PARCIÁLNÍ DERIVACE

Jak derivovat reálné funkce více proměnných, aby bylo možné tyto derivace použít podobně jako derivace funkcí jedné proměnné? Jestliže se okopíruje definice z jedné proměnné, dostane se pro bod P z $\mathbb{R}^n, n > 1$, a funkci f n proměnných limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P+h) - f(P)}{h},$$

což má obecně smysl jen pro reálná čísla h. V čitateli lze h chápat jako n-tici, kde jsou samé 0 kromě jedné souřadnice rovné h. Takto definované operace se nazývají parciální derivace, protože používají vlastnosti funkce f jen částečně, jen v oné nenulové souřadnici.

DEFINICE. Parciální derivace funkce f podle první (druhé) proměnné v bodě (x_0, y_0) svého definičního oboru je derivace funkce jedné proměnné $f(x, y_0)$ (resp. $f(x_0, y)$) v bodě x_0 (resp. y_0).

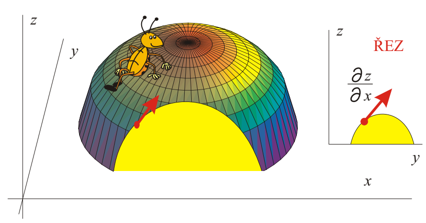
Značí se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \text{ resp. } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

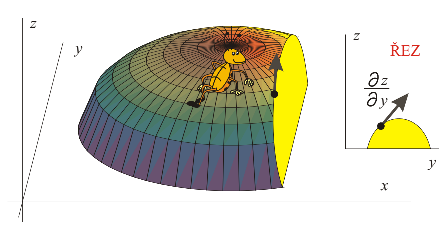
Občas se používá značení $f_x(x_0, y_0)$, resp. $f_y(x_0, y_0)$.

Opravdu se bere $x \mapsto f(x, y_0)$, což je funkce jedné proměnné.

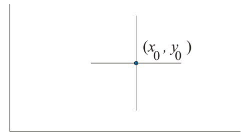
Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ odpovídá obyčejné derivaci funkce jedné proměnné, kterou získáme pomocí řezu rovnoběžného s osou x a z:



Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ odpovídá obyčejné derivaci funkce jedné proměnné, kterou získáme pomocí řezu rovnoběžného s osou y a z:



Pro existenci parciálních derivací v bodě (x_0, y_0) stačí, aby funkce byla definována na „kříži" se středem v (x_0, y_0), což samozřejmě není příliš vhodné pro studium vlastností funkce.



Proto bude v dalším **předpokládáno pro existenci parciálních derivací funkce f v (x_0, y_0), že f je definována v okolí bodu (x_0, y_0).**

Protože se u parciálních derivací jedná o derivaci funkce jedné proměnné, platí pro aritmetické operace s parciálními derivacemi stejná tvrzení jako pro derivace funkcí jedné proměnné (platnost následujících rovností je stejná jako u jedné proměnné, tedy má-li smysl pravá strana):

VĚTA.

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\,.$$

Je to fakt. Jde při tom o funkci jedné proměnné. Ta druhá je jenom jakýsi parametr. Tedy KONSTANTA !!!

U funkcí jedné proměnné měla existence vlastní derivace v bodě za následek spojitost funkce v onom bodě. U funkcí více proměnné nestačí pro spojitost v bodě ani existence vlastních parciálních derivací v okolí onoho bodu (viz *Příklady*). Je nutné dodat další předpoklad:

VĚTA. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ omezené parciální derivace v okolí nějakého bodu, je v tomto bodě spojitá.

Důkaz. Nechť I je interval v $\mathbb{R}^2$ a f má omezené parciální derivace uvnitř I (označme S horní hranici absolutních hodnot parciálních derivací f uvnitř I). Zvolte uvnitř I body (x, y) a $(x+h, y+k)$ (pak I obsahuje uvnitř i úsečky mezi body $A = (x, y), B = (x+h, y)$ a mezi $B = (x+h, y), C = (x+h, y+k)$). Funkce f splňuje předpoklady věty o střední hodnotě na obou úsečkách (upřesněte tento výrok) a existují body P, Q na těchto úsečkách tak, že

$$f(B) - f(A) = f_x(P)h\,, \quad f(C) - f(B) = f_y(Q)k\,.$$

odtud vyplývá vztah $|f(x+h, y+k) - f(x, y)| \le S(|h| + |k|)$, a tedy i spojitost f v bodě (x, y). $\diamond$

Speciálně je tedy f spojitá v nějakém bodě, má-li spojité parciální derivace na nějakém jeho okolí.

Derivace reálné funkce f jedné proměnné v bodě x_0 znamenala geometricky směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Totéž samozřejmě platí pro parciální derivace funkce více proměnných.

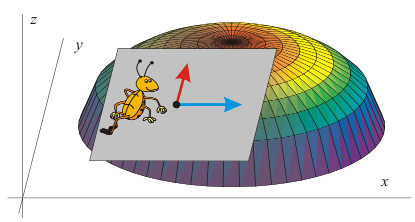
Příslušné rovnice tečen mají rovnice (psané vektorově), kde označíme $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (x_0,y_0,z_0) + u(1,0,f_x(x_0,y_0))\,, u \in \mathbb{R}\\ (x,y,z) &= (x_0,y_0,z_0) + v(0,1,f_y(x_0,y_0))\,, v \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Lineární kombinace vektorů na pravých stranách rovnic určuje rovinu

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Pokud by měla analogie s funkcemi jedné proměnné platit i pro tento případ dvou proměnných, uvedená rovina by měla být tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0, z_0). To znamená, že v nějakém okolí bodu (x_0, y_0, z_0) jsou body grafu blízko bodům roviny a čím blíže k (x_0, y_0, z_0), tím blíže jsou body grafu a roviny navzájem.



Pro funkce jedné proměnné byla taková aproximace vyjádřena zbytkem v Taylorově rozvoji: $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + |h|\varphi(h)$, kde $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.

Takovýto vztah existoval, právě když existovala vlastní derivace $f'(x_0)$, a proto pro funkce jedné proměnné nemá velký smysl tento vztah speciálně pojmenovávat.

V našem případě dvou proměnných se výše uvedená vlastnost tečné roviny přepíše následovně:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + |(h,k)|\varphi(h,k)\,,$$

kde $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \varphi(h,k) = 0$.

Tuto důležitou situaci je vhodné formalizovat a zavést jako vhodný pojem:

DEFINICE. Diferenciál v bodě (x_0, y_0) funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že (pro body $(x+h, y+k)$ z nějakého okolí bodu (x_0, y_0))

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + D(h,k) + |(h,k)|\varphi(h,k)\,,$$

kde $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \varphi(h,k) = 0$.

Má-li f v bodě (x_0, y_0) diferenciál, říká se, že je diferencovatelná v tomto bodě.

Je-li funkce diferencovatelná v nějakém bodě, je definována v nějakém okolí tohoto bodu.

Někdy je vhodnější psát místo $|(h,k)|\varphi(h,k)$ výraz $h\psi(h,k) + k\tau(h,k)$ (viz *Otázky*).

Vztah parciálních derivací a diferenciálu poskytuje následující tvrzení.

VĚTA. Nechť $f(x,y)$ je je definována v okolí bodu (x_0, y_0).

1. Pokud má f v (x_0, y_0) diferenciál D, pak v tomto bodě existují parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ a lineární funkce D má tvar
$$D(h,k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k\,.$$

2. Pokud má f v (x_0, y_0) spojité parciální derivace, má f v tomto bodě diferenciál.

Důkaz. Nechť D je diferenciál funkce f v (x_0, y_0), tj. $D(h, k) = ah + bk$ pro nějaká čísla a, b a platí rovnost z definice diferenciálu. Jestliže se položí $k = 0$ a celá rovnost se vydělí h, dostane se

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a + \varphi(h, 0)\,.$$

Pravá strana má pro $h \to 0$ limitu rovnou a a tedy existuje i limita levé strany a je rovna a. Limita levé strany je však rovna $f_x(x_0, y_0)$. Podobně pro $f_y(x_0, y_0)$.

Nyní dokážeme druhé tvrzení. Musíme dokázat následující rovnost:

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{|(h, k)|} = 0\,.$$

První dva členy v čitateli se rozepíší do tvaru $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ a na první dva a zbylé dva členy se použije věta o střední hodnotě. Celý zlomek po úpravě dostane tvar (c leží mezi x_0 a $x_0 + h$, d leží mezi y_0 a $y_0 + k$)

$$\frac{h(f_x(c, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) + k(f_y(x_0, d) - f_x(x_0, y_0))}{|(h, k)|}\,.$$

Použitím spojitosti derivací a odhadů $\frac{|h|}{|(h,k)|}, \frac{|k|}{|(h,k)|} \le 1$ se snadno zjistí, že zlomek má limitu rovnou 0. $\diamond$

Jednoduchým důsledkem existence diferenciálu je spojitost. Dokažte následující tvrzení.

VĚTA. Má-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě (x_0, y_0) diferenciál (speciálně, má-li v tomto bodě spojité parciální derivace), je v tomto bodě spojitá.

Jaký je vztah tohoto tvrzení k předchozímu vztahu spojitosti a parciálních derivací?

Dalším tvrzením, kde diferenciál pomůže, je parciální derivace složené funkce.

Parciální derivace složené funkce je komplikovanější než u jedné proměnné, protože se proměnná, podle které se integruje, obecně vyskytuje v obou proměnných vnější funkce.

Na to si dávejte pozor. Parciální derivace složené funkce je zajímavý strojek, který spolu prozkoumáme:

VĚTA. Nechť $f(x,y)$ má diferenciál v bodě (x_0,y_0), funkce $x=p(u,v), y=q(u,v)$ mají diferenciál v bodě (u_0,v_0) a $x_0=p(u_0,v_0), y_0=q(u_0,v_0)$.

Pak $F(u,v)=f(p(u,v),q(u,v))$ má diferenciál v bodě (u_0,v_0) a pro parciální derivace platí (vzorce jsou uvedeny bez bodů $(x_0,y_0),(u_0,v_0)$)

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial v}.$$

Jestliže funkce p,q závisí jen na jedné proměnné, např. na u, píší se ve vzorci pro $F_u=F'$ místo p_u a q_u derivace p' a q', resp.

To je ten strojek. Derivuje se podle každé "mezi-proměnné" a ty pak podle naší proměnné. Pak to posčítáme na jednu hromadu.

Důkaz. Stačí dokázat tvrzení pro funkce $p(u),q(u)$ jedné proměnné, důkaz obecného tvrzení má stejný postup. Parciální derivace funkcí jsou brány jen v uvedených bodech s nulovými indexy a proto tyto body ve vzorcích vynecháme, tj. např. f_x značí $f_x(x_0,y_0)$.

Pro jednoduchost budou vynechány i indexy 0 u bodů, ve kterých se derivace vyšetřují. Pracuje se v nějakých okolích příslušných bodů, kde uvedené parciální derivace existují.

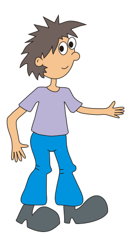
Podle předpokladu platí $f(x+h,y+k)=f_xh+f_yk+|(h,k)|\varphi(h,k)$, kde φ má limitu 0 v počátku. Podobně platí $p(u+h)=p(u)+p'(u)h+|h|\psi(h), q(u+h)=q(u)+q'(u)h+|h|\tau(h)$, kde funkce ψ,τ mají limitu 0 v bodě 0. Úkolem je vyjádřit vhodně $F(u+h)$, tj. $f(p(u+h),q(u+h))$. Do poslední funkce se dosadí místo $p(u+h)$ a $q(u+h)$ výrazy z jejich uvedeného rozvoje a dostane se $f(p(u)+(p'(u)h+|h|\psi(h)),q(u)+(q'(u)h+|h|\tau(h)))$.

Na tento tvar se použije výraz pro diferenciál funkce f a dostane se (v posledním výrazu jsou pro stručnost použity výrazy $H = p'(u)h + |h|\psi(h), K = q'(u)h + |h|\tau(h)$)

$$\begin{aligned} F(u+h) &= F(u) + f_x(p'(u)h + |h|\psi(h)) + f_y(q'(u)h + |h|\tau(h)) + |(H,K)|\varphi(H,K) \\ &= F(u) + f_x p'(u)h + f_y q'(u)h + |h|\Big(\psi(h) + \tau(h) + \frac{|(H,K)|\varphi(H,K)}{|h|}\Big). \end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že poslední výraz ve velké závorce má limitu 0 v bodě $h = 0$. Ale $\psi(h) + \tau(h)$ má limitu 0 podle předpokladu, výrazy H, K mají také limitu 0 v $h = 0$ (a tedy i $\varphi(H,K)$ má limitu 0) a výraz $|(H,K)|/|h|$ je omezený. ◇

To je jasné. Ten důkaz nemůže být jednodušší než pro jednu proměnnou. SORRY.



Takové důkazy mám rád.

Místo zúžení funkce na přímky rovnoběžné s osami lze derivovat (jako funkce jedné proměnné) zúžení funkce na libovolnou přímku procházející daným bodem.

Směrem v rovině je míněn vektor v rovině o délce 1 (tj., bod na jednotkové kružnici).

DEFINICE. Nechť (u,v) je jednotkový vektor v rovině. Pak derivace ve směru (u,v) funkce f dvou proměnných v bodě (x_0,y_0) je derivace funkce $f(x_0 + t\cdot u, y_0 + t\cdot v)$ jedné proměnné t v bodě $t = 0$.

Derivace ve směru lze jednoduše vyjádřit podle parciálních derivací:

VĚTA. Má-li f v bodě (x_0, y_0) obě parciální derivace spojité, pak derivace f ve směru (u, v) v bodě (x_0, y_0) je rovna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot v\,.$$

Důkaz. Zderivujete-li funkci $f(x_0 + t \cdot u, y_0 + t \cdot v)$ podle t a použijete předchozí tvrzení o derivaci složené funkce (nyní jsou p a q funkce jedné proměnné), dostanete dokazovaný výraz. $\diamond$

Je-li α úhel, který svírá vektor (u, v) s osou x, pak derivace f ve směru (u, v) v bodě (x_0, y_0) je rovna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha\,.$$

Tedy parciální derivace slouží jako jakýsi generátor derivací ve směru.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ je parciální derivace f ve směru $(1, 0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ je parciální derivace f ve směru $(0, 1)$.

Funkce nemusí být v nějakém bodě spojitá i když v něm má derivace ve všech směrech (viz *Příklady*).

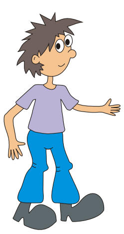
To je zásadní záludnost funkcí více proměnných. Pozor na to!!!

Dokonce nestačí zkoumat ani "parciální derivace podél parabol" a podobně!!!

Parciální derivace vyšších řádů se definují stejně, jako derivace vyšších řádů pro funkce jedné proměnné.

Např. $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x^2}$ značí druhou parciální derivaci podle x z parciální derivace podle y z parciální derivace funkce f podle x.

Tj., nejdříve derivujeme f podle x, pak výsledek podle y a pak výsledek dvakrát podle x.



Na takové hračky jsem připravený. Ještě lepší by bylo, kdyby všechny proměnné byly konstanty najednou.

V případě spojitých derivací na pořadí derivací nezáleží (viz následující tvrzení). Tj., v předchozím případě by bylo možně např. nejdříve derivovat podle y a pak třikrát podle x.

To je ZÁSADNÍ VĚC:

VĚTA. Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě (x_0, y_0), pak se v tomto bodě rovnají.

Důkaz. Protože jsou obě derivace 2.řádu v (x_0, y_0) spojité, existují ony i parciální derivace 1.řádu v nějakém otevřeném okolí tohoto bodu. V následujícím postupu budou čísla h, k brána tak malá, že příslušné použité body leží v tomto okolí.

Podle definice je $f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}(f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0))/h$ a $f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}(f_x(x_0, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0))/k$, tj.

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}.$$

(Uvědomte si, že $f_{yx}(x_0, y_0)$ je limita téhož výrazu, jen s přehozenými oběma limitami.) Zvolí se $g(y) = (f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)/h$, takže výraz v limitě je roven $(g(y_0 + k) - g(y_0)/k$

Teď se použije několikrát věta o střední hodnotě:

Podle této věty je poslední výraz roven $g'(d)$, což je $(f(x_0 + h, d) - f(x_0, d)/h$, kde d je bod ležící mezi $y_0, y_0 + k$. Opětným použitím věty o střední hodnotě se poslední výraz změní na $f_{yx}(c, d)$ pro nějaký bod ležící mezi $x_0, x_0 + h$.

Dlouhý zlomek v limitě se zkrátil na $f_{yx}(c, d)$ a jeho limita je rovna $f_{yx}(x_0, y_0)$.

Použili jsme spojitost druhých derivací v (x_0, y_0).

$\diamond$

V běžných situacích to tak opravdu bude.

Obdobně pro další smíšené parciální derivace:

Má-li funkce více proměnných všechny parciální derivace v nějakém bodě až do řádu n spojité, pak u všech parciálních derivací v tomto bodě do řádu n nezáleží na pořadí derivování.

Je to prostě šikovný stroječek.

V *Otázkách* je návod na funkci, která nemá záměnné parciální derivace.

Poznámky 1:

1. Uvědomte si, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0)\,, \quad \text{kde } g(t) = f(x_0 + t, y_0)\,.$$

Jak bylo řečeno, pro parciální derivace f v bodě $(0,0)$ stačí, aby f byla definována na osách x a y.

Pak samozřejmě nemusí existovat derivace v žádných jiných směrech.

I když bude f definována v okolí $(0,0)$, a obě parciální derivace v tomto bodě existují, derivace v jiných směrech nemusí existovat (viz *Příklady*).

Ani spojitost f v okolí $(0, 0)$ k tomu nestačí. Už jsem se taky spálila.

2. Existence derivací ve všech směrech v daném bodě implikuje spojitost f v tomto bodě na každé přímce obsahující daný bod, nikoli však v onom bodě (k bodu je možné se blížit po jiné křivce) (viz *Příklady*).

V tomhle punktu mne nic nepřekvapí. Alespoň jednu chybu tu udělá kazdý.

3. Má-li funkce f diferenciál v okolí bodu (x_0, y_0) a její parciální derivace prvního řádu mají diferenciál v (x_0, y_0), říká se, že f má v (x_0, y_0) diferenciál 2.řádu, který má tvar

$$f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 ,$$

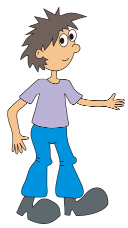
což se při použití znaků ∂ dá formálně psát ve tvaru $(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f$ (rozepište).

To dává návod, jak definovat a popsat n-tý diferenciál: $(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n f$.

Jde tu jenom o formalizování derivací vyššího řádu pro funkce více proměnných.

4.

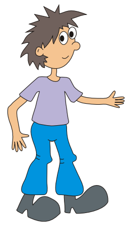
Tvrzení o záměnnosti derivací $f_{xy} = f_{yx}$ se může zdát podivné, protože pro jeho ověření je nutné obě derivace spočítat a zjistit zda jsou spojité.



Pravda pravdoucí. Na tohle slyším.

U většiny použití to však není nutné, protože je známo, jakého tvaru derivace budou a zda budou spojité.

Např. parciální derivace racionálních funkcí jsou zase racionální funkce, parciální derivace goniometrických funkcí jsou zase goniometrické funkce, apod.



Tedy z vody se udělá jenom vodová polívka. O.K.

Dá se dokázat, že pro záměnnost druhých derivací stačí existence druhého diferenciálu.
Diferenciály se často píší ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathrm{dx} + f_y(x,y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Druhé a vyšší diferenciály se mohou značit symboly $\mathrm{d}^2 f$, $\mathrm{d}^3 f$ ....

5. Vzorec pro derivaci složené funkce lze přepsat do kratšího (ale ne tak popisného) tvaru $g_u = f_x\varphi_u + f_y\psi_u$ (pod. pro derivaci podle v).

Protože se v první parciální derivaci složené funkce vyskytují nové i staré proměnné (tj. u, v i x, y), je třeba při opětném derivování dávat velký pozor (viz *Příklady*).

6. Bylo již naznačeno, že diferenciál má vztah k tečné rovině grafu funkce.
Tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y)$ ve vnitřním bodě (x_0,y_0) definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ má rovnici

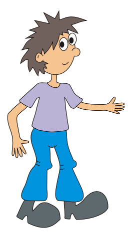
$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Direnciál znamená lineární aproximaci funkce. Tedy graf jde aproximovat rovinou.

T.j. jde o dotyk.

Diferenciál má tedy jasný geometrický význam.

Pokud existuje. T.j. pokud například má f v (x_0, y_0) spojité parciální derivace 1.řádu.



Nebo zkusím graf pohladit. Když bude hladký, je tam.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Pro funkci $f(x,y) = x^3y - \sin(xy^2)$ jsou parciální derivace rovny

$$f_x = 3x^2y - y^2\cos(xy^2)\,, \quad f_y = x^3 - 2xy\cos(xy^2)\,.$$

Parciální derivace druhého řádu:

$$f_{xx} = 6xy + y^4\sin(xy^2)\,,$$

$$f_{xy} = 3x^2 - 2y\cos(xy^2) + 2xy^3\sin(xy^2)\,,$$

$$f_{yy} = -2x\cos(xy^2) + 4x^2y^2\sin(xy^2)\,.$$

Pro kontrolu ověřte, že $f_{yx} = f_{xy}$.

2. Pro výpočet derivace funkce x^2/y ve směru vektoru $(1, \sqrt{3})$ v bodě $(1, 2)$ je nejprve nutné upravit daný vektor na jednotkový $(1/2, \sqrt{3}/2)$ a teprve potom použít vzorec.

Protože $\mathrm{grad} f = (2x/y, -x^2/y^2)$, což je v daném bodě vektor $(1, -1/4)$, je skalární součin (a tedy hledaná derivace) rovný $(1, -1/4) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = 1/2 - \sqrt{3}/8$.

3. Mají se spočítat druhé smíšené parciální derivace f_{uv} složené funkce $f(x, y) = 2x^3y$, kde $x = u^2 + v^2, y = uv$. Nejdříve se spočítá derivace prvního řádu $f_u = 6x^2y \cdot 2u + 2x^3 \cdot v$.

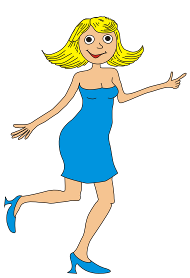
Méně zkušený počtář si může psát funkci f jako $2x^3(u, v)y(u, v)$.

Výsledek se zderivuje podle v (ale x, y jsou také funkce v, takže se derivuje podle v funkce $6x^2(u, v)y(u, v)2u + 2x^3(u, v)v$:

$$f_{uv} = 12xy \cdot 4uv + 6x^2 \cdot 2u^2 + 6x^2 \cdot 2uv + 2x^3 \,.$$

V tomto jednoduchém případě bylo také možné dosadit do definice f za x a y výrazy s u, v a derivovat jednoduchou (tj. nikoli složenou) funkci.

4. Funkce nemusí být v nějakém bodě spojitá i když v něm má derivace ve všech směrech.



Ukažte, že tento případ nastane u funkce s hodnotami $xy/(x^2 + y^2)$ mimo počátek a s hodnotou 0 v počátku.

5. Obvyklým příkladem na nezáměnnost parciálních derivací 2.řádu je funkce s hodnotou xy jakmile $0 \le y \le x$ nebo $x \le y \le 0$ a s hodnotou 0 ve všech ostatních bodech roviny. Ověřte.

Ověřte si to někde beze svědků.

Tato funkce má v (0,0) derivace ve všech směrech.

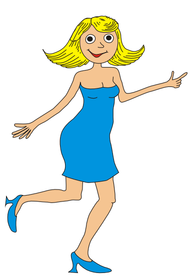
Na diagonálách však není spojitá (kromě počátku).

Vhodnou definicí (místo xy) lze nalézt spojitou funkci s nezáměnnými derivacemi.

6. Funkce mající hodnotu 0 v počátku a hodnoty $x^2y/(x^4+y^2)$ jinde, byla použita jako příklad na nespojitost v počátku, přestože existují stejné limity, blížíte-li se po přímkách.

Tato funkce má derivace v počátku ve všech směrech.

7. Funkce $\sqrt{|x||y|}$ je spojitá a má v počátku parciální derivace 1.řádu, ale nemá tam jiné směrové derivace.



Zkoumejte chování na osách kvadrantů.

Jsou to absolutní nezbedy.

Konec příkladů 1.

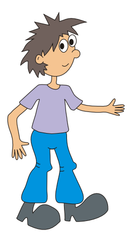
Otázky 1:

1. Kde musí být minimálně definována funkce f, aby formálně měla smysl definice f_{xy}?

2. Ukažte, že získáte ekvivalentní pojem diferenciálu, jestliže v jeho definici zaměníte $|(h,k)|\varphi(h,k)$ výrazem $h\psi(h,k)+k\tau(h,k)$.

3. Ověřte následující vzorečky pro parciální derivace 2.řádu složené funkce $f(x,y)$ kde $x=g(u,v), y=h(u,v)$ a derivace jsou záměnné:

$$\begin{aligned}
f_{uu} &= f_{xx}g_u^2+2f_{xy}g_uh_u+f_{yy}h_u^2+f_xg_{uu}+f_yh_(uu)\,,\\
f_{uv} &= f_{xx}g_ug_v+f_{xy}(g_uh_v+g_vh_u)+f_{yy}h_uh_v+f_xg_{uv}+f_yh_(uv)\,,\\
f_{vv} &= f_{xx}g_v^2+2f_{xy}g_vh_v+f_{yy}h_v^2+f_xg_{vv}+f_yh_(vv)\,.
\end{aligned}$$



To je teda hustý.

4. Uveďte Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=0$ pomocí polárních souřadnic $x=u\cos v, y=u\sin v$. (Výsledkem je $f_{uu}+f_{vv}/u^2+f_u/r=0$.)

Neznám nikoho, kdo to dá napoprvé.

BTW. Neznám nikoho, kdo to dá napodruhé.

5. Ukažte, že má-li f v bodě (x_0, y_0) diferenciál, jdou s jeho pomocí spočítat směrové derivace.

Mám dobrou radu: Napřed si nachystejte ten vzoreček.

Konec otázek 1.

Cvičení 1: Příklad. Spočtěte v bodě $(a, 1)$ parciální derivaci f_x pro funkci

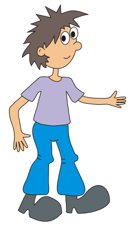
$$f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}} \, .$$

Řešení. Musíme uvažovat pouze nezáporná a.
Navíc díky funci arkussinus musí být $a \leq 1$.
V bodě $a = 1$ nebo $a = 0$ půjde o jednostrannou derivaci.
Přímým výpočtem dostaneme

$$f_x(x, y) = 1 + 1/2 \; (y - 1) \, \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}} y^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{y}}} \, .$$

Pro $a \in (0, 1)$ půjde o jednostranné derivace, spočteme je pomocí věty o jednostranné derivaci jako limity derivací.

Teď vážně. Funkce je na řezu $y = 1$ rovna x, tedy parciální derivace podle x je rovna 1. Sorry.



Příště si budu dávat pozor.

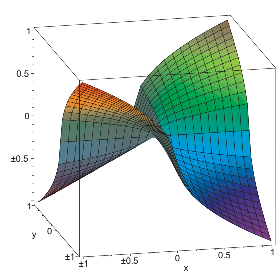
Příklad. Spočtěte $f_x(0,0)$ a $f_y(0,0)$ pro funkci

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy}\,.$$

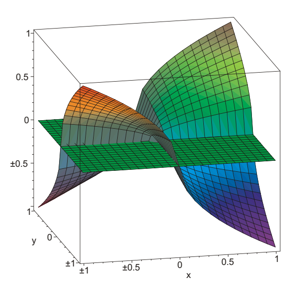
Řešení. Na osách jde o nulovou funkci.

Tedy jsou v počátku nulové i parciální derivace podle obou proměnných.

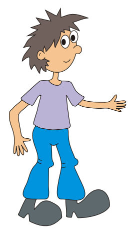
Podíváme se na graf:



Ještě jednou s kandidátem na tečnou rovinu.



Na ose prvního kvadrantu xy je funkce rovna $\sqrt[3]{x^2}$, tedy o dotyku není ani řeči.



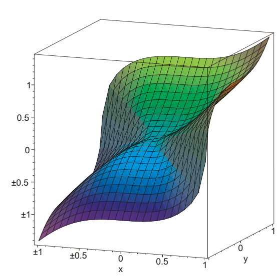
Ta plachta je tím větrem moc zvednutá. Je to tak.

Příklad. Spočtěte $f_x(0,0)$ a $f_y(0,0)$ pro funkci

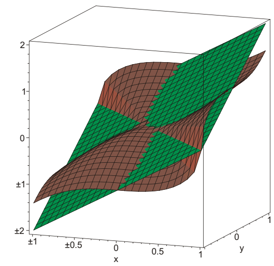
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}\,.$$

Řešení. Na osách jde o lineární funkci a parciální derivace jsou obě jedničky.

Podíváme se na graf:



Ještě jednou s kandidátem na tečnou rovinu.



Příklad. Zkoumejte v okolí počátku

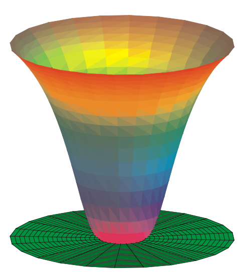
$$e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Řešení. V polárních souřadnicích se jedná o funkci

$$e^{-\frac{1}{r^2}}.$$

Jde tedy v podstatě o funkci jedné proměnné v rovině xz, která rotuje okolo osy z.

Jde o pěkný pohárek (podstava je tečná rovina):



Příklad. Ověřte záměnnost $f_{xy} = f_{yx}$ pro funkce

$$x^{y^2}.$$

Řešení.

U tohoto příkladu se zapotíme :-)

f_x je

$$\frac{x^{y^2} y^2}{x}$$

f_{xy} je

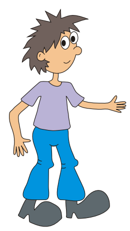
$$2\,\frac{x^{y^2} y^3 \ln(x)}{x} + 2\,\frac{x^{y^2} y}{x}$$

f_y je

$$2\,x^{y^2} y \ln(x)$$

f_{yx} je

$$2\,\frac{x^{y^2} y^3 \ln(x)}{x} + 2\,\frac{x^{y^2} y}{x}$$



Je to prostinké. Díky :-(

Těžko na cvičišti, lehko u písemky.

Příklad. Dokažte, že je-li funkce $f(x, y)$ spojitá v $\mathbb{R}$ pro každé pevné $y \in \mathbb{R}$ a f_y je omezená v $\mathbb{R}^2$, pak je f spojitá v $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Odhadujeme pomocí trojúhelníhové nerovnosti

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|\,.$$

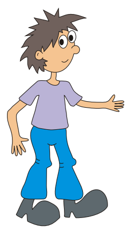
První člen na pravé straně odhadneme pomocí Lagrangeovy věty

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq |f_y(x, \xi)| \cdot |y - y_0| \leq K \cdot |y - y_0)|\,.$$

Tedy na malém okolí je tento výraz malý.

Druhý člen je na malém okolí bodu (x_0, y_0) malý.

Teď si vezmene ε a δ a důkaz dokončíme.



Teď si vezmu ε a δ a důkaz dokončím.

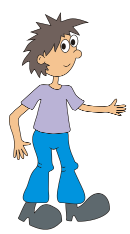
Příklad. Spočtěte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

pro funkci

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} .$$

Řešení.



Nebýt těch zlomků a odmocnin, šel bych do toho.

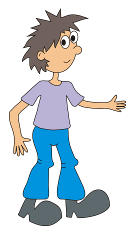
Ukáže se, že jsme našli jiné pojmenování nuly. O.K.

Tedy uvedená funkce řeší Laplaceovu rovnici.

Příklad. Spočtěte derivaci libovolné funkce v libovolném směru.

Řešení. Například derivace $f(x, y) = x + 2y$ ve směru $v = (3, 4)$ je rovna

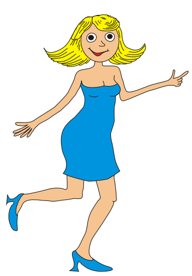
$$1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} \,.$$



Ty konstanty se zdají v pořádku, až na tu pětku :-(

Konec cvičení 1.

Z mnoha příkladů implicitně zadaných křivek víte, že často (skoro vždy) je možné takovou křivku považovat za graf funkce na nějakých jejích částech, např. u kružnice.



Kdy tomu tak je, vysvětluje následující tvrzení:

VĚTA. Nechť funkce f dvou proměnných je definována v okolí bodu (x_0, y_0) a platí:

- $f(x_0, y_0) = 0$,
- f má v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace až do řádu $n \geq 1$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje interval $U = I \times J$ okolo bodu (x_0, y_0) a jediná funkce φ definovaná na I tak, že

1. $\varphi(x_0) = y_0$,

2. $f(x, \varphi(x)) = 0$ pro všechna $x \in I$

3. φ má na I spojité derivace až do řádu n

4. derivace funkce φ je rovna

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} .$$

Důkaz. Nechť $I = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s]$ je interval, na kterém jsou splněny předpoklady věty a platí tam $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ (případ < 0 je obdobný). Funkce $f(x_0, y)$ je rostoucí na $[y_0 - s, y_0 + s]$ v bodě y_0 má hodnotu 0, takže $f(x_0, y_0 - s) < 0$ a $f(x_0, y_0 + s) > 0$. Protože f je spojitá na I, můžeme zmenšit r tak, že $f(x, y_0 - s) < 0$ a $f(x, y_0 + s) > 0$ pro každé $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Pro každé takové x musí tedy existovat jediné $y \in (y_0 - s, y_0 + s)$ tak, že $f(x, y) = 0$. Toto y se označí $\varphi(x)$.

Uvědomte si, že uvedený postup zaručuje spojitost φ na $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Zbývá dokázat tvrzení o derivaci funkce φ. Ze spojitosti f_x, f_y na I plyne existence diferenciálu funkce f. Příslušný vztah lze napsat ve tvaru

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = f_x(x, y)(x_1 - x) + f_y(x, y)(y_1 - y) + (x_1 - x)\psi(x_1 - x, y_1 - y) + (y_1 - y)\tau(x_1 - x, y_1 - y) ,$$

kde funkce ψ, τ mají limitu 0 v bodě (0,0). Nechť nyní $y_1 = \varphi(x_1), y = \varphi(x)$. Potom je levá stran rovnost rovna 0 a úpravou (pro $x \neq x_1$) se dostane

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} = -\frac{f_y(x, \varphi(x)) - \psi(x_1 - x, y_1 - y)}{f_x(x, \varphi(x)) - \tau(x_1 - x, y_1 - y)} .$$

Pravá strana má pro $x_1 \to x$ limitu $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$, a tedy existuje i limita levé strany, což je $\varphi'(x)$.

Odtud již plyne (indukcí) existence a spojitost derivace až do řádu n funkce φ.

$\diamond$

Kdo si promyslí větu o implicitních funkcích, tak si všimne, že jsme schopni v daném bodě spočítat derivaci neznámé funkce φ. To je přece kouzelné.

Například pro funkci $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ dostaneme $x^2 + \varphi^2(x) = 0$, což zčerstva zderivujeme. Pokud známe $x = 0$, $\varphi(0) = 1$, spočteme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1/2$. Tak derivujeme, kolikrát chceme.

Nebo musíme :-(

Zatímco implicitní funkce dvou proměnných se převede po částech na funkce jedné proměnné, implicitní funkce tří proměnných (tj. $f(x,y,z) = 0$) se převede na funkce dvou proměnných a tam se vyskytují parciální derivace. Proto je tento případ explicitně uveden (už bez důkazu):

VĚTA. Nechť funkce f tří proměnných je definována v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) a platí:

- $f(x_0, y_0, z_0) = 0$,
- f má v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) spojité parciální derivace až do řádu $n \geq 1$,
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak existuje interval $U = I \times J \times K$ okolo bodu (x_0, y_0, z_0) a jediná funkce φ definovaná na $I \times J$ tak, že

1. $\varphi(x_0, y_0) = z_0$,
2. $f(x, y, \varphi(x,y)) = 0$ pro všechna $(x,y) \in I \times J$
3. φ má na $I \times J$ spojité parciální derivace až do řádu n

4. parciální derivace funkce φ jsou rovny

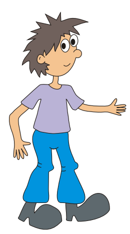
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}((x,y),\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}((x,y),\varphi(x,y))}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}((x,y),\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}((x,y),\varphi(x,y))}.$$

Poznámky 2:

Uvedené věty o implicitních funkcích se používají v případech, kdy ze zadání rovnice $f(x,y) = 0$ nebo $f(x,y,z) = 0$ nelze jednu proměnnou vypočítat pomocí zbývajících.

Přesto lze napsat derivace této závislosti jedné proměnné na zbývajících proměnných (i když v implicitním tvaru) a lze tedy např. zkoumat průběh funkce nebo najít její extrémy.

V tom je ta síla. Derivujeme neznámou funkci.



Rád objevuji Neznámé ...

Za předpokladů věty o implicitních funkcích lze derivace počítat formálně z rovnosti $f(x,y) = 0$ podle vzorce o složené funkci; y se považuje za funkci x a derivuje se funkce $f(x,y(x))$:

$$f_x(x,y) + f_y(x,y)y' = 0.$$

Teď se ukáže, kdo umí opravdu derivovat ...

Při druhé derivaci implicitně zadané funkce je možné buď derivovat vzorec pro první derivaci, nebo je možné derivovat dvakrát danou funkci dvou proměnných, tj. ještě jednou derivovat předchozí rovnost pro y' (viz *Příklady*).

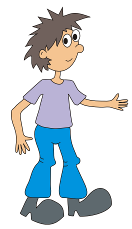
V bodech, kde je parciální derivace podle závisle proměnné rovna nule, nelze větu použít.

V okolí těchto bodů máme obvykle více možností, jak definovat jednoznačnou funkci, jejíž graf bude na křivce ležet.

Např. u kružnice to jsou body, kde je tečna rovnoběžná s osou y, na lemniskatě (osmička) to je střed, kde se protínají dvě části grafu.

V prvním případě lze zaměnit osy a v těchto bodech pak lze najít funkci $x = \psi(y)$, která v okolí daného bodu je jednoznačným řešením rovnice $f(x, y) = 0$ (protože parciální derivace podle x je nenulová).

Ve druhém případě to nejde (protože obě parciální derivace jsou v počátku rovny 0) a musí se volit jiné metody.

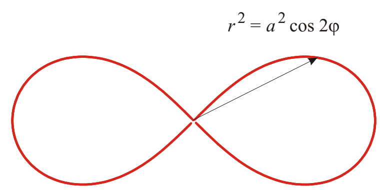


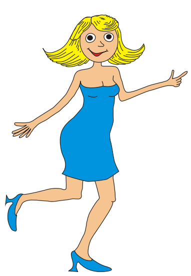
Nebo to prostě a jednoduše nejde.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Ověřte u lemniskaty $(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0$, že v bodech $(\pm a, 0)$ je parciální derivace podle y rovna 0 a parciální derivace podle x nenulová, kdežto v počátku jsou obě parciální derivace nulové.





Přesto se i v tomto speciálním případě dají obě větve křížící se v počátku popsat dvěma funkcemi mající spojité derivace (pomocí vyřešení dvou kvadratických rovnic).

2. Na pomoc lze v některých případech vzít parametrické vyjádření křivky $x = \varphi(t), y = \psi(t)$.

Je nutné najít intervaly pro parametr t, ve kterých je jedna z funkcí φ, ψ prostá.

Pak je $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ nebo $x = \varphi(\psi^{-1}(y))$.

Najděte takové otevřené intervaly pro lemniskatu danou rovnostmi

$$x = \frac{t(t^2+1)}{t^4+1}, \quad y = \frac{t(t^2-1)}{t^4+1}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Získané intervaly by měly pokrývat celé $\mathbb{R}$.

3. U funkcí tří proměnných $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \tau(u,v)$ (jedná-li se o plochu) je nutné umět na nějakých množinách jednoznačně vypočítat u, v např. z prvních dvou rovnic a dosadit do třetí rovnosti.

Najděte takové co největší množiny pro kulovou plochu danou rovnostmi

$$x = \sin u \cos v\,, \quad y = \sin u \sin v\,, \quad z = \cos u\,, \quad u \in [0,\pi], v \in [0, 2\pi]\,.$$

4. U implicitně zadané funkce $x - y^3 = 0$ je parciální derivace podle y rovna 0, ale přesto funkce φ existuje na celém $\mathbb{R}$.

Podmínka o nenulovosti parciální derivace ve větě o implicitních funkcích tedy není nutná, je pouze postačující.

5. Spočtěte parciální derivace 2.řádu pro kardioidu $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

6. Vypočtěte druhé derivace funkce $y(x)$ zadané implicitně rovnicí $x^4y^3 - xy^5 + x/y = 0$.

Konec příkladů 2.

Cvičení 2: Příklad. Rovinný mravenec se pohybuje po křivce

$$\varphi : t \to (2 + 3t, t^2 + 4)\,.$$

Jakou rychlostí se vzdaluje od počátku v $t = 1$?

Řešení. Vzdálenost bodu (x, y) od počátku označíme $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

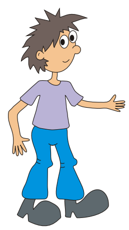
Zkoumáme tedy v bodě $t = 1$ výraz

$$\frac{df(\varphi(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\,.$$

Zde pro přehlednost používáme pomocné funkce $x(t) = 2 + 3t$ a $y(t) = t^2 + 4$, kterými popisujeme složky zobrazení φ.

Výpočet dává $\sqrt{50}/2$.

Vždy musíme posčítat všechny přírůstky závisející na t. Zde f závisela na x a y. Ty zase na t. Sčítá se vhodná kombinace těchto veličin.



Ani nechci přemýšlet, jak to nakreslit ;-)

Příklad. Spočtěte pomocí věty o implicitních funkcích v bodě $x = 1$ derivaci funkce $y = y(x)$ definované implicitním vztahem

$$y^2 - x = 0\ .$$

Řešení. Označíme $f(x, y) = y^2 - x$. V bodě $(x, y) = (1, 1)$ ověříme předpoklad $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \neq 0$.

Tedy na okolí U bodu $x = 1$ existuje funkce $y = \varphi(x)$ vyhovující $\varphi(1) = 1$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Budeme místo $y = \varphi(x)$ pát stručněji $y = y(x)$.

Hlavním nástrojem je rovnost $f(x, y(x)) = 0$ na U. V našem případě $y^2(x) - x = 0$.

Tyto rovnost můžeme do nekonečna derivovat a budeme zase dostávat rovnosti.

Po prvním derivováním dostaneme

$$2y(x)y'(x) - 1 = 0\ .$$

Po dosazení $x = 1$ a $y(1) = 1$ do rovnice dostaneme $y'(1) = 1/2$.

Podobně jde derivovat dál (i v jiných bodech) a zjistit například konkávitu zkoumané funkce.

Všimněme si, že v bodě $(0,0)$ nešla věta použít pro nesplnění předpokladu o $f_y \neq 0$. Nicméně v okolí bodu $x = 0$ funkce $y = y(x)$ existuje. Naopak pro $f(x,y) = y^2 - x$ taková funkce neexistuje.

Příklad. Zjistěte pomocí věty o implicitních funkcích, zda bod $(0,0)$ je kritickým bodem pro funkci $z = z(x,y)$ zadané implicitním vztahem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\ .$$

Řešení. Položíme $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Bod $(0,0,1)$ je nulovým bodem funkce f.

Navíc $f_z = 2z$, Tedy $f_z(0,0,1) = 2 \neq 0$. Tedy díky spojitosti všech potřebných derivací existuje na okolí U bodu $(0,0)$ funkce $z = z(x,y)$ vyhovující na U vztahu

$$f(x,y,z(x,y)) = 0\ .$$

Tedy v dané situaci na U platí

$$x^2 + y^2 + z^2(x,y) = 0\ .$$

To je ta slavná identita.

Budeme tuto identitu derivovat podle x a y.

Dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} 2x + 0 + 2z(x,y) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= 0 \\ 0 + 2y + 2z(x,y) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= 0\,. \end{aligned}$$

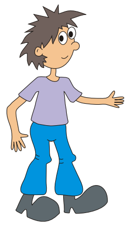
Tedy v bodě $x = 0$, $y = 0$ a $z(0,0) = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= 0\,. \end{aligned}$$

Tedy se jedná o kritický bod.

To bylo jednoduché. A je to tak vždy.

Další derivace vyšších řádů dostaneme opět derivováním dvou získaných identit. Se znalostí bodu (x,y), jeho funkční hodnoty, parciálních derivací prvního řádu spočítáme parciální derivace druhého řádu. A tak dál.



Taky bych šel radši dál . . .

Příklad. Zjistěte v okolí bodu $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ derivace z_x a y_x řešení $z = z(x)$, $y = y(x)$ soustavy dvou rovnic s parametrem x:

$$\begin{aligned} x + y + zx &= 3 \\ x - xy + z &= 1\,. \end{aligned}$$

Řešení. Spočteme

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x+y+zx-3)}{\partial y} & \frac{\partial(x+y+zx-3)}{\partial z} \\ \frac{\partial(x-xy+z-1)}{\partial y} & \frac{\partial(x-xy+z-1)}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Tedy

$$J = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 1 + x^2 \neq 0\,.$$

Použijeme větu o implicitních funkcích a dostaneme okolí U bodu $x = 1$ na kterém jeou definovány funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$.

Dosadíme dvě identity na U:

$$\begin{aligned} x + y(x) + z(x)x &= 3 \\ x - xy(x) + z(x) &= 1\,. \end{aligned}$$

Zderivujeme identity podle x

$$\begin{aligned} 1 + y_x(x) + z_x(x)x + z(x) &= 0 \\ 1 - y(x) - xy_x(x) + z_x(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 1$, $y(1) = 1$ a $z(1) = 1$ a ze soustavy dvou rovnic spočítáme $y_x(1)$ a $z_x(1)$.
Spočteme $y_x(1) = -1$ a $z_x(1) = -1$.

BTW řešení je možno spočítat:

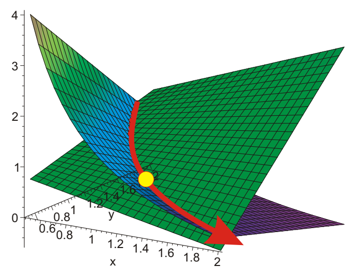
$$\left\{z = -\frac{-2\,x + x^2 - 1}{x^2 + 1}, y = \frac{-2\,x + x^2 + 3}{x^2 + 1}\right\}$$

Z toho jdou ty derivace ověřit.

Vlastně to bylo tak. První rovnice určila jednu plochu, druhá rovnice druhou plochu a tyto plochy se protínaly ve křivce:

$$x \mapsto (x, y(x, z(x)) = \left(x, \frac{-2\,x + x^2 + 3}{x^2 + 1}, -\frac{-2\,x + x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

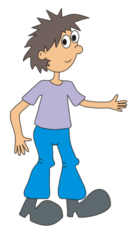
Podíváme se na obrázek



Je docela sympatické, že $y_x(1) < 0$ i $z_x(1) < 0$. Tedy zkoumaná křivka se přibližuje ose x.

Podobně bychom řešili soustavu n rovnic o m neznámých a $n - m$ parametrech.

Každou identitu bychom derivovali podle všech parametrů. Získáme $n(n-m)$ rovnic, z nichž vyřešíme všechny parciální derivace pro n neznámých podle $n-m$ parametrů.



Prosil bych o pozornost. Umím jenom kvadratické rovnice.

Příklad. Plochy $z(x,y)=0$ a $z(x,y)=y(y^2-x)$ se v okolí počátku protínají v trojzubci. Jaký má tento trojzubec vztah k větě o implicitních funkcích?

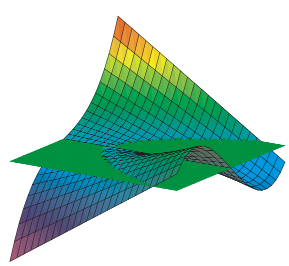
Řešení. Plochy se protínají na ose x a parabole $y^2-x=0$.

Počátek je bodem, v jehož zádném okolí U není možné určit jednu funkci $y=y(x)$, jejíž graf by v U pokryl všechny společné body obou zadaných ploch.

V jeho okolí nejde použít věta o implicitních funkcích. Opravdu

$$\frac{\partial(x(y^2-x))}{\partial y}(0,0)=0\,.$$

Obrázek obou ploch:



Tedy se ani nedivím.

Podobná situace nastává u kružnice na levém a pravém kraji, protože tam nejde kružnici lokálně pokrýt jedním grafem.

Neplačte lidičkové. Často jde trochu otočit souřadnicové osy a najednou to půjde.

Směr os nemá zpravidla fyzikální smysl, kdežto samotný problém zpravidla ano.

Konec cvičení 2.

Existuje ještě jedno důležité použití diferenciálů, a to je obdoba Taylorových polynomů a příslušných aproximací:

VĚTA. Má-li f spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ v intervalu I okolo bodu (a,b), pak pro $(x,y) \in I$ platí

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f_s^{(j)}(a,b)}{j!} |(x,y)-(a,b)|^j \\
&= + \frac{f_s^{(n+1)}(c,d)}{(n+1)!} |(x,y)-(a,b)|^{n+1}
\end{aligned}
$$

kde $f_s^{(j)}$ je j-tá derivace f ve směru $(x,y)-(a,b)$ a (c,d) je bod ležící na úsečce mezi body (a,b) a (x,y).

Důkaz. Důkaz snadno vyplyne z Taylorovy věty pro jednu proměnnou. Stačí zvolit

$$g(t) = f(a+t(x-a), b+t(y-a))\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

a funkci g rozvinout v bodě $t=0$ do bodu $t=1$ podle Taylorovy věty. $\diamond$

Stejně jako u funkcí jedné proměnné se polynom na pravé straně nazývá Taylorův polynom funkce f v bodě (a,b) řádu nejvýše n, a poslední člen na pravé straně se nazývá zbytek.

Vzorec z Taylorovy věty lze psát v následujícím tvaru:

$$f(a+h,b+k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^j f(a,b)}{j!} + \\ + \frac{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(c,d)}{(n+1)!}\,,$$

kde

$$(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^j f(a,b) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} h^i k^{j-i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a,b)\,.$$

Ještě jedna možnost zápisu pomocí diferenciálu:

$$f(a+h,b+k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(hde^j f(a,b)}{j!} + \frac{(hde^{n+1} f(c,d)}{(n+1)!}\,,$$

kde d je diferenciál proměnných h,k.

Speciálním případem Taylorovy věty (pro $n=0$) je věta o střední hodnotě pro funkce více proměnných.

VĚTA. Nechť f má spojité parciální derivace prvního řádu v intervalu I okolo bodu (a,b). Pak pro $(x,y) \in I$ existuje bod (c,d) ležící mezi body (a,b) a (x,y) takový, že

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(c,d)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(c,d)\cdot(y-b)\,.$$

Hlavním nástrojem při zkoumání funkcí více proměnných je rozum.

Cvičení 2-5: Příklad. Zkontrolujte použití Taylorovy věty na funkce více proměnných.

Řešení. Dostaneme podle obecného vzorečku

$$T(f(x,y),x=a,y=b,n)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f_s^{(j)}(a,b)}{j!}|(x,y)-(a,b)|^j\ .$$

V konkrétních příkladech dostaneme například

$$T\left(\sin\left(x^2+y^2\right),[x=0,y=0],6\right)=x^2+y^2-1/6\,x^6-1/2\,y^2x^4-1/2\,y^4x^2-1/6\,y^6$$

$$T\left(2\,x^2-xy-y^2-6\,x-3\,y+5,[x=1,y=-2],1\right)=5$$

$$T\left(2\,x^2-xy-y^2-6\,x-3\,y+5,[x=1,y=-2],2\right)=$$
$$=5-(y+2)^2-(x-1)\,(y+2)+2\,(x-1)^2$$

$$T\left(x^3+y^3+z^3-3\,xyz,[x=1,y=1,z=1],1\right)=0$$

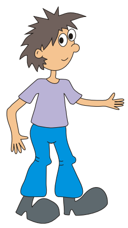
$$T\left(x^3+y^3+z^3-3\,xyz,[x=1,y=1,z=1],2\right)=$$
$$=3\,(x-1)^2-3\,(x-1)\,(y-1)-3\,(z-1)\,(x-1)+$$
$$+3\,(y-1)^2+3\,(z-1)^2-3\,(y-1)\,(z-1)$$

$$T\left(x^y,[x=1,y=1],2\right)=x+(x-1)\,(y-1)$$

$$T\left(x^y,[x=1,y=1],3\right)=x+(x-1)\,(y-1)+1/2\,(y-1)\,(x-1)^2$$

$$T\left(e^x\cos(y)\,,[x=0,y=0],2\right)=1+x-1/2\,y^2+1/2\,x^2$$

$$T\left(e^x\cos(y)\,,[x=0,y=0],4\right)=$$
$$=1+x-1/2\,y^2+1/2\,x^2-1/2\,xy^2+1/6\,x^3+$$
$$+1/24\,x^4+1/24\,y^4-1/4\,x^2y^2$$



Jak se dalo čekat, ale počítat bych to zadarmo nechtěl.

Konec cvičení 2-5.

U funkcí jedné proměnné značí derivace geometricky směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě.

Totéž samozřejmě platí pro parciální derivace funkce více proměnných.

Tyto tečny určují nadrovinu tečnou ke grafu funkce – u funkce dvou proměnných se tedy jedná o tečnou rovinu k ploše.

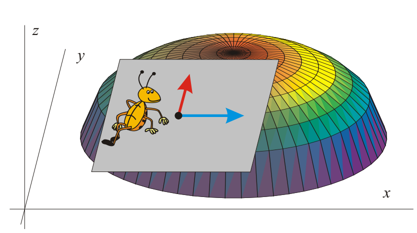
Tento geometrický význam má smysl jen za předpokladu spojitosti parciálních derivací:

Má-li f v bodě (x_0, y_0) spojité parciální derivace, lze rovinu danou rovnicí

$$(z - f(x_0, y_0)) = (x - x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

chápat jako tečnou rovinu grafu funkce f.

Tečná rovina je tedy dána bodem dotyku $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a vektory $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$, $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$. Tečny grafu f v libovolném směru leží v tečné rovině.



Vzorce pro tečny a tečné roviny křivek a ploch použít i pro křivky a plochy zadané implicitně nebo parametricky.

Pozor na to. Musíme se polehnout na správné návyky!

Dokažte jednotlivé dále uvedené vzorečky pro tečnou rovinu použitím právě uvedených vzorců pro derivace implicitních funkcí:

1. Tečna křivky zadané implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ je ve svém bodě (x_0, y_0), kde $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, dána vektorem $(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$ a její normála vektorem $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. Tato tečna má tedy rovnici

$$(x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) = 0\,.$$

Vyzkoušejte na kružnici a uvěříte.

2. Tečná rovina plochy zadané implicitně rovnicí $f(x, y, z){=}0$ je ve svém bodě (x_0, y_0, z_0), kde $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, dána vektory $(-\frac{\partial f}{\partial z}, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$, $(0, -\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y})$, její normála vektorem $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.
Tato tečná rovina má tedy rovnici

$$(x - x_0) f_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) f_z(x_0, y_0, z_0) = 0\,.$$

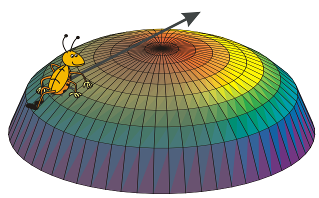
3. Tečna křivky zadané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \tau(t)$ je ve svém bodě (x_0, y_0, z_0), pro $t = t_0$, dána vektorem $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \tau'(t_0))$.

Vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$, popř. $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, je důležitý a má své vlastní označení:

DEFINICE. Gradient funkce $f(x_1, ..., x_n)$ v bodě $(a_1, ..., a_n)$ je vektor

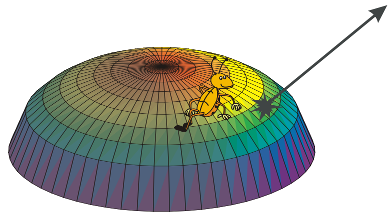
$$\mathrm{grad} f = (f_{x_1}(a_1, ..., a_n), ..., f_{x_n}(a_1, ..., a_n))\,.$$

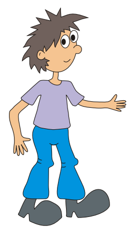
Jde o velice užitečný pojem, o čemž se ještě přesvědčíme.



Gradient je směr největšího růstu funkce. Podle něj leze i beruška.

Pro křivku $f(x, y) = 0$ nebo plochu $f(x, y, z) = 0$ je $\mathrm{grad} f$ směr normály v daném bodě.





Gradient někdy kouká tam, někdy jinam. Já se v tom nevyznám.

grad bez proměnné lze chápat jako operátor $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ a potom je $\operatorname{grad} f$ hodnotou operátoru v bodě f (nebo výsledek vynásobení vektoru grad skalárem f).

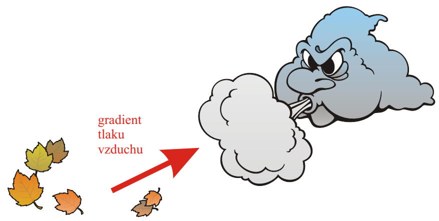
Parciální derivace funkce f ve směru (u, v) je v případě spojitých parciálních derivací tedy rovna skalárnímu součinu $\operatorname{grad} f \cdot (u, v)$.

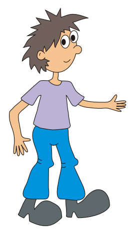
Operátor grad je lineární a na součinech se chová obdobně, jako derivace:

$$\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g\,, \quad \operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f\,.$$

Jde o formální výpočty. Jde o užitečná pravidla, ale hlavní výhoda je v uvolnění operátoru od funkce.

Pro funkci f popisující tlak vzduchu je její gradient směr, odkud fouká vítr.





A podle gradientu najdu kamna ;-)

Skalární součin $\mathrm{grad} \cdot \mathrm{grad}$ se značí jako $\triangle$, což je Laplaceův operátor:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Tento operátor popisuje například rozložení teploty v rovnovážném stavu.

Poznámky 3:

1 Tečny a tečné roviny.

Ve všech uvedených případech mají vhodný geometrický význam ty situace, kde příslušné parciální derivace jsou spojité (popř. existuje diferenciál).

Dalším omezením může být bod dotyku. Většinou to bývá vnitřní bod definičního oboru. Na hranici nemusí být geometrická interpretace vhodná.

Je uveden vzorec pro tečnu ke křivce v prostoru zadané parametricky. Zřejmě se dostane vzorec pro rovinnou křivku, když se vynechá třetí proměnná.

Jsou možné další případy definice křivek, např. jako průnik dvou ploch. I v těchto případech existují vzorce pro tečny, které jsou však trochu složitější. Najdou se v učebnicích diferenciální geometrie.

2 Gradient.

Musí se dávat pozor na rozdílné geometrické významy gradientu u funkce více proměnných $z = f(x, y)$ a implicitně zadané funkce $f(x, y) = 0$.

V prvním případě se jedná o směr největšího růstu nebo spádu plochy, ve druhém o směr normály k ploše.

Gradient se také někdy značí symbolem ∇ (čti nabla).

Pak $\nabla \cdot \nabla = \triangle$.

Na techto hračičkách je cosi půvabného.

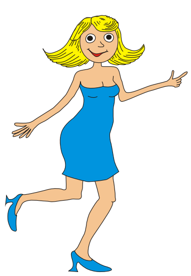
Existuje význačná třída tzv. harmonických funkcí, což jsou funkce $f(x, y)$, pro které je $\triangle f = 0$ v každém bodě jejich definičního oboru. Používají se v teorii potenciálu.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Ukažte na příkladě, že se tečná rovina u křivé plochy může s plochou protínat např. v několika přímkách (v okolí tečného bodu).

2. Pro funkci $z = x^2 + y^2$ se má najít v bodě $(1, 1)$ směr největšího růstu. Vypočte se gradient $(2x, 2y)$, který má v daném bodě hodnotu $(2, 2)$, takže směr největšího růstu je $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.



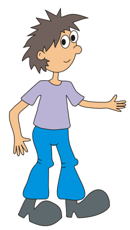
Dává to mimo toho směru i smysl?

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

1. Odůvodněte, že $\mathrm{grad} f$ ukazuje směr největšího růstu funkce f.

Použijte toho, že skalární součin dvou vektorů má největší nebo nejmenší hodnotu pro lineárně závislé vektory.



Fíha.

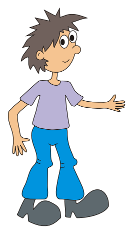
2. Leží-li křivka C popsaná parametricky ($x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \tau(t)$) v ploše $f(x, y, z) = 0$, je $f(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)) = 0$ pro všechna přípustná t a tedy i derivace této funkce jediné proměnné je 0.
Výpočtem této derivace ukažte, že vektor $\mathrm{grad} f$ je kolmý na plochu $f(x, y, z) = 0$.

U funkcí více proměnných si musíme zvyknout na řadu věcí.

Raději své zvyky změním. Bojím, bojím.

3. Každý graf funkce $z = f(x, y)$ je plocha popsaná implicitně výrazem $z - f(x, y) = 0$.
Použijte této interpretace k vyjádření normály grafu funkce $z = f(x, y)$.

A pak si to nějakou dobu pamatujte …



… až to už nepůjde zapomenout.

4. Nechť je plocha dána parametricky rovnostmi $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \tau(u, v)$ a (x_0, y_0, z_0) je bod ležící na této ploše (určený parametry u_0, v_0).

Tečná rovina v tomto bodě má pak rovnici, která je nejlépe popsána determinatem (derivace se berou v bodě (u_0, v_0)):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \varphi_u & \psi_u & \tau_u \\ \varphi_v & \psi_v & \tau_v \end{vmatrix}.$$

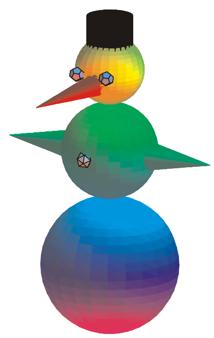
Ověřte tuto skutečnost na kulové ploše zadané parametricky (sférické souřadnice).

Nevím jak vy, ale já si myslím, že zde straší.

Ne, to jsou jenom dobrá kouzla. Klídek.

Konec otázek 3.

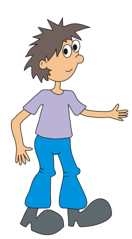
Cvičení 3: Příklad. Zkoumejte, v jakých bodech má figurka sněhuláka tečnou rovinu a jde pohladit.



Řešení. Popíšeme se jednotlivé části povrchu sněhuláka pomocí grafů funkcí dvou proměnných a můžeme zkoumat spojitost parciálních derivací.

Pokud bude potřeba, sněhuláka na chvilku položíme, abychom popsali všechny části jeho povrchu pomocí funkce dvou proměnných.

Moc se mi ho hladit nechce. Vypadá jako umělý.



Nejradši bych ho pohladil na špičce nosu, ale to se asi nesmí.

Konec cvičení 3.