FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

V reálných situacích závisejí děje obvykle na více proměnných než jen na jedné (např. na teplotě i na tlaku), závislost na jedné proměnné je spíše výjimkou.

OBECNOSTI

Reálná funkce více proměnných je zobrazení definované na nějaké podmnožině (na svém definičním oboru) euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ (pro $n > 1$) s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Protože body $\mathbb{R}^n$ jsou n–tice reálných čísel $(x_1, x_2, ..., x_n)$, bývá takováto funkce f často značena jako $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, což vysvětluje termín *více proměnných*.

Naopak, funkce jedné reálné proměnné s hodnotami v nějakém euklidovském prostoru je zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a je to vlastně n–tice $(f_1, f_2, ..., f_n)$ reálných funkcí jedné reálné proměnné (f_k je složení f s projekcí $\mathbb{R}^n$ na k–tou složku, tj. $f_k(x)$ je k-tá souřadnice bodu $f(x)$) — ověřte si to.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je tedy n–tice reálných funkcí k–proměnných. Každé takové zobrazení se nazývá *funkce více proměnných*, pokud $k > 1$. Je-li $n = 1$, jedná se o *reálnou funkci*.

KONVERGENCE V $\mathbb{R}^N$

Před zkoumáním funkcí jedné proměnné bylo nutné vysvětlit vlastnosti reálné přímky.

Ze stejného důvodu následuje popis některých vlastností roviny a prostoru, které budou v následujícím textu často používány.

Vzpomeňte si z geometrie na pojem vzdálenosti bodu p od bodu q značený $|p - q|$:

$$|p - q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}\,.$$

(Pro body $p, q, ...$ budou často čísla p_1, p_2, resp. q_1, q_2, atd., značit příslušné souřadnice těchto bodů.)

Vzhledem k tomu, že některé pojmy pro $\mathbb{R}^n$ jsou jen formální modifikací obdobných pojmů z $\mathbb{R}$, nebudou k nim už uváděny další poznámky.

Nejdříve je vhodné určit vlastnosti podmnožin roviny. Uvědomte si, že na rozdíl od přímky, kde jsou základním kamenem úsečky (tj. intervaly), je různorodost obdobných množin v rovině velká (kruhy, elipsy, čtverce, kosodélníky,...).

DEFINICE.

1. Množina A v $\mathbb{R}^2$ se nazývá omezená, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|a| \leq n$ pro každé $a \in A$.

2. Interval J v $\mathbb{R}^2$ je součin intervalů v $\mathbb{R}$, tj. $J = I_1 \times I_2$, kde I_1, I_2 jsou intervaly v $\mathbb{R}$.

   Tento interval J se nazývá otevřený (nebo uzavřený), jestliže jsou oba intervaly I_1, I_2 otevřené (resp. uzavřené).

3. Množina U v rovině je okolí bodu p, jestliže existuje otevřený interval J tak, že $p \in J \subset U$.

4. Posloupnost $\{p_n\}$ bodů v rovině konverguje k bodu p, jestliže každé okolí bodu p obsahuje skoro všechna p_n.

5. Podmnožina A roviny se nazývá uzavřená, jestliže limity posloupností z A leží v A.

   Omezená uzavřená množina se nazývá kompaktní.

   Podmnožina A roviny se nazývá otevřená, jestliže žádná posloupnost z doplňku množiny A nekonverguje k bodu v A. (Tj. doplněk množiny A je uzavřená množina.)

6. Bod p je hromadným bodem množiny A, jestliže každé okolí bodu P obsahuje nekonečně mnoho bodů A. Hranice otevřené množiny A je množina všech hromadných bodů A neležících v A.

   Množina, která vznikne z nějaké otevřené množiny přidáním části její hranice, se bude nazývat polootevřená.

POZOROVÁNÍ.

1. Množina A je uzavřená, právě když obsahuje všechny své hromadné body.
2. Množina A je otevřená, jestliže s každým jejím bodem p leží v A i nějaký otevřený interval obsahující p (tj. A je okolím každého svého bodu)
3. Množina je omezená, jestliže je obsažená v nějaké kouli se středem v počátku.

Pro konvergenci v $\mathbb{R}^n, n > 1$, platí obdobné věty s obdobnými důkazy jako pro konvergenci na přímce, kromě některých vět obsahující nerovnosti.

Prostor $\mathbb{R}^n$ bude brán jako lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ (součiny a podíly bodů v $\mathbb{R}^n$ nebudou používány).

Platí

- pozorování o jednoznačnosti limit, limitě konstantní posloupnosti a limitě podposloupností;
- charakterizace limit kromě 5.tvrzení o supremu a infimu;
- charakterizace konvergence pomocí Bolzanovy–Cauchyovy vlastnosti posloupnosti.
- limita součtu a násobku konstantou.
- Bolzanova-Weierstrassova věta: Z každé omezené posloupnosti v $\mathbb{R}^n$ lze vybrat podposloupnost konvergující v $\mathbb{R}^n$.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

VLASTNOSTI FUNKCÍ V $\mathbb{R}^N$

Často se i u funkcí více proměnných, např. $f(x, y)$, používá jedna proměnná, která se bude značit velkým písmenem kvůli odlišení. Takže pro $f(x, y)$ je $f(P)$ hodnota funkce f v bodě $P = (x, y)$. Je možné si body P představovat jako vektory.

DEFINICE. Funkce více proměnných, která má jednobodový obor hodnot, se nazývá konstantní (tedy $f(P) = f(Q)$ pro všechna $P, Q \in \mathcal{D}(f)$)).

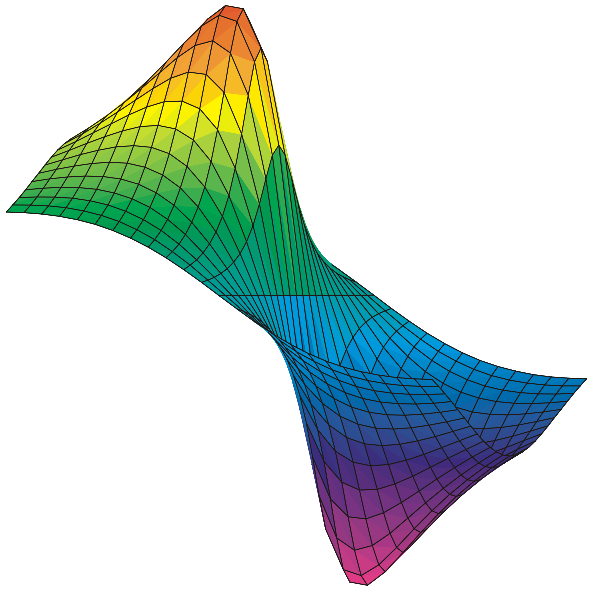
Grafem konstantní funkce dvou proměnných je rovina rovnoběžná s rovinou x, y nebo její část.

Funkce f více proměnných se nazývá sudá (resp. lichá), jestliže její definiční obor je symetrický kolem 0 (tj. $P \in \mathcal{D}(f)$ právě když $-P \in \mathcal{D}(f)$) a $f(-P) = f(P)$ (resp. $f(-P) = -f(P)$) pro všechna $P \in \mathcal{D}(f)$.

Graf sudé funkce dvou proměnných je symetrický podle osy z.

Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Funkce f více proměnných je omezená (resp. shora omezená nebo zdola omezená), jestliže její obor hodnot má uvedenou vlastnost, tj. existuje číslo k tak, že $|f(P)| \leq k$ (resp. $f(P) \leq k$, nebo $f(P) \geq k$) pro všechna $P \in \mathcal{D}(f)$.



DEFINICE. Jsou-li f, g funkce dvou proměnných, značí $\max\{f,g\}, \min\{f,g\}, f+g, f\cdot g, f/g$ funkce, které mají za hodnotu v bodě P postupně

$$\max\{f(P), g(P)\}, \min\{f(P), g(P)\}, f(P)+g(P), f(P)\cdot g(P), f(P)/g(P)\ .$$

Složení $f\circ g$ zobrazení g z podmnožiny $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ a zobrazení f z podmnožiny $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^m$ je zobrazení z podmnožiny $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ která má v bodě $P\in\mathbb{R}^n$ hodnotu $f(g(P))$.

SPOJITOST

DEFINICE. Nechť f je funkce více proměnných, $P\in\mathcal{D}(f)$, a pro jakoukoli posloupnost $\{P_n\}$ z $\mathcal{D}(f)$ konvergující k P nechť $\lim f(P_n) = f(P)$. Pak se říká, že f je spojitá v bodě P a tento bod se nazývá bodem spojitosti funkce f.

Je-li f spojitá v každém bodě množiny A, říká se, že f je spojitá na množině A.

Je-li f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, říká se, že f je spojitá.

VĚTA. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro funkci f více proměnných a bod A jejího definičního oboru:

1. Funkce f je spojitá v bodě A.
2. Pro každé okolí U bodu $f(A)$ existuje okolí V bodu A takové, že $f(x)\in U$ jakmile $x\in V\cap\mathcal{D}(f)$.
3. Pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že $|f(P)-f(A)|<\varepsilon$ jakmile $P\in\mathcal{D}(f)$ a $|P-A|<\delta$.

I důkaz následujícího tvrzení je stejný jako důkaz odpovídající věty pro jednu proměnnou, protože se vlastně používá jen tvrzení o součtu, součinu a podílu limit posloupností v $\mathbb{R}$.

VĚTA. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě P, jsou i funkce $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} f+g, f\cdot g$ a f/g (v případě $g(P)\neq 0$) spojité v bodě P.

Definuje-li se polynom dvou proměnných x, y jako funkce vzniklá použitím konečně mnoha uvedených aritmetických operací na funkce $f(x,y)=x$ a $g(x,y)=y$, jsou polynomy spojité funkce na $\mathbb{R}^2$.

Racionální funkce dvou proměnných jsou podíly polynomů dvou proměnných a jsou tedy spojité na svém definičním oboru.

VĚTA. Nechť $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je spojitá v bodě P a $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je funkce spojitá v $g(P)$. Pak složení $f \circ g$ je spojité v bodě P.

Jsou-li např. g_1, g_2 funkce dvou proměnných spojité v bodě (x, y) a f je funkce dvou proměnných spojitá v bodě $(g_1(x, y), g_2(x, y))$, je funkce $f \circ (g_1, g_2)$ spojitá v bodě (x, y).

Je-li f spojitá funkce více proměnných, je i $|f|$ spojitá funkce.

LEMMA. Je-li f spojitá na intervalu I a P, Q jsou body I s hodnotami $f(P) < 0 < f(Q)$, pak existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.

Důkaz. Úsečka spojující body P a Q leží celá v I a dá se popsat jako množina $\{(1-t)P + tQ; t \in [0, 1]\}$. Funkce $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definovaná jako $g(t) = f((1-t)P + tQ)$ je spojitá funkce jedné proměnné (ukažte to) a podle Bolzanovy věty existuje t tak, že $g(t) = 0$. Tedy existuje $R \in I$ s hodnotou $f(R) = 0$.

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje interval na bod nebo na interval.

VĚTA. Spojitá funkce zobrazuje kompaktní množinu na kompaktní podmnožinu $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť f je spojitá funkce definovaná na kompaktní množině $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\{x_n\}$ je posloupnost v obraze $f(A)$ konvergující v $\mathbb{R}^*$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $P_n \in A$ tak, že $f(P_n) = x_n$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje (protože A je omezená) konvergentní podposloupnost $\{P_{k_n}\}$ s limitou P. Protože A je uzavřená, je $P \in A$. Ze spojitosti f vyplývá, že body $f(P_{k_n})$ konvergují k $f(P)$. Limita posloupnosti $\{x_n\}$ tedy leží v $f(A)$, z čehož vyplývá, že $f(A)$ je uzavřená i omezená.

DŮSLEDEK. Spojitá reálná funkce více proměnných dosahuje na uzavřené omezené množině A své největší a nejmenší hodnoty, tj., existují body
$C, D \in A$ takové, že
$$f(C) = \sup_{P \in A} f(P), \quad f(D) = \inf_{P \in A} f(P)\,.$$

LIMITA

DEFINICE. Nechť C je hromadný bod definičního oboru funkce f.
Říkáme, že limita funkce f v bodě C se rovná A
(značení $\lim\limits_{P \to C} f(P) = A$, nebo $f(P) \to A$ pro $P \to C$), jestliže $\lim f(P_n) = A$ pro každou prostou posloupnost $\{P_n\} \subset \mathcal{D}(f)\}$ konvergující k C.

Pro limity funkcí více proměnných platí obdobná tvrzení, jako pro limity funkce jedné proměnné.

VĚTA.

1. Nechť $C \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce f je spojitá v bodě C právě když $\lim\limits_{P \to C} f(P) = f(C)$.
2. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.
3. Je ekvivalentní pro funkci f, hromadný bod C definičního oboru f a bod A:
   (a) $\lim\limits_{P \to C} f(P) = A$;

(b) Pro každé okolí U bodu A existuje okolí V bodu C takové, že $f(P) \in U$ jakmile $P \in V \cap \mathcal{D}(f), P \neq C$.

(c) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(P) - A| < \varepsilon$ jakmile $P \in \mathcal{D}(f), 0 < |P - C| < \delta$.

4. Nechť C je hromadný bod definičního oboru funkce $f + g$. Pak platí (píše se $\lim$ místo $\lim\limits_{P \to C}$):

   (a) $\lim(f(P) + g(P)) = \lim f(P) + \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;

   (b) $\lim(f(P) \cdot g(P)) = \lim f(P) \cdot \lim g(P)$, pokud má pravá strana smysl;

   (c) $\lim \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim f(P)}{\lim g(P)}$, pokud má pravá strana smysl;

5. Nechť g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, f z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^m$ a C je hromadný bod definičního oboru funkce $f \circ g$. Jestliže $B = \lim_{P \to C} g(P)$, pak $\lim_{P \to C} (f \circ g)(P) = \lim_{Q \to B} f(Q)$, pokud má pravá strana smysl a g nenabývá hodnoty B na nějakém okolí bodu C, kromě, možná, bodu C.

6. Nechť f, g jsou funkce více proměnných definované na množině A a C buď hromadný bod A.

   (a) Jestliže $\lim\limits_{P \to C} f(P) < \lim\limits_{P \to C} g(P)$, pak existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) < g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$.

   (b) Jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(P) \leq g(P)$ pro všechna $P \in U \cap A, P \neq C$, pak $\lim\limits_{P \to C} f(P) \leq \lim\limits_{P \to C} g(P)$ (pokud obě limity existují).

DŮSLEDEK.

1. Nechť funkce f, g, h jsou funkce více proměnných definované na množině A, C je hromadný bod A, U okolí C a pro $P \in A \cap U, P \neq C$ je $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$. Jestliže existují $\lim\limits_{P \to C} f(P)$, $\lim\limits_{P \to C} h(P)$ a rovnají se, pak existuje i $\lim\limits_{P \to C} g(P)$ a rovná se oběma zbývajícím.

2. Nechť $\lim\limits_{P \to C} f(P) = 0$ a funkce g je omezená na nějakém okolí bodu C. Pak platí rovnost $\lim\limits_{P \to C} f(P)g(P) = 0$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

Cvičení 2

Implicitní popsání plochy

Křivky v rovině byly popsány různým způsobem (implicitně, parametricky, pomocí polárních souřadnic) a často to byly množiny, které nebyly grafem žádné funkce.

DEFINICE. Nechť A je polootevřená množina v $\mathbb{R}^3$ a f je spojitá funkce na A.

Rovnice

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{pro } (x, y, z) \in A\,,$$

popisuje implicitně plochu $P = \{(x, y, z); f(x, y, z) = 0\}$ v trojrozměrném prostoru.

V definici popsaná množina P byla nazvána plochou. Stejně jako křivka v rovině může být degenerovaná, tj. bod (nebo naopak vyplní např. celý čtverec), může i tato množina P být bodem nebo křivkou nebo i tělesem. V praxi používaných případech se však jedná o „pravé" plochy.

Křivka v prostoru se pomocí implicitního zadání popisuje jako průnik dvou implicitně zadaných ploch.

Parametrické popsání množin

Stejně jako v případě křivek v rovině, bývá i v prostoru práce s parametrickým popisem křivek a ploch jednodušší.

DEFINICE. Nechť φ, ψ, τ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Rovnice

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad z = \tau(t) \quad \text{pro } t \in I$$

popisují parametricky křivku $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in I\}$ v trojrozměrném prostoru.

Platí zde stejná poznámka, jako u implicitně zadaných ploch, že výsledkem může být i degenerovaná plocha, nebo naopak těleso.

Nechť A je polootevřená množina v rovině a φ, ψ, τ jsou spojité funkce na A.

Rovnice

$$x = \varphi(u,v)\,, \quad y = \psi(u,v)\,, \quad z = \tau(u,v) \quad \text{pro } (u,v) \in A$$

popisují parametricky plochu $\{(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)); (u,v) \in A\}$ v trojrozměrném prostoru.

Např. rovnice

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct, t \in (-\infty, +\infty)$$

popisuje přímku procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a mající směr vektoru (a, b, c).

Rovnice

$$x = x_0 + a_1u + a_2v, y = y_0 + b_1u + b_2v, z = z_0 + c_1u + c_2v$$

pro $u, v \in (-\infty, +\infty)$, popisuje rovinu procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a rovnoběžnou s vektory $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$.

Svět parametrů při parametrizování roviny

Svět obrazů při parametrizování roviny

Svět parametrů u šroubovnice

Svět obrazů u šroubovnice

Popsání množiny pomocí cylindrických souřadnic Povrch válce (kolmého na rovinu xy) o středu v počátku a poloměru r bez podstav se parametricky popíše jako

$$x = r\cos u\,, y = r\sin u\,, z = v\,, \quad u \in [0, 2\pi), v \in I\,,$$

kde I je nějaký interval v $\mathbb{R}$.

V rovinách rovnoběžných s rovinou xy jsou tedy použity polární souřadnice k popisu průniku této roviny s plochou.

DEFINICE. Cylindrické (válcové) souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, z), kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}(+\pi), z = z$$

$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha, z = z\,.$$

Množina je popsána cylindrickými souřadnicemi zadáním funkce $z(r,\alpha)$ (nebo $r(\alpha,z)$). (Uvědomte si, proč je v popisu úhlu α v závorce $(+)$.)

Např. plášť kužele s vrcholem v počátku je dán rovnicí $z = r$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), r \in [0, 1]$.

Popsání množiny pomocí sférických souřadnic

Povrch koule o poloměru a a středu v počátku se parametricky popíše jako

$$x = r\cos\beta\cos\alpha\,, y = r\cos\beta\sin\alpha\,, z = r\sin\beta\,, \quad \alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2], r = a\,.$$

Podobným způsoben se určují zeměpisné souřadnice:

Volbou různých nezáporných a lze tímto způsobem popsat každý bod prostoru.

DEFINICE. Sférické souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, β), kde

$$x = r\cos\beta\cos\alpha, y = r\cos\beta\sin\alpha, z = r\sin\beta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}(+\pi), \beta = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Množina je popsána sférickými souřadnicemi je-li zadána funkce $r(\alpha,\beta), (\alpha,\beta) \in A$. Body množiny pak mají sférické souřadnice $(r(\alpha,\beta),\alpha,\beta)$, kde (α,β) probíhají množinu A (ta bývá polootevřená, často interval na přímce nebo v rovině).

Např. koule o poloměru a a středu v počátku je zadána rovnicí $r = a$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Poznámky 3 Příklady 3 Otázky 3

Cvičení 3