FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

V reálných situacích závisejí děje obvykle na více proměnných než jen na jedné (např. na teplotě i na tlaku), závislost na jedné proměnné je spíše výjimkou.

OBECNOSTI

Reálná funkce více proměnných je zobrazení definované na nějaké podmnožině (na svém definičním oboru) euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ (pro $n > 1$) s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Protože body $\mathbb{R}^n$ jsou n–tice reálných čísel $(x_1, x_2, ..., x_n)$, bývá takováto funkce f často značena jako $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, což vysvětluje termín *více proměnných*.

Naopak, funkce jedné reálné proměnné s hodnotami v nějakém euklidovském prostoru je zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a je to vlastně n–tice $(f_1, f_2, ..., f_n)$ reálných funkcí jedné reálné proměnné (f_k je složení f s projekcí $\mathbb{R}^n$ na k–tou složku, tj. $f_k(x)$ je k-tá souřadnice bodu $f(x)$) — ověřte si to.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je tedy n–tice reálných funkcí k–proměnných. Každé takové zobrazení se nazývá *funkce více proměnných*, pokud $k > 1$. Je-li $n = 1$, jedná se o *reálnou funkci*.

KONVERGENCE V $\mathbb{R}^N$

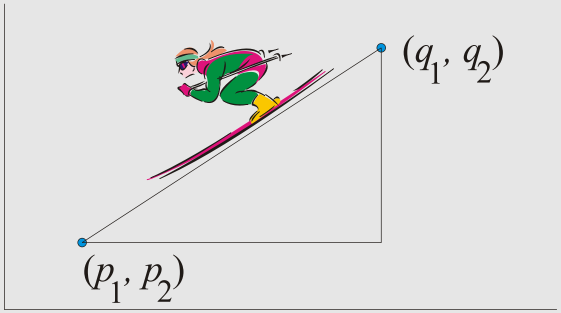
Před zkoumáním funkcí jedné proměnné bylo nutné vysvětlit vlastnosti reálné přímky.

Ze stejného důvodu následuje popis některých vlastností roviny a prostoru, které budou v následujícím textu často používány.

Vzpomeňte si z geometrie na pojem vzdálenosti bodu p od bodu q značený $|p-q|$:

$$|p-q| = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2}\,.$$

(Pro body $p, q, \ldots$ budou často čísla p_1, p_2, resp. q_1, q_2, atd., značit příslušné souřadnice těchto bodů.)

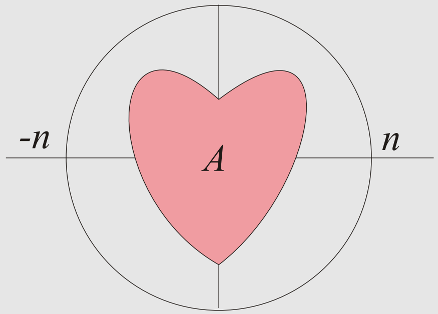


Vzhledem k tomu, že některé pojmy pro $\mathbb{R}^n$ jsou jen formální modifikací obdobných pojmů z $\mathbb{R}$, nebudou k nim už uváděny další poznámky.

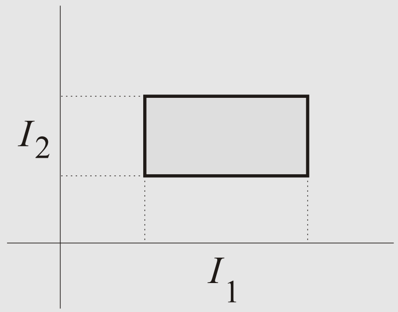
Nejdříve je vhodné určit vlastnosti podmnožin roviny. Uvědomte si, že na rozdíl od přímky, kde jsou základním kamenem úsečky (tj. intervaly), je různorodost obdobných množin v rovině velká (kruhy, elipsy, čtverce, kosodélníky,...).

DEFINICE.

1. Množina A v $\mathbb{R}^2$ se nazývá omezená, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|a| \leq n$ pro každé $a \in A$.

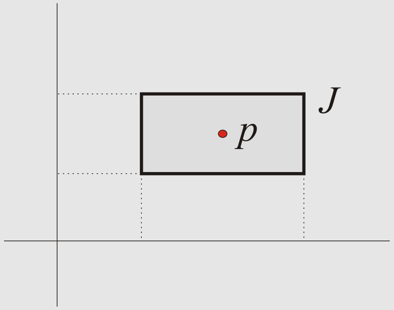


2. Interval J v $\mathbb{R}^2$ je součin intervalů v $\mathbb{R}$, tj. $J = I_1 \times I_2$, kde I_1, I_2 jsou intervaly v $\mathbb{R}$.

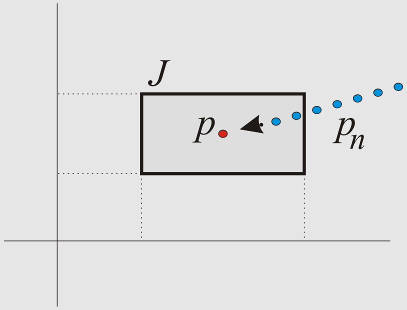


Tento interval J se nazývá otevřený (nebo uzavřený), jestliže jsou oba intervaly I_1, I_2 otevřené (resp. uzavřené).

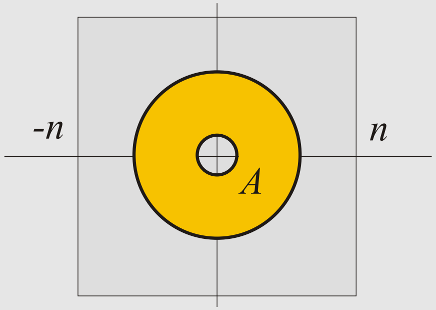
3. Množina U v rovině je okolí bodu p, jestliže existuje otevřený interval J tak, že $p \in J \subset U$.



4. Posloupnost $\{p_n\}$ bodů v rovině konverguje k bodu p, jestliže každé okolí bodu p obsahuje skoro všechna p_n.



5. Podmnožina A roviny se nazývá uzavřená, jestliže limity posloupností z A leží v A. Omezená uzavřená množina se nazývá kompaktní.



Podmnožina A roviny se nazývá otevřená, jestliže žádná posloupnost z doplňku množiny A nekonverguje k bodu v A. (Tj. doplněk množiny A je uzavřená množina.)

6. Bod p je hromadným bodem množiny A, jestliže každé okolí bodu P obsahuje nekonečně mnoho bodů A. Hranice otevřené množiny A je množina všech hromadných bodů A neležících v A.

   Množina, která vznikne z nějaké otevřené množiny přidáním části její hranice, se bude nazývat poloootevřená.

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.
2. Množina A je otevřená, jestliže s každým jejím bodem p leží v A i nějaký otevřený interval obsahující p (tj. A je okolím každého svého bodu)
3. Množina je omezená, jestliže je obsažená v nějaké kouli se středem v počátku.

Pro konvergenci v $\mathbb{R}^n, n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.

Prostor $\mathbb{R}^n$ bude brán jako lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ (součiny a podíly bodů v $\mathbb{R}^n$ nebudou používány).

Platí

- pozorování o jednoznačnosti limit, limitě konstantní posloupnosti a limitě podposloupností;
- charakterizace limit kromě 5.tvrzení o supremu a infimu;
- charakterizace konvergence pomocí Bolzanovy–Cauchyovy vlastnosti posloupnosti.
- limita součtu a násobku konstantou.
- Bolzanova-Weierstrassova věta: Z každé omezené posloupnosti v $\mathbb{R}^n$ lze vybrat podposloupnost konvergující v $\mathbb{R}^n$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

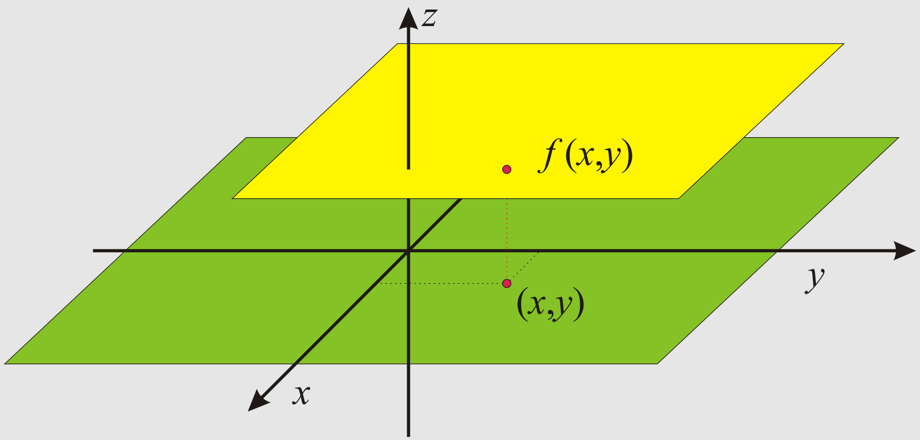
Cvičení 1

VLASTNOSTI FUNKCÍ V $\mathbb{R}^N$

Často se i u funkcí více proměnných, např. $f(x,y)$, používá jedna proměnná, která se bude značit velkým písmenem kvůli odlišení. Takže pro $f(x,y)$ je $f(P)$ hodnota funkce f v bodě $P=(x,y)$. Je možné si body P představovat jako vektory.

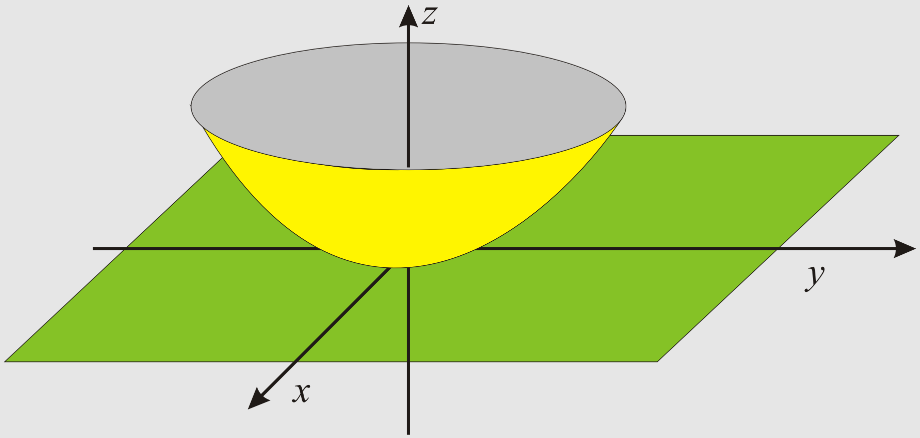
DEFINICE. Funkce více proměnných, která má jednobodový obor hodnot, se nazývá konstantní (tedy $f(P)=f(Q)$ pro všechna $P,Q\in\mathcal{D}(f)$)).

Grafem konstantní funkce dvou proměnných je rovina rovnoběžná s rovinou x,y nebo její část.

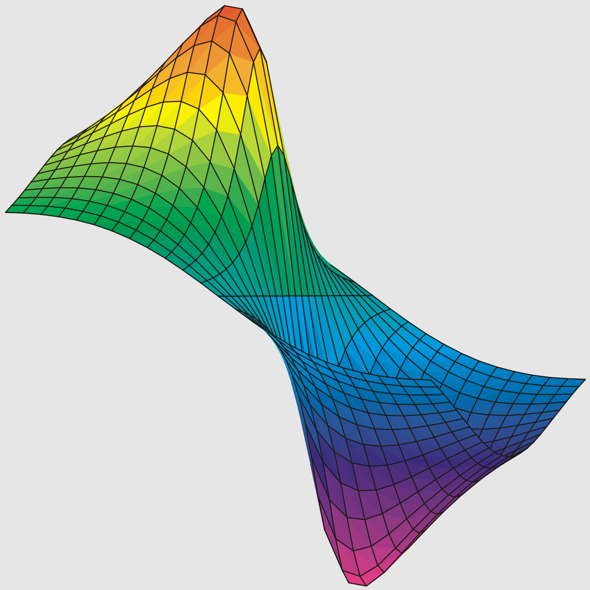


Funkce f více proměnných se nazývá sudá (resp. lichá), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $P\in\mathcal{D}(f)$ právě když $-P\in\mathcal{D}(f)$) a $f(-P)=f(P)$ (resp. $f(-P)=-f(P)$) pro všechna $P\in\mathcal{D}(f)$.

Graf sudé funkce dvou proměnných je symetrický podle osy z.



Graf liché funkce je symetrický podle počátku.



Funkce f více proměnných je omezená (resp. shora omezená nebo zdola omezená), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(P)| \leq k$ (resp. $f(P) \leq k$, nebo $f(P) \geq k$) pro všechna $P \in \mathcal{D}(f)$.

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce dvou proměnných, značí $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f + g, f \cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě P postupně

$$\max\{f(P), g(P)\}, \min\{f(P), g(P)\}, f(P) + g(P), f(P) \cdot g(P), f(P)/g(P)\ .$$

Složení $f \circ g$ zobrazení g z podmnožiny $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ a zobrazení f z podmnožiny $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^m$ je zobrazení z podmnožiny $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ která má v bodě $P \in \mathbb{R}^n$ hodnotu $f(g(P))$.

SPOJITOST

DEFINICE. Nechť f je funkce více proměnných, $P \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{P_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k P nechť $\lim f(P_n) = f(P)$. Pak se říká, že f je spojitá v bodě P a tento bod se nazývá bodem spojitosti funkce f.

Je-li f spojitá v každém bodě množiny A, říká se, že f je spojitá na množině A.

Je-li f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, říká se, že f je spojitá.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f více proměnných a bod A jejího definičního oboru:

1. Funkce f je spojitá v bodě A.
2. Pro každé okolí U bodu $f(A)$ existuje okolí V bodu A takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$.

3. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - f(A)| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f)$ a $|P - A| < \delta$.

I důkaz následujícího tvrzení je stejný jako důkaz odpovídající věty pro jednu proměnnou, protože se vlastně používá jen tvrzení o součtu, součinu a podílu limit posloupností v $\mathbb{R}$.

VĚTA. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě P, jsou i funkce $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} f + g, f \cdot g$ a f/g (v případě $g(P) \neq 0$) spojité v bodě P.

Definuje-li se polynom dvou proměnných x, y jako funkce vzniklá použitím konečně mnoha uvedených aritmetických operací na funkce $f(x, y) = x$ a $g(x, y) = y$, jsou polynomy spojité funkce na $\mathbb{R}^2$.

Racionální funkce dvou proměnných jsou podíly polynomů dvou proměnných a jsou tedy spojité na svém definičním oboru.

VĚTA. Nechť $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je spojitá v bodě P a $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je funkce spojitá v $g(P)$. Pak složení $f \circ g$ je spojité v bodě P.

Jsou-li např. g_1, g_2 funkce dvou proměnných spojité v bodě (x, y) a f je funkce dvou proměnných spojitá v bodě $(g_1(x, y), g_2(x, y))$, je funkce $f \circ (g_1, g_2)$ spojitá v bodě (x, y).

Je-li f spojitá funkce více proměnných, je i $|f|$ spojitá funkce.

LEMMA. Je-li f spojitá na intervalu I a P, Q jsou body I s hodnotami $f(P) < 0 < f(Q)$, pak existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.

Důkaz. Úsečka spojující body P a Q leží celá v I a dá se popsat jako množina $\{(1-t)P+tQ; t\in[0,1]\}$. Funkce $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definovaná jako $g(t)=f((1-t)P+tQ)$ je spojitá funkce jedné proměnné (ukažte to) a podle Bolzanovy věty existuje t tak, že $g(t)=0$. Tedy existuje $R\in I$ s hodnotou $f(R)=0$.

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje kompaktní množinu na kompaktní podmnožinu $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť f je spojitá funkce definovaná na kompaktní množině $A\subset\mathbb{R}^n$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v obraze $f(A)$ konvergující v $\mathbb{R}^*$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ existuje $P_n\in A$ tak, že $f(P_n)=x_n$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje (protože A je omezená) konvergentní podposloupnost $\{P_{k_n}\}$ s limitou P. Protože A je uzavřená, je $P\in A$. Ze spojitosti f vyplývá, že body $f(P_{k_n})$ konvergují k $f(P)$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ tedy leží v $f(A)$, z čehož vyplývá, že $f(A)$ je uzavřená i omezená.

DŮSLEDEK. Spojitá reálná funkce více proměnných dosahuje na uzavřené omezené množině A své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body $C,D\in A$ takové, že

$$f(C)=\sup_{P\in A} f(P),\quad f(D)=\inf_{P\in A} f(P)\,.$$

DEFINICE. Nechť C je hromadný bod definičního oboru funkce f.
Říkáme, že limita funkce f v bodě C se rovná A
(značení $\lim_{P \to C} f(P) = A$, nebo $f(P) \to A$ pro $P \to C$), jestliže $\lim f(P_n) = A$ pro každou prostou posloupnost $\{P_n\} \subset \mathcal{D}(f)\}$ konvergující k C.

Pro limity funkcí více proměnných platí obdobná tvrzení, jako pro limity funkce jedné proměnné.

VĚTA.

1. Nechť $C \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě C právě když $\lim_{P \to C} f(P) = f(C)$.
2. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.
3. Je ekvivalentní pro funkci f, hromadný bod C definičního oboru f a bod A:
   (a) $\lim_{P \to C} f(P) = A$;
   (b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f), P \neq C$.
   (c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f), 0 < |P - C| < \delta$.
4. Nechť C je hromadný bod definičního oboru funkce $f + g$. Pak platí (píše se $\lim$ místo $\lim_{P \to C}$):

(a) $\lim(f(P)+g(P)) = \lim f(P) + \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;

(b) $\lim(f(P)\cdot g(P)) = \lim f(P) \cdot \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;

(c) $\lim \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim f(P)}{\lim g(P)}$, pokud má pravá strana smysl;

5. Nechť g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, f z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^m$ a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f\circ g$. Jestliže $B = \lim_{P\to C} g(P)$, pak $\lim_{P\to C}(f\circ g)(P) = \lim_{Q\to B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C, kromě, možná, bodu C.
6. Nechť f, g jsou funkce více proměnných definované na množině A a C buď hromadný bod A.

   (a) Jestliže $\lim\limits_{P\to C} f(P) < \lim\limits_{P\to C} g(P)$, pak existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) < g(P)$ pro všechna $P\in U\cap A, P\neq C$.

   (b) Jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(P)\le g(P)$ pro všechna $P\in U\cap A, P\neq C$, pak $\lim\limits_{P\to C} f(P) \le \lim\limits_{P\to C} g(P)$ (pokud obě limity existují).

DŮSLEDEK.

1. Nechť funkce f, g, h jsou funkce více proměnných definované na množině A, C je hromadný bod A, U okolí C a pro $P\in A\cap U, P\neq C$ je $f(P)\le g(P)\le h(P)$. Jestliže existují $\lim\limits_{P\to C} f(P)$, $\lim\limits_{P\to C} h(P)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim\limits_{P\to C} g(P)$ a rovná se oběma zbývajícím.

2. Nechť $\lim\limits_{P\to C} f(P) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu C. Pak platí rovnost $\lim\limits_{P\to C} f(P)g(P) = 0$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

Implicitní popsání plochy

Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.

DEFINICE. Nechť A je polootevřená množina v $\mathbb{R}^3$ a f je spojitá funkce na A.

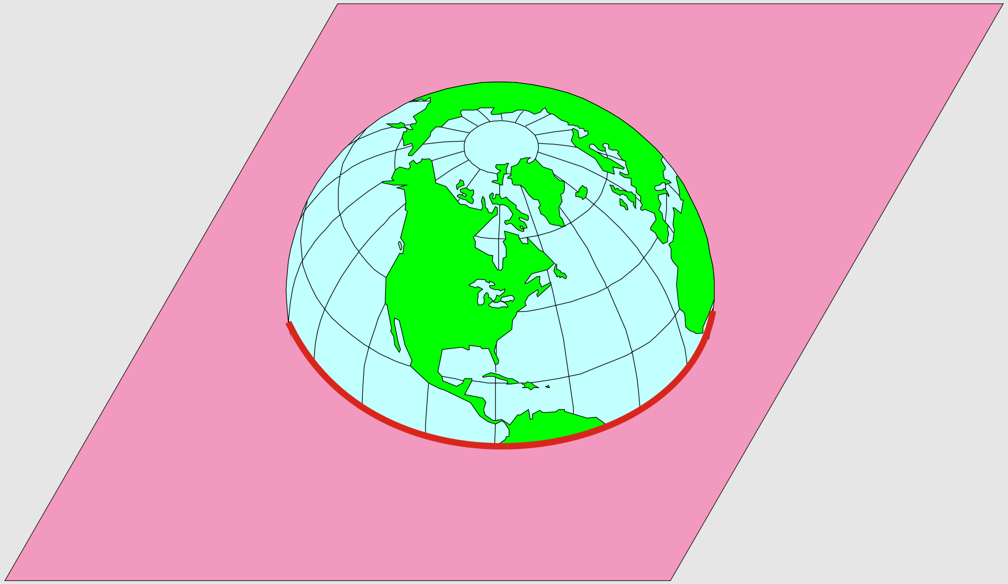
Rovnice

$$f(x,y,z)=0 \quad \text{pro } (x,y,z)\in A\,,$$

popisuje implicitně plochu $P=\{(x,y,z); f(x,y,z)=0\}$ v trojrozměrném prostoru.

V definici popsaná množina P byla nazvána plochou. Stejně jako křivka v rovině může být degenerovaná, tj. bod (nebo naopak vyplní např. celý čtverec), může i tato množina P být bodem nebo křivkou nebo i tělesem. V praxi používaných případech se však jedná o „pravé" plochy.

Křivka v prostoru se pomocí implicitního zadání popisuje jako průnik dvou implicitně zadaných ploch.



Parametrické popsání množin

Stejně jako v případě křivek v rovině, bývá i v prostoru práce s parametrickým popisem křivek a ploch jednodušší.

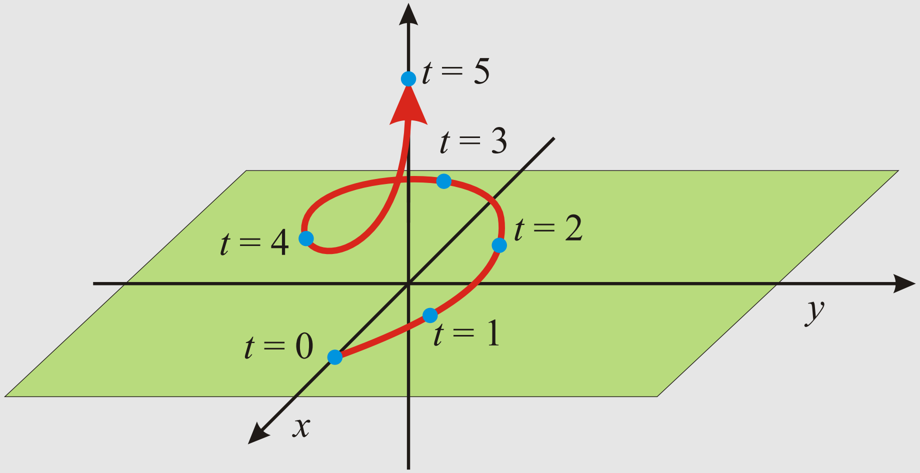
DEFINICE. Nechť φ, ψ, τ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Rovnice

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad z = \tau(t) \quad \text{pro } t \in I$$

popisují parametricky křivku $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in I\}$ v trojrozměrném prostoru.

Platí zde stejná poznámka, jako u implicitně zadaných ploch, že výsledkem může být i degenerovaná plocha, nebo naopak těleso.



Nechť A je polootevřená množina v rovině a φ, ψ, τ jsou spojité funkce na A. Rovnice

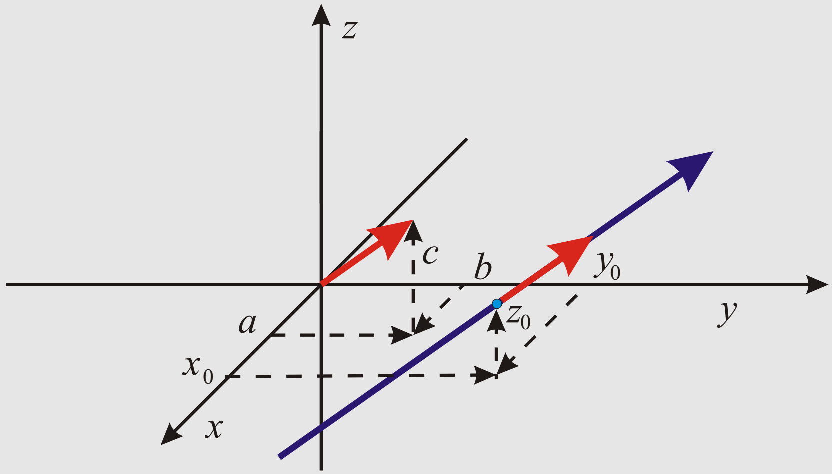
$$x = \varphi(u, v)\,, \quad y = \psi(u, v)\,, \quad z = \tau(u, v) \quad \text{pro } (u, v) \in A$$

popisují parametricky plochu $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v), \tau(u, v)); (u, v) \in A\}$ v trojrozměrném prostoru.

Např. rovnice

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct, t \in (-\infty, +\infty)$$

popisuje přímku procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a mající směr vektoru (a, b, c).



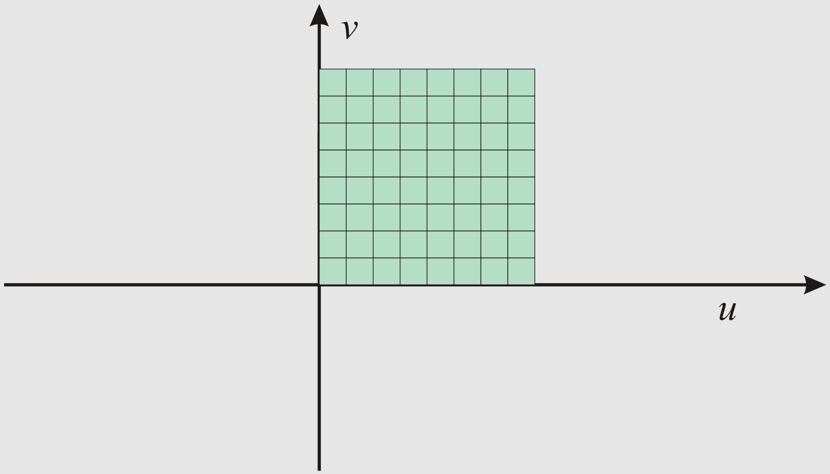
Rovnice

$$x = x_0 + a_1 u + a_2 v, y = y_0 + b_1 u + b_2 v, z = z_0 + c_1 u + c_2 v$$

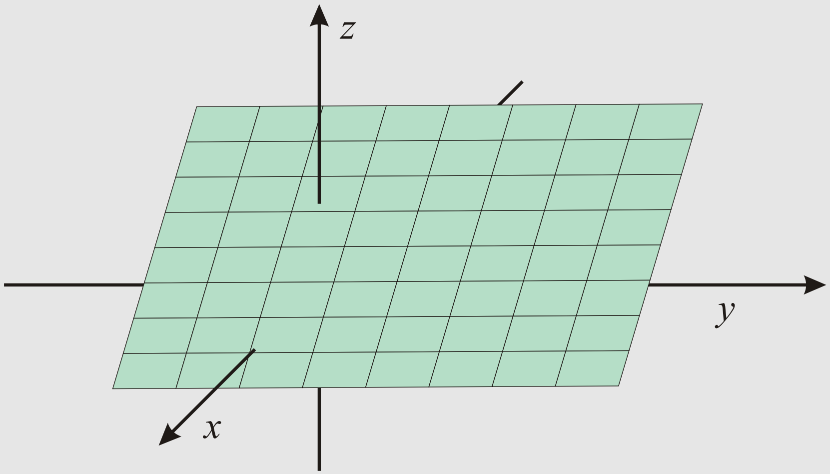
pro $u, v \in (-\infty, +\infty)$, popisuje rovinu procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a rovnoběžnou s vektory
$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$.

Svět parametrů při parametrizování roviny

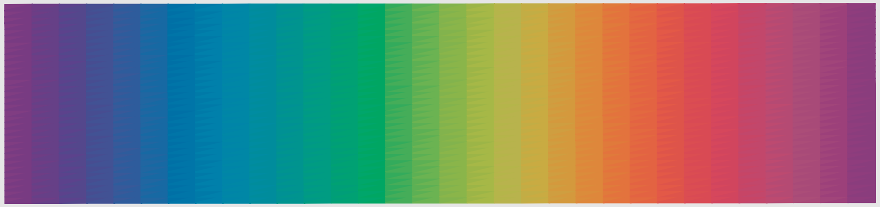
LEKCE17-FVP
obecnosti
konvergence
kompaktnost
vlastnosti konvergence
vlastnosti funkce
skládání funkcí
spojitost
charakterizace spojitosti
spojitost součtu,...
spojitost složení
Bolzanova věta
Weierstrassova věta
limita funkce
vlastnosti limity funkce
plocha implicitně
plocha parametricky
cylindrické souřadnice
sférické souřadnice
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



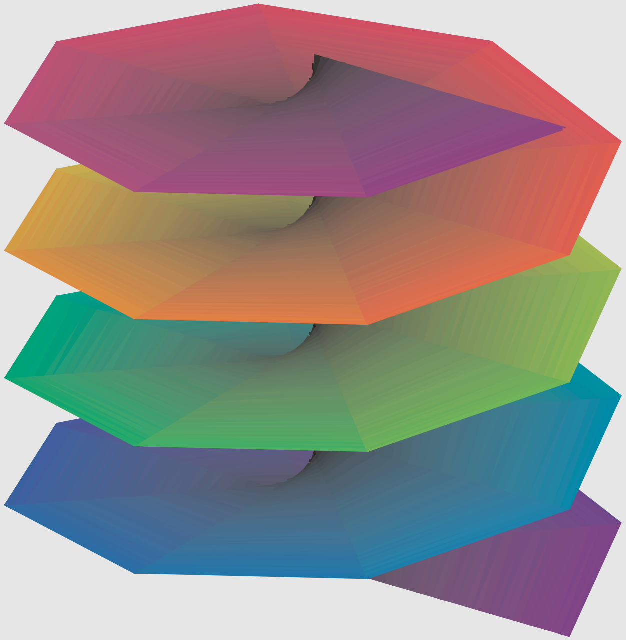
Svět obrazů při parametrizování roviny



Svět parametrů u šroubovnice



Svět obrazů u šroubovnice



Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic

Povrch válce (kolmého na rovinu xy) o středu v počátku a poloměru r bez podstav se parametricky popíše jako

$$x = r\cos u\,, y = r\sin u\,, z = v\,, \quad u \in [0, 2\pi), v \in I\,,$$

kde I je nějaký interval v $\mathbb{R}$.

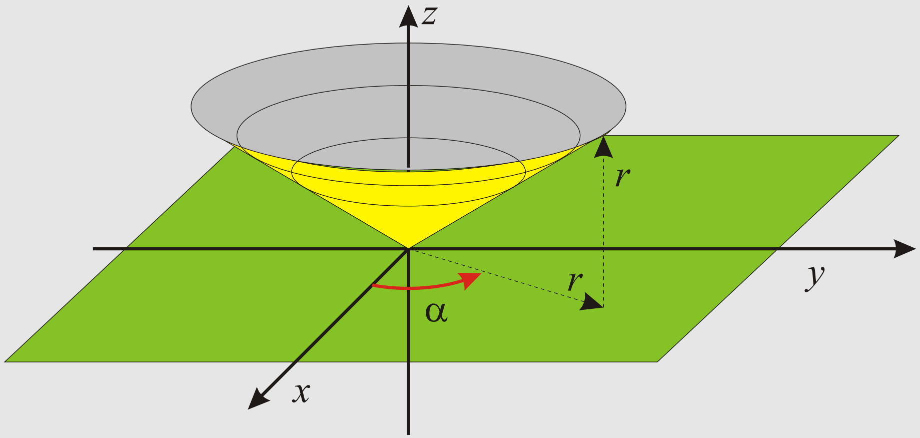
V rovinách rovnoběžných s rovinou xy jsou tedy použity polární souřadnice k popisu průniku této roviny s plochou.

DEFINICE. Cylindrické (válcové) souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z), kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}(+\pi), z = z$$
$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha, z = z\,.$$

Množina je popsána cylindrickými souřadnicemi zadáním funkce $z(r, \alpha)$ (nebo $r(\alpha, z)$). (Uvědomte si, proč je v popisu úhlu α v závorce $(+)$.)

Např. plášť kužele s vrcholem v počátku je dán rovnicí $z = r$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), r \in [0, 1]$.



Popsání množiny pomocí sférických souřadnic

Povrch koule o poloměru a a středu v počátku se parametricky popíše jako

$$x = r\cos\beta\cos\alpha\,, y = r\cos\beta\sin\alpha\,, z = r\sin\beta\,, \quad \alpha\in[0,2\pi), \beta\in[-\pi/2,\pi/2], r = a\,.$$

Podobným způsoben se určují zeměpisné souřadnice:

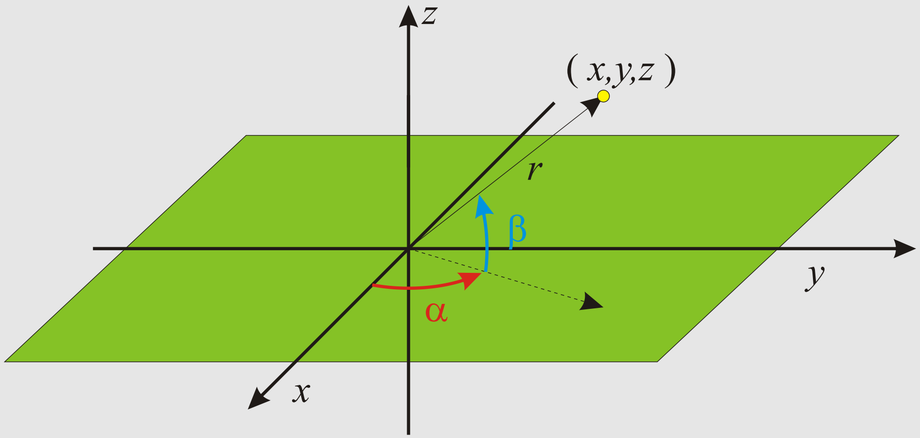
Volbou různých nezáporných a lze tímto způsobem popsat každý bod prostoru.

DEFINICE. Sférické souřadnice bodu (x,y,z) jsou (r,α,β), kde

$$x = r\cos\beta\cos\alpha, y = r\cos\beta\sin\alpha, z = r\sin\beta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}(+\pi), \beta = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Množina je popsána sférickými souřadnicemi je-li zadána funkce $r(\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta)\in A$. Body množiny pak mají sférické souřadnice $(r(\alpha,\beta),\alpha,\beta)$, kde (α,β) probíhají množinu A (ta bývá polootevřená, často interval na přímce nebo v rovině).



Např. koule o poloměru a a středu v počátku je zadána rovnicí $r = a$ pro $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3