
- spojitost složení
- Boľzanova věta
- Weierstrassova věta

limita funkce

- vlastnosti
- limity funkce
- plocha implicitně
- plocha parametricky
- cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9