PARCIÁLNÍ DERIVACE

Jak derivovat reálné funkce více proměnných, aby bylo možné tyto derivace použít podobně jako derivace funkcí jedné proměnné? Jestliže se okopíruje definice z jedné proměnné, dostane se pro bod P z $\mathbb{R}^n, n > 1$, a funkci f n proměnných limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P+h)-f(P)}{h}\,,$$

což má obecně smysl jen pro reálná čísla h. V čitateli lze h chápat jako n-tici, kde jsou samé 0 kromě jedné souřadnice rovné h. Takto definované operace se nazývají parciální derivace, protože používají vlastnosti funkce f jen částečně, jen v oné nenulové souřadnici.

DEFINICE. Parciální derivace funkce f podle první (druhé) proměnné v bodě (x_0, y_0) svého definičního oboru je derivace funkce jedné proměnné $f(x, y_0)$ (resp. $f(x_0, y)$) v bodě x_0 (resp. y_0).

Značí se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,, \text{ resp. } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

Občas se používá značení $f_x(x_0, y_0)$, resp. $f_y(x_0, y_0)$.

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ odpovídá obyčejné derivaci funkce jedné proměnné, kterou získáme pomocí řezu rovnoběžného s osou x a z:

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ odpovídá obyčejné derivaci funkce jedné proměnné, kterou získáme pomocí řezu rovnoběžného s osou y a z:

Pro existenci parciálních derivací v bodě (x_0, y_0) stačí, aby funkce byla definována na „kříži" se středem v (x_0, y_0), což samozřejmě není příliš vhodné pro studium vlastností funkce.

Protože se u parciálních derivací jedná o derivaci funkce jedné proměnné, platí pro aritmetické operace s parciálními derivacemi stejná tvrzení jako pro derivace funkcí jedné proměnné (platnost následujících rovností je stejná jako u jedné proměnné, tedy má-li smysl pravá strana):

VĚTA.

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot g - f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\,.$$

U funkcí jedné proměnné měla existence vlastní derivace v bodě za následek spojitost funkce v onom bodě. U funkcí více proměnné nestačí pro spojitost v bodě ani existence vlastních parciálních derivací v okolí onoho bodu (viz *Příklady*). Je nutné dodat další předpoklad:

VĚTA. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ omezené parciální derivace v okolí nějakého bodu, je v tomto bodě spojitá.

Derivace reálné funkce f jedné proměnné v bodě x_0 znamenala geometricky směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Příslušné rovnice tečen mají rovnice (psané vektorově), kde označíme $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (x_0,y_0,z_0) + u(1,0,f_x(x_0,y_0))\,, u\in\mathbb{R}\\ (x,y,z) &= (x_0,y_0,z_0) + v(0,1,f_y(x_0,y_0))\,, v\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Lineární kombinace vektorů na pravých stranách rovnic určuje rovinu

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Pokud by měla analogie s funkcemi jedné proměnné platit i pro tento případ dvou proměnných, uvedená rovina by měla být tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0, z_0). To znamená, že v nějakém okolí bodu (x_0, y_0, z_0) jsou body grafu blízko bodům roviny a čím blíže k (x_0, y_0, z_0), tím blíže jsou body grafu a roviny navzájem.

Takovýto vztah existoval, právě když existovala vlastní derivace $f'(x_0)$, a proto pro funkce jedné proměnné nemá velký smysl tento vztah speciálně pojmenovávat.

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + |(h,k)|\varphi(h,k)\,,$$

kde $\lim_{(h,k)\to 0} \varphi(h,k) = 0$.

Tuto důležitou situaci je vhodné formalizovat a zavést jako vhodný pojem:

DEFINICE. Diferenciál v bodě (x_0, y_0) funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že (pro body $(x+h, y+k)$ z nějakého okolí bodu (x_0, y_0))

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + D(h,k) + |(h,k)|\varphi(h,k)\,,$$

kde $\lim_{(h,k)\to 0} \varphi(h,k) = 0$.

Má-li f v bodě (x_0, y_0) diferenciál, říká se, že je diferencovatelná v tomto bodě.

Vztah parciálních derivací a diferenciálu poskytuje následující tvrzení.

VĚTA. Nechť $f(x,y)$ je je definována v okolí bodu (x_0, y_0).

1. Pokud má f v (x_0, y_0) diferenciál D, pak v tomto bodě existují parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ a lineární funkce D má tvar
$$D(h,k) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k\,.$$
2. Pokud má f v (x_0, y_0) spojité parciální derivace, má f v tomto bodě diferenciál.

Jednoduchým důsledkem existence diferenciálu je spojitost. Dokažte následující tvrzení.

VĚTA. Má-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě (x_0, y_0) diferenciál (speciálně, má-li v tomto bodě spojité parciální derivace), je v tomto bodě spojitá.

Dalším tvrzením, kde diferenciál pomůže, je parciální derivace složené funkce.

VĚTA. Nechť $f(x,y)$ má diferenciál v bodě (x_0, y_0), funkce $x = p(u,v), y = q(u,v)$ mají diferenciál v bodě (u_0, v_0) a $x_0 = p(u_0, v_0), y_0 = q(u_0, v_0)$.

Pak $F(u,v) = f(p(u,v), q(u,v))$ má diferenciál v bodě (u_0, v_0) a pro parciální derivace platí (vzorce jsou uvedeny bez bodů $(x_0, y_0), (u_0, v_0)$)

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial u}\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial v}\,.$$

Jestliže funkce p, q závisí jen na jedné proměnné, např. na u, píší se ve vzorci pro $F_u = F'$ místo p_u a q_u derivace p' a q', resp.

Místo zúžení funkce na přímky rovnoběžné s osami lze derivovat (jako funkce jedné proměnné) zúžení funkce na libovolnou přímku procházející daným bodem.

Směrem v rovině je míněn vektor v rovině o délce 1 (tj., bod na jednotkové kružnici).

DEFINICE. Nechť (u,v) je jednotkový vektor v rovině. Pak derivace ve směru (u,v) funkce f dvou proměnných v bodě (x_0, y_0) je derivace funkce $f(x_0 + t\cdot u, y_0 + t\cdot v)$ jedné proměnné t v bodě $t = 0$.

VĚTA. Má-li f v bodě (x_0, y_0) obě parciální derivace spojité, pak derivace f ve směru (u,v) v bodě (x_0, y_0) je rovna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot v\,.$$

Je-li α úhel, který svírá vektor (u, v) s osou x, pak derivace f ve směru (u, v) v bodě (x_0, y_0) je rovna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha \,.$$

Funkce nemusí být v nějakém bodě spojitá i když v něm má derivace ve všech směrech (viz *Příklady*).

Parciální derivace vyšších řádů se definují stejně, jako derivace vyšších řádů pro funkce jedné proměnné.

Např. $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x^2}$ značí druhou parciální derivaci podle x z parciální derivace podle y z parciální derivace funkce f podle x.

Tj., nejdříve derivujeme f podle x, pak výsledek podle y a pak výsledek dvakrát podle x.

V případě spojitých derivací na pořadí derivací nezáleží (viz následující tvrzení). Tj., v předchozím případě by bylo možně např. nejdříve derivovat podle y a pak třikrát podle x.

VĚTA. Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě (x_0, y_0), pak se v tomto bodě rovnají.

Má-li funkce více proměnných všechny parciální derivace v nějakém bodě až do řádu n spojité, pak u všech parciálních derivací v tomto bodě do řádu n nezáleží na pořadí derivování.

V *Otázkách* je návod na funkci, která nemá záměnné parciální derivace.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Cvičení 1

Z mnoha příkladů implicitně zadaných křivek víte, že často (skoro vždy) je možné takovou křivku považovat za graf funkce na nějakých jejích částech, např. u kružnice.

VĚTA. Nechť funkce f dvou proměnných je definována v okolí bodu (x_0, y_0) a platí:

- $f(x_0, y_0) = 0$,
- f má v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace až do řádu $n \geq 1$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje interval $U = I \times J$ okolo bodu (x_0, y_0) a jediná funkce φ definovaná na I tak, že

1. $\varphi(x_0) = y_0$,
2. $f(x, \varphi(x)) = 0$ pro všechna $x \in I$
3. φ má na I spojité derivace až do řádu n
4. derivace funkce φ je rovna
$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} \,.$$

Zatímco implicitní funkce dvou proměnných se převede po částech na funkce jedné proměnné, implicitní funkce tří proměnných (tj. $f(x, y, z) = 0$) se převede na funkce dvou proměnných a tam se vyskytují parciální derivace. Proto je tento případ explicitně uveden (už bez důkazu):

VĚTA. Nechť funkce f tří proměnných je definována v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) a platí:

- $f(x_0, y_0, z_0) = 0$,
- f má v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) spojité parciální derivace až do řádu $n \geq 1$,
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak existuje interval $U = I \times J \times K$ okolo bodu (x_0, y_0, z_0) a jediná funkce φ definovaná na $I \times J$ tak, že

1. $\varphi(x_0, y_0) = z_0$,
2. $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ pro všechna $(x, y) \in I \times J$
3. φ má na $I \times J$ spojité parciální derivace až do řádu n
4. parciální derivace funkce φ jsou rovny

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}((x, y), \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}((x, y), \varphi(x, y))}\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}((x, y), \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}((x, y), \varphi(x, y))}\,.$$

Poznámky 2 Příklady 2 Cvičení 2

Existuje ještě jedno důležité použití diferenciálů, a to je obdoba Taylorových polynomů a příslušných aproximací:

VĚTA. Má-li f spojité parciální derivace až do řádu $n + 1$ v intervalu I okolo bodu (a, b), pak pro $(x, y) \in I$ platí

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f_s^{(j)}(a, b)}{j!} |(x, y) - (a, b)|^j \\ &= +\frac{f_s^{(n+1)}(c, d)}{(n+1)!} |(x, y) - (a, b)|^{n+1} \end{aligned}$$

kde $f_s^{(j)}$ je j-tá derivace f ve směru $(x, y) - (a, b)$ a (c, d) je bod ležící na úsečce mezi body (a, b) a (x, y).

$$f(a + h, b + k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^j f(a, b)}{j!} + \\ + \frac{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(c, d)}{(n+1)!}\,,$$

kde

$$(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^j f(a, b) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} h^i k^{j-i} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a, b)\,.$$

Ještě jedna možnost zápisu pomocí diferenciálu:

$$f(a + h, b + k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(hde^j f(a, b)}{j!} + \frac{(hde^{n+1} f(c, d)}{(n+1)!}\,,$$

kde $\mathrm{d}$je diferenciál proměnných h, k.

VĚTA. Nechť f má spojité parciální derivace prvního řádu v intervalu I okolo bodu (a,b). Pak pro $(x,y) \in I$ existuje bod (c,d) ležící mezi body (a,b) a (x,y) takový, že

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(c,d) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(c,d) \cdot (y-b)\,.$$

Cvičení 2-5

U funkcí jedné proměnné značí derivace geometricky směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě.

Tyto tečny určují nadrovinu tečnou ke grafu funkce – u funkce dvou proměnných se tedy jedná o tečnou rovinu k ploše.

Má-li f v bodě (x_0,y_0) spojité parciální derivace, lze rovinu danou rovnicí

$$(z - f(x_0,y_0)) = (x-x_0)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

chápat jako tečnou rovinu grafu funkce f.

Tečná rovina je tedy dána bodem dotyku $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ a vektory $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))$, $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))$. Tečny grafu f v libovolném směru leží v tečné rovině.

Vzorce pro tečny a tečné roviny křivek a ploch použít i pro křivky a plochy zadané implicitně nebo parametricky.

1. Tečna křivky zadané implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$ je ve svém bodě (x_0,y_0), kde $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, dána vektorem $(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$ a její normála vektorem $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. Tato tečna má tedy rovnici

$$(x-x_0)f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0) = 0\,.$$

2. Tečná rovina plochy zadané implicitně rovnicí $f(x,y,z)=0$ je ve svém bodě (x_0,y_0,z_0), kde $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, dána vektory $(-\frac{\partial f}{\partial z}, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$, $(0, -\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y})$, její normála vektorem $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.
Tato tečná rovina má tedy rovnici

$$(x-x_0)f_x(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)f_z(x_0,y_0,z_0) = 0\,.$$

3. Tečna křivky zadané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \tau(t)$ je ve svém bodě (x_0,y_0,z_0), pro $t = t_0$, dána vektorem $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \tau'(t_0))$.

DEFINICE. Gradient funkce $f(x_1, ..., x_n)$ v bodě $(a_1, ..., a_n)$ je vektor

$$\mathrm{grad} f = (f_{x_1}(a_1,...,a_n), ..., f_{x_n}(a_1,...,a_n))\,.$$

grad bez proměnné lze chápat jako operátor $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ a potom je $\mathrm{grad} f$ hodnotou operátoru v bodě f (nebo výsledek vynásobení vektoru grad skalárem f).

Parciální derivace funkce f ve směru (u,v) je v případě spojitých parciálních derivací tedy rovna skalárnímu součinu $\mathrm{grad} f \cdot (u,v)$.

Operátor grad je lineární a na součinech se chová obdobně, jako derivace:

$$\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad} f + \mathrm{grad} g\,, \quad \mathrm{grad}(fg) = f\,\mathrm{grad} g + g\,\mathrm{grad} f\,.$$

Skalární součin $\mathrm{grad} \cdot \mathrm{grad}$ se značí jako $\triangle$, což je Laplaceův operátor:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Poznámky 3   Příklady 3   Otázky 3

Cvičení 3