FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

V reálných situacích závisejí děje obvykle na více proměnných než jen na jedné (např. na teplotě i na tlaku), závislost na jedné proměnné je spíše výjimkou.

Nicméně funkce jedné proměnné tvoří modelový základ pro teorie obecnějších funkcí, tedy i pro funkce dvou, tří a více proměnných.

OBECNOSTI

Reálná funkce více proměnných je zobrazení definované na nějaké podmnožině (na svém definičním oboru) euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ (pro $n > 1$) s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Protože body $\mathbb{R}^n$ jsou n–tice reálných čísel $(x_1, x_2, ..., x_n)$, bývá takováto funkce f často značena jako $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, což vysvětluje termín *více proměnných*.

Pro pochopení i názornost stačí probírat případy roviny a prostoru (tj. $n = 2, n = 3$).

Jsou však situace, kdy je vhodnější použít obecný případ $\mathbb{R}^n$ než jeho specifikaci na rovinu nebo prostor. To je například skládání funkcí více proměnných.

Je třeba dávat pozor. Formální zápis ČEHOKOLIV v $\mathbb{R}^n$ je HOROR.

Naopak, funkce jedné reálné proměnné s hodnotami v nějakém euklidovském prostoru je zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a je to vlastně n–tice $(f_1, f_2, ..., f_n)$ reálných funkcí jedné reálné proměnné (f_k je složení f s projekcí $\mathbb{R}^n$ na k–tou složku, tj. $f_k(x)$ je k-tá souřadnice bodu $f(x)$) — ověřte si to.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je tedy n–tice reálných funkcí k–proměnných. Každé takové zobrazení se nazývá *funkce více proměnných*, pokud $k > 1$. Je-li $n = 1$, jedná se o *reálnou funkci*.

To je ono. Přečtěte si to ještě pětkrát.

KONVERGENCE V $\mathbb{R}^N$

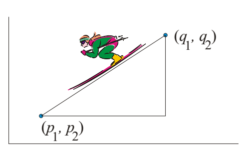
Před zkoumáním funkcí jedné proměnné bylo nutné vysvětlit vlastnosti reálné přímky.

Ze stejného důvodu následuje popis některých vlastností roviny a prostoru, které budou v následujícím textu často používány.

Vzpomeňte si z geometrie na pojem vzdálenosti bodu p od bodu q značený $|p - q|$:

$$|p - q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}\,.$$

(Pro body $p, q, ...$ budou často čísla p_1, p_2, resp. q_1, q_2, atd., značit příslušné souřadnice těchto bodů.)



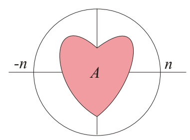
Vzhledem k tomu, že některé pojmy pro $\mathbb{R}^n$ jsou jen formální modifikací obdobných pojmů z $\mathbb{R}$, nebudou k nim už uváděny další poznámky.

> Definice budou (až na výjimky) uvedeny v $\mathbb{R}^2$ a čtenář je žádán, aby si zformuloval příslušnou definici v $\mathbb{R}^3$ nebo v $\mathbb{R}^n$.

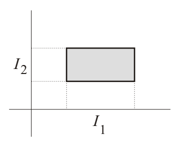
Nejdříve je vhodné určit vlastnosti podmnožin roviny. Uvědomte si, že na rozdíl od přímky, kde jsou základním kamenem úsečky (tj. intervaly), je různorodost obdobných množin v rovině velká (kruhy, elipsy, čtverce, kosodélníky,...).

DEFINICE.

1. Množina A v $\mathbb{R}^2$ se nazývá omezená, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|a| \leq n$ pro každé $a \in A$.

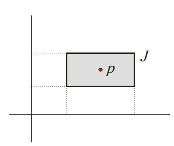


2. Interval J v $\mathbb{R}^2$ je součin intervalů v $\mathbb{R}$, tj. $J = I_1 \times I_2$, kde I_1, I_2 jsou intervaly v $\mathbb{R}$.

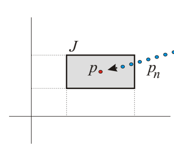


Tento interval J se nazývá otevřený (nebo uzavřený), jestliže jsou oba intervaly I_1, I_2 otevřené (resp. uzavřené).

3. Množina U v rovině je okolí bodu p, jestliže existuje otevřený interval J tak, že $p \in J \subset U$.

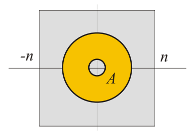


4. Posloupnost $\{p_n\}$ bodů v rovině konverguje k bodu p, jestliže každé okolí bodu p obsahuje skoro všechna p_n.



5. Podmnožina A roviny se nazývá uzavřená, jestliže limity posloupností z A leží v A.

   Omezená uzavřená množina se nazývá kompaktní.



Kompakt je vždy UZAVŘENÝ.

I když je krabička s CD-čkem otevřená ;-)

Podmnožina A roviny se nazývá otevřená, jestliže žádná posloupnost z doplňku množiny A nekonverguje k bodu v A. (Tj. doplněk množiny A je uzavřená množina.)

6. Bod p je hromadným bodem množiny A, jestliže každé okolí bodu P obsahuje nekonečně mnoho bodů A. Hranice otevřené množiny A je množina všech hromadných bodů A neležících v A.

   Množina, která vznikne z nějaké otevřené množiny přidáním části její hranice, se bude nazývat polootevřená.

Pojmy využívající pojmu vzdálenost (otevřená a uzavřená množina) jdou studovat v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ i v obecných metrických prostorech.

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.

2. Množina A je otevřená, jestliže s každým jejím bodem p leží v A i nějaký otevřený interval obsahující p (tj. A je okolím každého svého bodu)

3. Množina je omezená, jestliže je obsažená v nějaké kouli se středem v počátku.

Klasické cvičení pro každého.

Pro konvergenci v $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.

Prostor $\mathbb{R}^n$ bude brán jako lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ (součiny a podíly bodů v $\mathbb{R}^n$ nebudou používány).

Převeďte z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^n$ důkazy následujících tvrzení (pro Bolzanovu-Weierstrassova věta je návod v *Otázkách*).

Platí

- pozorování o jednoznačnosti limit, limitě konstantní posloupnosti a limitě podposloupností;
- charakterizace limit kromě 5.tvrzení o supremu a infimu;
- charakterizace konvergence pomocí Bolzanovy–Cauchyovy vlastnosti posloupnosti.
- limita součtu a násobku konstantou.
- Bolzanova-Weierstrassova věta: Z každé omezené posloupnosti v $\mathbb{R}^n$ lze vybrat podposloupnost konvergující v $\mathbb{R}^n$.

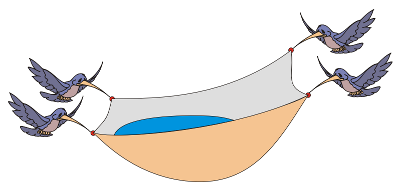
Poznámky 1:

Neexistence uspořádání.

Velkým rozdílem oproti $\mathbb{R}$ je neexistence vhodného uspořádání v $\mathbb{R}^n$ pro $n > 1$. Nelze tedy mluvit např. o monotónních funkcích dvou proměnných.

V některých případech lze uspořádání obejít. Např. interval v $\mathbb{R}$ je vlastně tzv. konvexní množina, tj. množina, která s každými dvěma svými body obsahuje i úsečku, která je spojuje.

Tato definice konvexity je platná v libovolném $\mathbb{R}^n$ a lze pak definovat i konvexní a konkávní funkce více proměnných.



Nekonečna. V $\mathbb{R}^n$ pro $n > 1$ existuje jediné nekonečno ∞. Na reálné přímce bylo možné udělat neomezenou cestu (jednoduchou, která se nevracela) jen napravo (k $+\infty$) nebo nalevo (k $-\infty$).

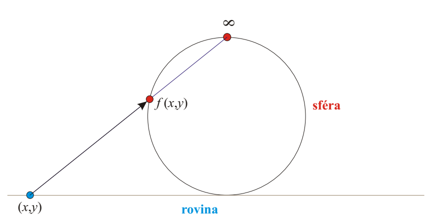
V rovině je takovýchto neomezených cest různě zakřivených a různých směrů nekonečně mnoho a muselo by proto být i nekonečně mnoho nekonečen. To není vhodné a používá se jen jedno nekonečno.

To, že je jedno nekonečno, je mi nekonečně jedno.

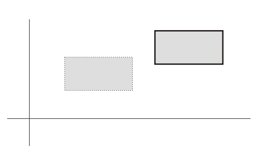
Vhodnou představou o přidání nekonečna je stočení roviny do koule bez horního (severního) pólu.

Nekonečno je pak tento severní pól. Jeho okolí jsou množiny obsahující doplňky kruhů (nebo koulí) se středem v počátku. Lze tedy standardně definovat konvergenci k nekonečnu (každé okolí nekonečna obsahuje skoro všechny členy dané posloupnosti).

Rovina spolu s tímto nekonečnem se nazývá *rozšířená rovina*.



Intervaly a množiny. Intervaly jsou tedy obdélníky (mající strany rovnoběžné s osami) a to buď jen jejich vnitřky, jedná-li se o otevřené intervaly, nebo i s hranicí, jedná-li se o uzavřené intervaly.



Každý kruh o středu x_0 je okolím tohoto bodu. Uvědomte si, že množina U je okolím bodu x_0 právě když obsahuje nějaký kruh (nedegerovaný) se středem x_0.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Geometricky chápaná hranice čtverce, kruhu, apod. množin v rovině, je hranice totožná s hranicí definovanou v tomto textu.

2. Čtverec libovolně umístěný v rovině je spolu se svou hranicí uzavřenou množinou, bez své hranice je otevřenou množinou.

3. Libovolná přímka v rovině je uzavřenou množinou, která není polootevřená.

4. Posloupnost $\{(n, \sin n)\}$ v rovině konverguje k ∞.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že otevřený interval je otevřenou množinou, uzavřený interval je uzavřenou množinou a součin dvou polootevřených intervalů je polootevřená množina.

2. (a) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k bodu (x, y) právě když $x_n \to x$ a $y_n \to y$.
(b) Ukažte, že posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ v rovině konverguje k ∞ právě když jedna z posloupností $\{|x_n|\}, \{|y_n|\}$ konverguje k $+\infty$ (právě když $\{|(x_n, y_n)|\}$ konverguje k ∞).

3. Ukažte, že podmnožina roviny je omezená právě když její projekce na osu x i na osu y jsou omezené.

4. Z předchozích dvou charakterizací konvergence a omezenosti pomocí projekcí na $\mathbb{R}$ dokažte Bolzanovu-Weierstrassovu větu v rovině.

5. Ukažte, že projekce otevřené množiny na obě osy jsou otevřené podmnožiny přímky.

Najděte příklad, že projekce uzavřené množiny na osu nemusí být uzavřená množina.

6. Dokažte, že z každé posloupnosti v rovině lze vybrat podposloupnost konvergující v rozšířené rovině (viz *Poznámky* pro tento pojem).

7. Uvědomte si, že okolí bodu v rovině zůstanou stejná, definujeme-li je tak, že obsahují nějaký kruh (místo intervalů) se středem v onom bodě.

Konec otázek 1.

Cvičení 1: Příklad. Zjistěte, zda množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ je polootevřená.

Řešení. Lehce vidíme, že se jedná o mezikruží. Podle definice jde o zároveň o polootevřenou množinu.

Když je v definici $\leq$ nebo $\geq$, je veliká šance na uzavřenou množinu. Pokud jde o neostré nerovnosti dostaneme zpravidla otevřené množiny.

Neplatí to vždy. Například $\mathbb{R}^2$ je zároveň otevřená i uzavřená :-)

Příklad. Existuje otevřená kompaktní množina?

Řešení. Ano.

A není moc veliká ;-)

Příklad. Je reálná osa otevřená v rovině?

Řešení. Ne.

Vlevo a vpravo ano. Ale nahoru a dolu ne . . .

Rovina má svoje specifika.

Konec cvičení 1.

VLASTNOSTI FUNKCÍ V $\mathbb{R}^N$

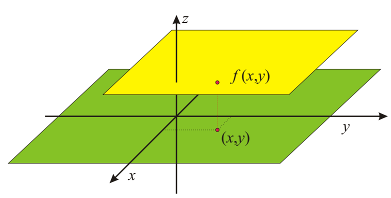
Často se i u funkcí více proměnných, např. $f(x, y)$, používá jedna proměnná, která se bude značit velkým písmenem kvůli odlišení. Takže pro $f(x,y)$ je $f(P)$ hodnota funkce f v bodě $P=(x,y)$. Je možné si body P představovat jako vektory.

To si promyslete.

Taky se tím šetří psací potřeby a klávesnice.

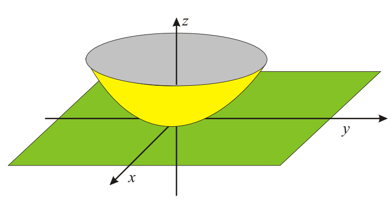
DEFINICE. Funkce více proměnných, která má jednobodový obor hodnot, se nazývá konstantní (tedy $f(P)=f(Q)$ pro všechna $P,Q\in\mathcal{D}(f)$)).

Grafem konstantní funkce dvou proměnných je rovina rovnoběžná s rovinou x,y nebo její část.



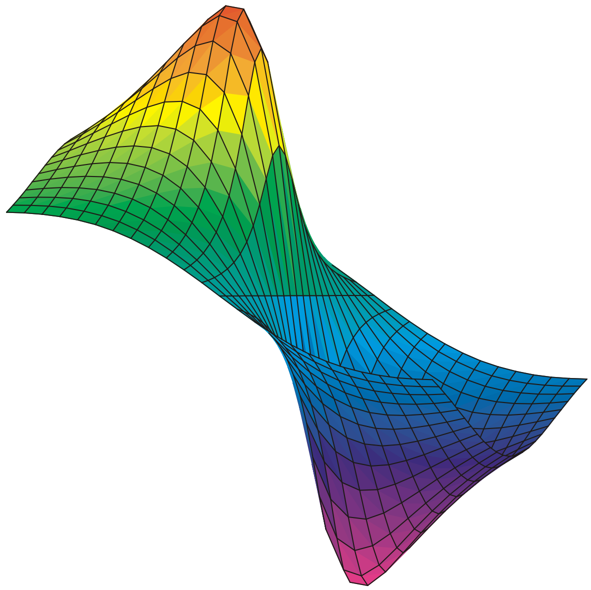
Funkce f více proměnných se nazývá sudá (resp. lichá), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $P\in\mathcal{D}(f)$ právě když $-P\in\mathcal{D}(f)$) a $f(-P)=f(P)$ (resp. $f(-P)=-f(P)$) pro všechna $P\in\mathcal{D}(f)$.

Graf sudé funkce dvou proměnných je symetrický podle osy z.



Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Funkce f více proměnných je omezená (resp. shora omezená nebo zdola omezená), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(P)|\le k$ (resp. $f(P)\le k$, nebo $f(P)\ge k$) pro všechna $P\in\mathcal{D}(f)$.



Každá taková vlastnost se v příkladech musí ověřit. T.j. například řešit nerovnosti a podobné legrácky.

DEFINICE. Jsou-li f, g funkce dvou proměnných, značí $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}, f + g, f \cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě P postupně

$$\max\{f(P), g(P)\}, \min\{f(P), g(P)\}, f(P) + g(P), f(P) \cdot g(P), f(P)/g(P) \,.$$

Složení $f \circ g$ zobrazení g z podmnožiny $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ a zobrazení f z podmnožiny $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^m$ je zobrazení z podmnožiny $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ která má v bodě $P \in \mathbb{R}^n$ hodnotu $f(g(P))$.

Zde pracujeme po přehlednost se zobrazeními.

SPOJITOST

DEFINICE. Nechť f je funkce více proměnných, $P \in \mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{P_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k P nechť $\lim f(P_n) = f(P)$. Pak se říká, že f je spojitá v bodě P a tento bod se nazývá bodem spojitosti funkce f.

Je-li f spojitá v každém bodě množiny A, říká se, že f je spojitá na množině A.

Je-li f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, říká se, že f je spojitá.

Spojitost se dělá přes posloupnosti. Jde to i jinak:

Následující věta ukazuje alternativní možnost definice spojitosti funkce více proměnných. Důkaz je stejný jako pro funkce jedné proměnné.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f více proměnných a bod A jejího definičního oboru:

1. Funkce f je spojitá v bodě A.
2. Pro každé okolí U bodu $f(A)$ existuje okolí V bodu A takové, že $f(x) \in U$ jakmile $x \in V \cap \mathcal{D}(f)$.
3. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - f(A)| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f)$ a $|P - A| < \delta$.

I důkaz následujícího tvrzení je stejný jako důkaz odpovídající věty pro jednu proměnnou, protože se vlastně používá jen tvrzení o součtu, součinu a podílu limit posloupností v $\mathbb{R}$.

VĚTA. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě P, jsou i funkce $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} f + g, f \cdot g$ a f/g (v případě $g(P) \neq 0$) spojité v bodě P.

Součet, součin a podíl spojitých funkcí je spojitá funkce.

Definuje-li se polynom dvou proměnných x, y jako funkce vzniklá použitím konečně mnoha uvedených aritmetických operací na funkce $f(x,y) = x$ a $g(x,y) = y$, jsou polynomy spojité funkce na $\mathbb{R}^2$.

Grafy těch f a g jsou roviny, ale dohromady se z nich dá udělat koukám pěkný guláš.

Racionální funkce dvou proměnných jsou podíly polynomů dvou proměnných a jsou tedy spojité na svém definičním oboru.

Také důkaz spojitosti složené funkce je stejný jako pro jednu proměnnou. Pro jednoduchost formulace je tvrzení uvedeno pro zobrazení definovaná na celých prostorech.

VĚTA. Nechť $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je spojitá v bodě P a $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je funkce spojitá v $g(P)$. Pak složení $f \circ g$ je spojité v bodě P.

Složení spojitých funkcí je spojitá funkce.

Jsou-li např. g_1, g_2 funkce dvou proměnných spojité v bodě (x,y) a f je funkce dvou proměnných spojitá v bodě $(g_1(x,y), g_2(x,y))$, je funkce $f \circ (g_1, g_2)$ spojitá v bodě (x,y).

Je-li f spojitá funkce více proměnných, je i $|f|$ spojitá funkce.

To se dokáže opět tak, že $|f|$ se napíše jako složená funkce.

LEMMA. Je-li f spojitá na intervalu I a P, Q jsou body I s hodnotami $f(P) < 0 < f(Q)$, pak existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.

Opět máme mezihodnotu.

Důkaz. Úsečka spojující body P a Q leží celá v I a dá se popsat jako množina $\{(1-t)P + tQ; t \in [0,1]\}$. Funkce $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definovaná jako $g(t) = f((1-t)P + tQ)$ je spojitá funkce jedné proměnné (ukažte to) a podle Bolzanovy věty existuje t tak, že $g(t) = 0$. Tedy existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.

Důsledkem lemmatu (se stejným důkazem jako v případě jedné proměnné) je tvrzení:

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.

Zobrazujeme do $\mathbb{R}$, tam se nedá vyhýbat. V prostoru by to tak nevyšlo!

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje kompaktní množinu na kompaktní podmnožinu $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť f je spojitá funkce definovaná na kompaktní množině $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v obraze $f(A)$ konvergující v $\mathbb{R}^*$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $P_n \in A$ tak, že $f(P_n) = x_n$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje (protože A je omezená) konvergentní podposloupnost $\{P_{k_n}\}$ s limitou P. Protože A je uzavřená, je $P \in A$. Ze spojitosti f vyplývá, že body $f(P_{k_n})$ konvergují k $f(P)$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ tedy leží v $f(A)$, z čehož vyplývá, že $f(A)$ je uzavřená i omezená.

Tuto větu nejméně stokrát použijete. Věřte mi.

DŮSLEDEK. Spojitá reálná funkce více proměnných dosahuje na uzavřené omezené množině A své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body
$C, D \in A$ takové, že

$$f(C) = \sup_{P \in A} f(P), \quad f(D) = \inf_{P \in A} f(P) .$$

Tak vidíte, že mám pravdu. Tak se budou hledat extrémy funkcí.

LIMITA

DEFINICE. Nechť C je hromadný bod definičního oboru funkce f.
Říkáme, že limita funkce f v bodě C se rovná A
(značení $\lim_{P \to C} f(P) = A$, nebo $f(P) \to A$ pro $P \to C$), jestliže $\lim f(P_n) = A$ pro každou prostou posloupnost $\{P_n\} \subset \mathcal{D}(f)\}$ konvergující k C.

Tím samozřejmě nikoho nepřekvapím.

Pro limity funkcí více proměnných platí obdobná tvrzení, jako pro limity funkce jedné proměnné.

I postupy důkazů jsou stejné a proto nebudou opakovány; studující by si však měli tato tvrzení sami dokázat:

VĚTA.

1. Nechť $C \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě C právě když $\lim_{P \to C} f(P) = f(C)$.

2. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

3. Je ekvivalentní pro funkci f, hromadný bod C definičního oboru f a bod A:

   (a) $\lim_{P \to C} f(P) = A$;

   (b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f), P \neq C$.

   (c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f), 0 < |P - C| < \delta$.

4. Nechť C je hromadný bod definičního oboru funkce $f + g$. Pak platí (píše se $\lim$ místo $\lim_{P \to C}$):

   (a) $\lim(f(P) + g(P)) = \lim f(P) + \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;

   (b) $\lim(f(P) \cdot g(P)) = \lim f(P) \cdot \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;

   (c) $\lim \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim f(P)}{\lim g(P)}$, pokud má pravá strana smysl;

5. Nechť g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, f z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^m$ a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $B = \lim_{P \to C} g(P)$, pak $\lim_{P \to C} (f \circ g)(P) = \lim_{Q \to B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C, kromě, možná, bodu C.

6. Nechť f, g jsou funkce více proměnných definované na množině A a C buď hromadný bod A.

   (a) Jestliže $\lim_{P \to C} f(P) < \lim_{P \to C} g(P)$, pak existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) < g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$.

   (b) Jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) \leq g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$, pak $\lim_{P \to C} f(P) \leq \lim_{P \to C} g(P)$ (pokud obě limity existují).

Ta tvrzení sice nejsou román, ale nemělo by být obtížné je plynule číst.

DŮSLEDEK.

1. Nechť funkce f, g, h jsou funkce více proměnných definované na množině A, C je hromadný bod A, U okolí C a pro $P \in A \cap U$, $P \neq C$ je $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$. Jestliže existují $\lim\limits_{P \to C} f(P)$, $\lim\limits_{P \to C} h(P)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim\limits_{P \to C} g(P)$ a rovná se oběma zbývajícím.

To bylo o policajtech.

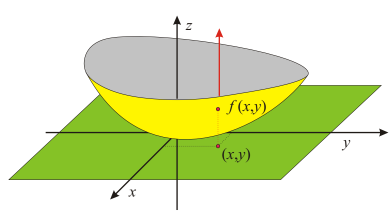
2. Nechť $\lim\limits_{P \to C} f(P) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu C. Pak platí rovnost $\lim\limits_{P \to C} f(P)g(P) = 0$.

V případě $\lim\limits_{P \to C} f(x) = +\infty$ není nutné v prvním důsledku uvažovat funkci h, a podobně u limity $-\infty$ není nutné uvažovat funkci f.

Poznámky 2:

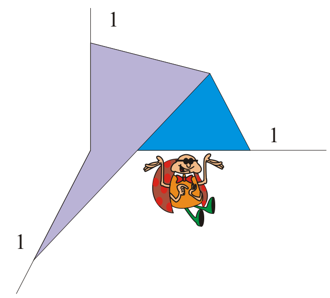
Zatímco definiční obor M funkce f dvou proměnných je podmnožina roviny, její obor hodnot je podmnožina přímky.

Grafem takové funkce je podmnožina prostoru $\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in M\} \mathbb{R}^3$.



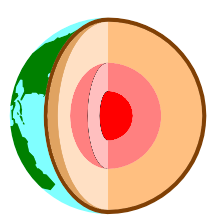
Je to plocha s vlastností, že každá přímka rovnoběžná s osou z protíná plochu nejvýše v jednom bodě.

Tedy jde vlastně o toto: máte na zemi položenou plachtu. Na některých místech ji podepřete a tak získáte graf funkce dvou proměnných. Pokud přitom plachtu neprotrhnete, jde o spojitou funkci.



Graf funkce tří proměnných leží už ve čtyřrozměrném prostoru.

Takováto funkce může například znázorňovat teplotu $f(x, y, z)$ v bodě (x, y, z). Pomůžeme si barvami k označení bodů se stejnou teplotou. Například teplota v nitru Země:



Skládání funkcí. Skládání funkcí více proměnných má více možností než u funkcí jedné proměnné.

Např., má-li být výsledkem $f \circ g$ reálná funkce dvou proměnných, může být f reálná funkce jedné proměnné a g reálná funkce dvou proměnných, nebo f reálná funkce dvou proměnných a g dvojice (g_1, g_2) reálných funkcí dvou proměnných (pak $(f \circ g)(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$), atd.

Někdy je nutné dávat pozor. Např. $f \circ (g_1, g_2)$, kde f je funkce dvou proměnných a g_1, g_2 jsou funkce jedné proměnné může znamenat buď funkci dvou proměnných, která v bodě (x, y) má hodnotu $f(g_1(x), g_2(y))$, nebo funkci jedné proměnné, která v bodě x má hodnotu $f(g_1(x), g_2(x))$.

Je tedy nutné upřesnit, o jaký případ se jedná.

Aritmetika funkcí.

Aritmetické operace s funkcemi f, g je možné definovat jen na průniku jejich definičních oborů.

Není tedy možné používat součet funkce dvou proměnných a funkce tří proměnných!!!

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Funkce $x^4 \sin(xy^2)$ je spojitá funkce.

2. Zjistěte možnost spojitého rozšíření funkce $f(x,y) = x^2y/(x^2+y^2)$ do bodu (0,0) (tj., zda existuje limita $f(x,y)$ v bodě (0.0)).

3. Funkce $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ nemá limitu v počátku, protože se dostanou různé hodnoty limit posloupností, které se k počátku blíží po různých přímkách.

Pro posloupnost $\{(1/n, k/n)\}_n$ je $\lim_n f((1/n, k/n)) = 1/(1+k^2)$ a tedy závisí na volbě k.

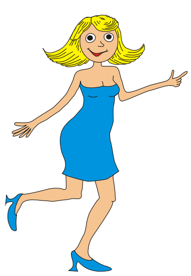
4. Změníte-li v předchozím příkladě funkci f na $x^2y/(x^4+y^2)$, dostanete při stejné volbě posloupností blížících se k počátku po přímkách vždy 0.

Ale blížíte-li se po parabole $y = x^2$, dostanete hodnotu 1/2.

Takže limita této funkce v počátku opět neexistuje.

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ podle věty o limitě složené funkce (za vnitřní funkci se použije $z = x^2+y^2$).

6. Funkce $\lg(x/y)(x^2-y^2)^{-1}$ je spojitá, protože x/y je spojitá jako racionální funkce, složení s lg (funkce jedné proměnné) je spojité a vynásobení s racionální funkcí $(x^2-y^2)^{-1}$ je také spojité.



Jaký má daná funkce definiční obor?

V kterých bodech hranice svého definičního oboru lze tato funkce dodefinovat tak, že bude v těchto bodech spojitá?

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Dokažte, že podmnožina roviny A je kompaktní, právě když lze z každé posloupnosti v A vybrat podposloupnost konvergující v A.

To je tedy další možná definice kompaktnosti.

2. Uvědomte si, že tvrzení o aritmetice okolí v $\mathbb{R}$ vlastně tvrdí:

VĚTA.

1. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z $\mathbb{R}$ jejich součet $x + y$ je spojitá.
2. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z $\mathbb{R}$ jejich součin xy je spojitá.
3. Funkce $f(x, y)$ přiřazující bodům x, y z $\mathbb{R}$ jejich podíl x/y je spojitá.

3. Ověřte, že na základě předchozího odstavce je možné dokázat spojitost součtu, atd. dvou funkcí f, g pomocí spojitosti složené funkce přiřazující bodu (x, y) nejdříve bod roviny $(f(x, y), g(x, y))$ a potom součet (součin, podíl) souřadnic tohoto bodu.

4. Je funkce $2x^2y - zy^5 + 6xyz^3 - 7$ polynomem?

Jestliže ano, jak vznikla podle definice polynomu?

5. Ověřte, že definiční obor racionální funkce je vždy otevřená podmnožina roviny.

6. Dokažte, že Bolzanova věta platí, vezmou-li se místo intervalů v definičním oboru funkce otevřené *souvislé* množiny (to jsou takové otevřené množiny, které s každou svou dvojicí bodů obsahují i lomenou čáru, která je spojuje).

Uvažte, že lze použít i množiny, které s každou svou dvojicí bodů obsahují i spojitou křivku, která je spojuje.

Konec otázek 2.

Cvičení 2: Příklad. Zkoumejte funkci

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}\,.$$

Ověřte, zda

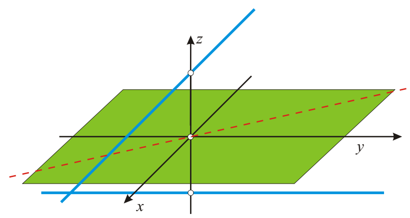
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)\,.$$

Řešení. Lehce ověříme, že funkce f je rovna 1 na x-ové ose a -1 na y-ové ose.

O spojitém rozšíření nemůže být ani řeči.

Záměna pořadí limitění není samozřejmě v tomto případě možná.

Na následujícím obrázku vidíme pouze chování na osách.



Uvědomme si, že na skoro každém řezu rovnoběžném s osami jde o lineární lomenou funkci jedné proměnné.

Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\ ?$$

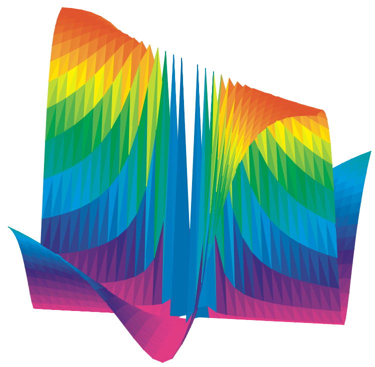
Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.

Navíc je rovna jedničce na přímce $y = x$.

Tedy funkce nemá v počátku limitu.

Jde to ověřit podle definice?

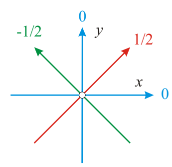
Funkce ve skutečnosti vypadá takto a dělá přes počátek jakýsi most.



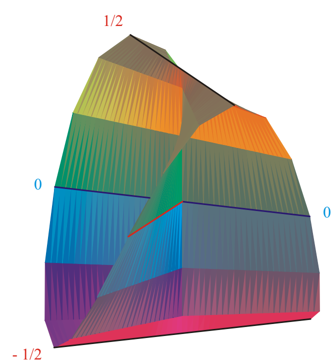
Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \ ?$$

Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.
Navíc je rovna $1/2$ na přímce $y = x$ a $-1/2$ na přímce $y = -x$.
Schematicky



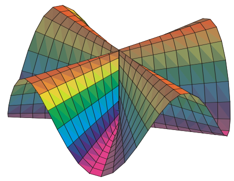
Přesný graf vypadá takto



Pokud použijeme polární spouřadnice , jde funkce přepsat na tvar $(r, \alpha) \mapsto \cos\alpha \sin\alpha$.
Tedy se funkce rovná konstantě na každé polopřímce vycházející z počátku v rovině xy.
Jedná se tedy o pěknou přímkovou plochu.

Takové triky s polárními souřadnicemi použijeme často.

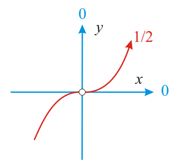
Tak jde sestrojit funkce, která má graf roven pěknému čtyřlístku.



Příklad. Existuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^6+y^2}\ ?$$

Řešení. Všimneme si, že se funkce nuluje na souřadnicových osách.
Navíc je rovna $1/2$ na kubické paraboly $y = x^3$.



Tak vidíme, že spojitost musíme ověřovat po různých křivkách, ale můžeme tak pouze ověřit nespojitost.

Spojitost se musí dokázat!

Použijeme buď definici pomocí posloupností nebo definici $\varepsilon - \delta$.

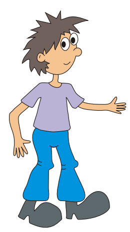
Příklad. Spočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2} .$$

Řešení. Funkční hodnota je rovna

$$\exp(x^2y^2\log(x^2+y^2)) .$$

Nyní uděláme úpravy a dostaneme



Snad ne !

Upravíme

$$|(x^2y^2\log(x^2+y^2)| = |\frac{xy}{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)| .$$

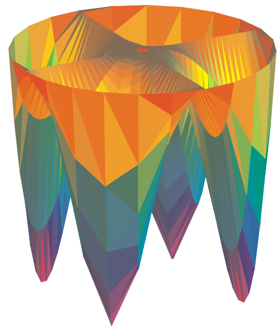
První činitel je omezený číslem $1/2$ (známý odhad).

Druhý činitel má limitu 0 (vznikne ze známé limity $\lim_{x\to 0+} x\log x$ s použitím věty o limitě složené funkce).

Tedy díky spojitosti exponenciály dostaneme celkovou limitu 1.

Rychle vzpomínejte na další užitečné limity!

Takhle vypadá graf u počátku



Konec cvičení 2.

Implicitní popsání plochy

Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.

Podobně je tomu s křivkami, a navíc i plochami, v 3-dimenzionálního prostoru.

DEFINICE. Nechť A je polootevřená množina v $\mathbb{R}^3$ a f je spojitá funkce na A.
Rovnice

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{pro } (x,y,z) \in A\,,$$

popisuje implicitně plochu $P = \{(x,y,z); f(x,y,z) = 0\}$ v trojrozměrném prostoru.

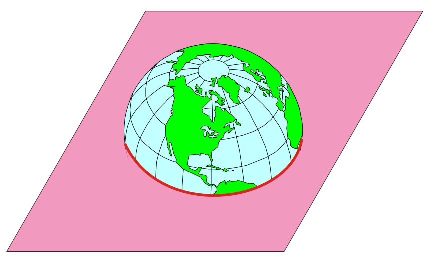
Speciální případ je $z = f(x,y)$.

Např. rovnice $x^2+y^2+z^2 = a^2$ popisuje povrch koule o poloměru a a středu v počátku.

V definici popsaná množina P byla nazvána plochou. Stejně jako křivka v rovině může být degenerovaná, tj. bod (nebo naopak vyplní např. celý čtverec), může i tato množina P být bodem nebo křivkou nebo i tělesem. V praxi používaných případech se však jedná o „pravé" plochy.

Křivka v prostoru se pomocí implicitního zadání popisuje jako průnik dvou implicitně zadaných ploch.

Např. kružnice se středem v počátku a poloměru a jako průnik povrchu koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ s rovinou $px + qy + rz = 0$:



Parametrické popsání množin

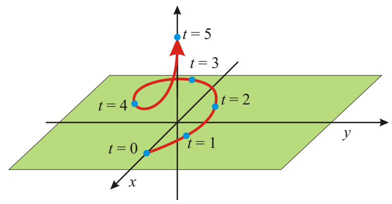
Stejně jako v případě křivek v rovině, bývá i v prostoru práce s parametrickým popisem křivek a ploch jednodušší.

DEFINICE. Nechť φ, ψ, τ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Rovnice

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad z = \tau(t) \quad \text{pro } t \in I$$

popisují parametricky křivku $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in I\}$ v trojrozměrném prostoru.
Platí zde stejná poznámka, jako u implicitně zadaných ploch, že výsledkem může být i degenerovaná plocha, nebo naopak těleso.



Nechť A je polootevřená množina v rovině a φ, ψ, τ jsou spojité funkce na A.
Rovnice

$$x = \varphi(u,v)\,, \quad y = \psi(u,v)\,, \quad z = \tau(u,v) \quad \text{pro } (u,v) \in A$$

popisují parametricky plochu $\{(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)); (u,v) \in A\}$ v trojrozměrném prostoru.

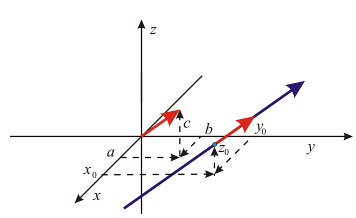
Množina A je zde jako dvojrozměrný svět parametrů, které popisují pomocí zobrazení $(u,v) \mapsto (x,y,z)$ trojrozměrný svět obrazů.

To je to samé jako u křivky. O.K.

Např. rovnice

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct, t \in (-\infty, +\infty)$$

popisuje přímku procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a mající směr vektoru (a, b, c).



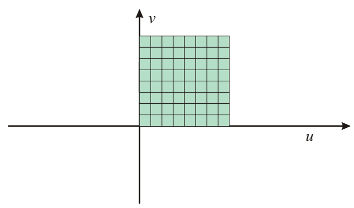
Rovnice

$$x = x_0 + a_1 u + a_2 v, y = y_0 + b_1 u + b_2 v, z = z_0 + c_1 u + c_2 v$$

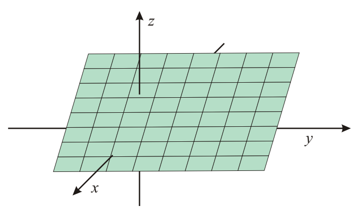
pro $u, v \in (-\infty, +\infty)$, popisuje rovinu procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a rovnoběžnou s vektory $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$.

Zase je zde vztah mezi parametry (u, v) a jejich obrazy (x, y, z).

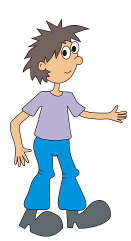
Svět parametrů při parametrizování roviny



Svět obrazů při parametrizování roviny



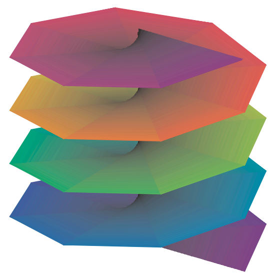
Teď přijde obvykle na řadu šroubovnice :-)



To je matematický šroub?

Svět parametrů u šroubovnice

Svět obrazů u šroubovnice



Je hezké, že si odpovídají i barvičky.

To je tím, že jsem se hodně snažila :-)

Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic Povrch válce (kolmého na rovinu xy) o středu v počátku a poloměru r bez podstav se parametricky popíše jako

$$x = r\cos u\,, y = r\sin u\,, z = v\,, \quad u \in [0, 2\pi), v \in I\,,$$

kde I je nějaký interval v $\mathbb{R}$.

V rovinách rovnoběžných s rovinou xy jsou tedy použity polární souřadnice k popisu průniku této roviny s plochou.

Tento „přenos" polárních souřadnic do prostoru popisuje následující definice.

DEFINICE. Cylindrické (válcové) souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z), kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y):

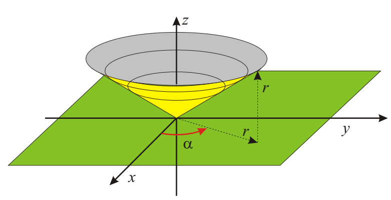
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} (+\pi), z = z$$

$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, z = z \, .$$

Množina je popsána cylindrickými souřadnicemi zadáním funkce $z(r, \alpha)$ (nebo $r(\alpha, z)$). (Uvědomte si, proč je v popisu úhlu α v závorce $(+)$.)

Jde opravdu v podstatě o polární souřadnice.

Např. plášť kužele s vrcholem v počátku je dán rovnicí $z = r$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), r \in [0, 1]$.



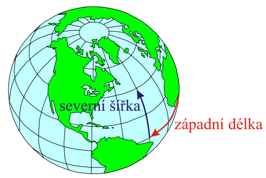
Hezkej cylindr ;-)

Popsání množiny pomocí sférických souřadnic

Povrch koule o poloměru a a středu v počátku se parametricky popíše jako

$$x = r\cos\beta\cos\alpha\,, y = r\cos\beta\sin\alpha\,, z = r\sin\beta\,, \quad \alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2], r = a\,.$$

Podobným způsoben se určují zeměpisné souřadnice:



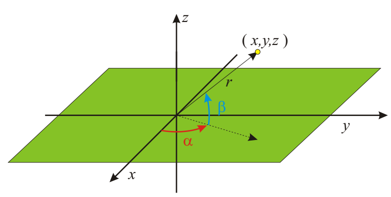
Volbou různých nezáporných a lze tímto způsobem popsat každý bod prostoru.

DEFINICE. Sférické souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, β), kde

$$x = r\cos\beta\cos\alpha, y = r\cos\beta\sin\alpha, z = r\sin\beta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}(+\pi), \beta = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Množina je popsána sférickými souřadnicemi je-li zadána funkce $r(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \in A$. Body množiny pak mají sférické souřadnice $(r(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$, kde (α, β) probíhají množinu A (ta bývá polootevřená, často interval na přímce nebo v rovině).



Např. koule o poloměru a a středu v počátku je zadána rovnicí $r = a$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Poznámky 3:

V dané situaci nebývá jednoduché rozhodnout, jakou pro danou množinu zvolit parametrizaci.

Polární souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r.

Podobně je tomu u cylindrických souřadnic.

Sférické souřadnice se hodí tam, kde se vyskytuje výraz $x^2 + y^2 + z^2$, popřípadě jeho odmocnina. V polárních nebo sférických souřadnicích se tato podmínka vyjádří jednodušeji jako r^2 nebo r.

Používají se i různé modifikace uvedených souřadnic. Např. výraz $x^2 + 4y^2$ se zjednoduší modifikovanými polárními souřadnicemi $x = r\cos\alpha, y = 2r\sin\alpha$.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Rovnost $y = x^2$ může znamenat jak funkci jedné proměnné (graf je parabola) tak implicitní zadání plochy v prostoru: $y - x^2 = 0$, kde chybí proměnná z – tj. $f(x, y, z) = y - x^2$.

Dovedete si představit tuto plochu?

2. Plocha zadaná rovností $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 4$ je elipsoid.

3. Jaká plocha je popsána rovností $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$?

4. Ověřte, že rovnost $r = 2\sin\beta, \beta \in [0, \pi/2]$, popisuje ve sférických souřadnicích povrch koule o poloměru 1 a středu $(0, 0, 1)$.

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

Cylindrické souřadnice

(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?

(b) Ve vzorci pro α je v závorce $+\pi$. Jaký je význam tohoto možného výběru?

(c) Kdy je vztah mezi (x, y, z) a (r, α, z) jednoznačný?

Sférické souřadnice

(a) Rovnost pro výpočet α neplatí pro $x = 0$. Jak se vypočte α v tomto případě?

(b) Ve vzorci pro α je v závorce $+\pi$. Jaký je význam tohoto možného výběru? Proč tato možnost chybí ve vzorci pro β?

(c) Kdy je vztah mezi (x, y, z) a (r, α, β) jednoznačný?

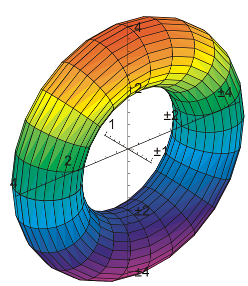
Konec otázek 3.

Cvičení 3: Příklad. Popište parapetricky anuloid.

Řešení. Zvolíme kružnici ležící v rovině xy o poloměru r se středem $(0, R)$.

Její parametrizaci zvolíme $u \mapsto (r\sin u, R + r\cos u)$.

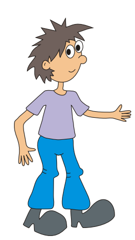
Pro její rotaci okolo osy x potřebujeme další parametr.



Celkově dostaneme parametrizaci anuloidu

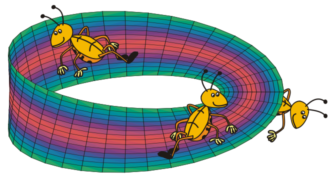
$$(u, v) \mapsto (R + u\cos(v/2), v, u\sin(v/2))$$

pro $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.



Tomu bych chtěl rozumět :-)

Příklad. Popište parametricky Mobiovu pásku.



Řešení. Množina vznikne rotací úsečky. Přitom pomalu úsečku otočíme o 180 stupňů.

To se zpravidla nepovede napoprvé bez chyby :-)

Konec cvičení 3.