EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v C lokální extrém, jestliže má v C lokální maximum nebo lokální minimum.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v C lokální extrém, jestliže má v C lokální maximum nebo lokální minimum.

Absolutní maximum funkce f na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ je hodno ta $\max\{f(x,y); (x,y) \in A\}$. Podobně se definuje absolutní minimum, dohromady se nazývají absolutní extrémy.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v C lokální extrém, jestliže má v C lokální maximum nebo lokální minimum.

Absolutní maximum funkce f na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ je hodno ta $\max\{f(x,y);(x,y) \in A\}$. Podobně se definuje absolutní minimum, dohromady se nazývají absolutní extrémy.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v C lokální extrém, jestliže má v C lokální maximum nebo lokální minimum.

Absolutní maximum funkce f na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ je hodno ta $\max\{f(x,y); (x,y) \in A\}$. Podobně se definuje absolutní minimum, dohromady se nazývají absolutní extrémy.

Nahradí-li se v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší*), dostává se definice ostrých lokálních extrémů.

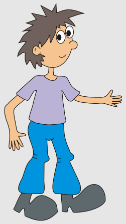
EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v C lokální extrém, jestliže má v C lokální maximum nebo lokální minimum.

Absolutní maximum funkce f na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ je hodno ta $\max\{f(x,y);(x,y) \in A\}$. Podobně se definuje absolutní minimum, dohromady se nazývají absolutní extrémy.

Nahradí-li se v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší*), dostává se definice ostrých lokálních extrémů.



Vrátil jsem se do mládí …

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;

2. ve vnitřním bodě A, ve kterém f nemá některou z parciálních derivací 1.ř.;

VĚTA. Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;

2. ve vnitřním bodě A, ve kterém f nemá některou z parciálních derivací 1.ř.;

3. ve vnitřním bodě A, kde má f všechny parciální derivace 1.ř. rovny 0.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;

2. ve vnitřním bodě A, ve kterém f nemá některou z parciálních derivací 1.ř.;

3. ve vnitřním bodě A, kde má f všechny parciální derivace 1.ř. rovny 0.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Funkce f definovaná na poloотevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;
2. ve vnitřním bodě A, ve kterém f nemá některou z parciálních derivací 1.ř.;
3. ve vnitřním bodě A, kde má f všechny parciální derivace 1.ř. rovny 0.

Jde o jednoduché odvozování pomocí výsledků pro funkce jedné proměnné (proveďte to).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

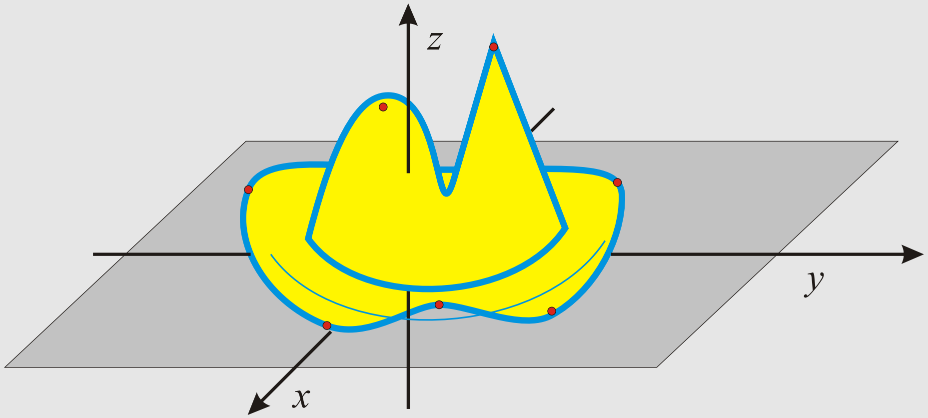
Body popsané v předchozí větě se nazývají kritické body (pro lokální extrémy).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Body popsané v předchozí větě se nazývají kritické body (pro lokální extrémy).

Na mém starém klobouku byly taky kritické body.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

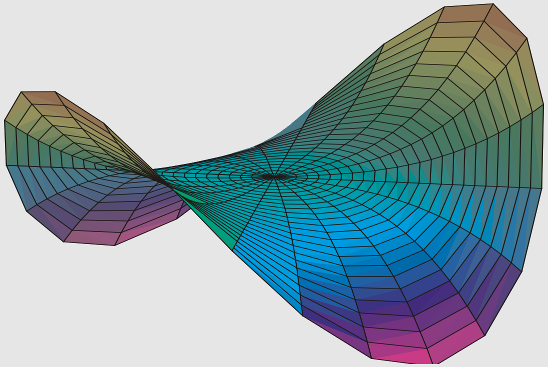
DŮSLEDEK. Nechť v otevřené množině G má funkce f všechny parciální derivace 1.ř. Má-li f v bodě $C \in G$ lokální extrém, anulují se v tomto bodě parciální derivace 1.ř. (tedy i směrové derivace).

DŮSLEDEK. Nechť v otevřené množině G má funkce f všechny parciální derivace 1.ř. Má-li f v bodě $C \in G$ lokální extrém, anulují se v tomto bodě parciální derivace 1.ř. (tedy i směrové derivace).

Stejně jako u funkcí jedné proměnné **OPAK NEPLATÍ!** Uveďte příklad.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Například moje staré sedlo.



LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

⬇

Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$, což je kvadratická forma proměnných h, k.

⬇

VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

⬇

Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$, což je kvadratická forma proměnných h, k.

⬇

Potom

1. Je-li F pozitivně definitní, nabývá f v P ostré lokální minimum.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$, což je kvadratická forma proměnných h, k.

Potom

1. Je-li F pozitivně definitní, nabývá f v P ostré lokální minimum.

2. Je-li F negativně definitní, nabývá f v P ostré lokální maximum.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$, což je kvadratická forma proměnných h, k.

Potom

1. Je-li F pozitivně definitní, nabývá f v P ostré lokální minimum.
2. Je-li F negativně definitní, nabývá f v P ostré lokální maximum.
3. Je-li F indefinitní, nenabývá f v P lokální extrém.

VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

⬇

Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$, což je kvadratická forma proměnných h, k.

⬇

Potom

1. Je-li F pozitivně definitní, nabývá f v P ostré lokální minimum.

   ⬇

2. Je-li F negativně definitní, nabývá f v P ostré lokální maximum.

   ⬇

3. Je-li F indefinitní, nenabývá f v P lokální extrém.

   ⬇

4. Je-li F semidefinitní, nelze o lokálním extrému f v P pomocí F rozhodnout.

Důkaz. Podmínky tvrzení umožňují napsat Taylorův vztah do řádu 2 pro bod Q blízko bodu P:

$$f(Q) = f(P) + \mathrm{d}f(P) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(T)\,,$$

kde bod T leží mezi body P a Q. První diferenciál $\mathrm{d}f(P)$ je roven 0. Nyní je důkaz již jasný. $\diamond$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

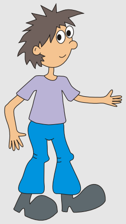
kde bod T leží mezi body P a Q. První diferenciál $\mathrm{d}f(P)$ je roven 0. Nyní je důkaz již jasný. ◇

Jde o kvadratickou aproximaci funkce. Tedy nahradíme funkci jakýmsi paraboloidem. Pokud je funkce větší než paraboloid procházející grafem funkce, jde o minimum.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

kde bod T leží mezi body P a Q. První diferenciál $\mathrm{d}f(P)$ je roven 0. Nyní je důkaz již jasný. $\diamond$

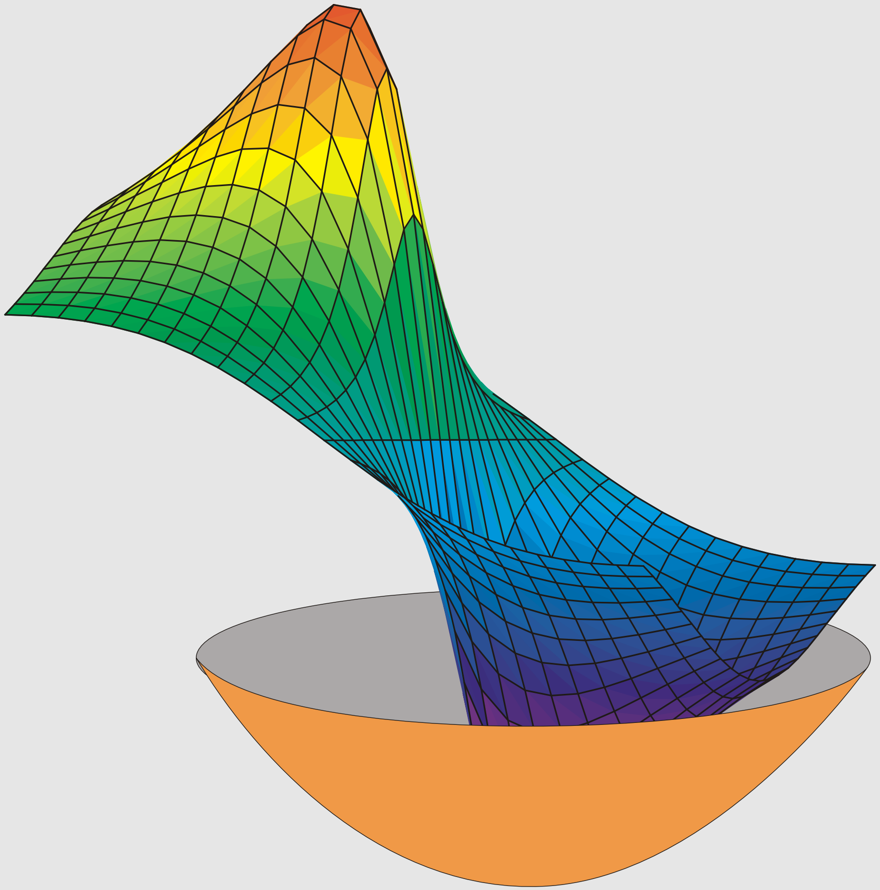
Jde o kvadratickou aproximaci funkce. Tedy nahradíme funkci jakýmsi paraboloidem. Pokud je funkce větší než paraboloid procházející grafem funkce, jde o minimum.



Teď to jenom spočítat ...

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocný paraboloid hlídající graf funkce zespodu ukazuje na lokální minimum:



LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

To, kam kouká kvadratická forma druhých parciálních derivací, poznáme podle uvedených testů.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

To, kam kouká kvadratická forma druhých parciálních derivací, poznáme podle uvedených testů.

U funkce $x^7 + y^6$ nic nepoznáme. Ten test je jenom kvadratický.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je známé z algebry a dokáže se snadno „úpravou na čtverec".

VĚTA. Kvadratická forma F z předchozí věty je

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je známé z algebry a dokáže se snadno „úpravou na čtverec".

VĚTA. Kvadratická forma F z předchozí věty je

1. pozitivně definitní právě když
   $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je známé z algebry a dokáže se snadno „úpravou na čtverec".

VĚTA. Kvadratická forma F z předchozí věty je

1. pozitivně definitní právě když
   $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;

2. negativně definitní právě když
   $f_{xx}(P) < 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je známé z algebry a dokáže se snadno „úpravou na čtverec".

VĚTA. Kvadratická forma F z předchozí věty je

1. pozitivně definitní právě když
   $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;

2. negativně definitní právě když
   $f_{xx}(P) < 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;

3. indefinitní právě když $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) < f_{xy}^2(P)$;

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující tvrzení je známé z algebry a dokáže se snadno „úpravou na čtverec".

VĚTA. Kvadratická forma F z předchozí věty je

1. pozitivně definitní právě když $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;

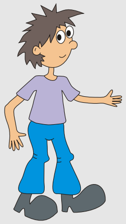
2. negativně definitní právě když $f_{xx}(P) < 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;

3. indefinitní právě když $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) < f_{xy}^2(P)$;

4. semidefinitní právě když $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) = f_{xy}^2(P)$;

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Takže nemusím přemýšlet. Pokud si tedy tohle budu pamatovat . . .

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Nechť má funkce $f(x, y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DŮSLEDEK. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

$\Downarrow$

Jestliže $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$, pak f má v bodě P ostrý lokální extrém (maximum pro $f_{xx}(P) < 0$, minimum pro $f_{xx}(P) > 0$).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

1.

Stejně jako u funkcí jedné proměnné lze do množiny kritických bodů přidat další body, aniž se tím poruší výsledné tvrzení.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 Absolutní extrémy.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 Absolutní extrémy.

Zřejmě je každý absolutní extrém i lokálním extrémem. Opak neplatí.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 Absolutní extrémy.

Zřejmě je každý absolutní extrém i lokálním extrémem. Opak neplatí.

Pro vyhledání absolutních extrémů spojité funkce na kompaktní množině stačí vzít hodnoty funkce ve všech kritických bodech a najít největší a nejmenší hodnotu. Dalšího ověřování není třeba, protože spojitá funkce na kompaktní množině má vždy oba absolutní extrémy.

2 Absolutní extrémy.

Zřejmě je každý absolutní extrém i lokálním extrémem. Opak neplatí.

Pro vyhledání absolutních extrémů spojité funkce na kompaktní množině stačí vzít hodnoty funkce ve všech kritických bodech a najít největší a nejmenší hodnotu. Dalšího ověřování není třeba, protože spojitá funkce na kompaktní množině má vždy oba absolutní extrémy.

Na nekompaktních množinách je třeba být opatrný. I když je nekompaktní množina uzavřená (obsahuje tedy svou hranici, ale není omezená), mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti jdoucí do nekonečna být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 Absolutní extrémy.

Zřejmě je každý absolutní extrém i lokálním extrémem. Opak neplatí.

Pro vyhledání absolutních extrémů spojité funkce na kompaktní množině stačí vzít hodnoty funkce ve všech kritických bodech a najít největší a nejmenší hodnotu. Dalšího ověřování není třeba, protože spojitá funkce na kompaktní množině má vždy oba absolutní extrémy.

Na nekompaktních množinách je třeba být opatrný. I když je nekompaktní množina uzavřená (obsahuje tedy svou hranici, ale není omezená), mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti jdoucí do nekonečna být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

Je-li množina, na které se hledá extrém, otevřená a omezená, je disjunktní se svou hranicí a opět mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti konvergující k bodu hranice být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

2 Absolutní extrémy.

Zřejmě je každý absolutní extrém i lokálním extrémem. Opak neplatí.

Pro vyhledání absolutních extrémů spojité funkce na kompaktní množině stačí vzít hodnoty funkce ve všech kritických bodech a najít největší a nejmenší hodnotu. Dalšího ověřování není třeba, protože spojitá funkce na kompaktní množině má vždy oba absolutní extrémy.

Na nekompaktních množinách je třeba být opatrný. I když je nekompaktní množina uzavřená (obsahuje tedy svou hranici, ale není omezená), mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti jdoucí do nekonečna být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

Je-li množina, na které se hledá extrém, otevřená a omezená, je disjunktní se svou hranicí a opět mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti konvergující k bodu hranice být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

Pokud se funkce dá spojitě rozšířit i na hranici, dostane se spojitá funkce na kompaktní množině, pokud je původní množina omezená. Pak lze použít postup uvedený výše ve druhém odstavci.

2 Absolutní extrémy.

Zřejmě je každý absolutní extrém i lokálním extrémem. Opak neplatí.

Pro vyhledání absolutních extrémů spojité funkce na kompaktní množině stačí vzít hodnoty funkce ve všech kritických bodech a najít největší a nejmenší hodnotu. Dalšího ověřování není třeba, protože spojitá funkce na kompaktní množině má vždy oba absolutní extrémy.

Na nekompaktních množinách je třeba být opatrný. I když je nekompaktní množina uzavřená (obsahuje tedy svou hranici, ale není omezená), mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti jdoucí do nekonečna být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

Je-li množina, na které se hledá extrém, otevřená a omezená, je disjunktní se svou hranicí a opět mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti konvergující k bodu hranice být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

Pokud se funkce dá spojitě rozšířit i na hranici, dostane se spojitá funkce na kompaktní množině, pokud je původní množina omezená. Pak lze použít postup uvedený výše ve druhém odstavci.

Pokud je množina, na které se hledají extrémy neomezená, je nutné uvažovat i limity

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

funkce na posloupnostech z dané množiny konvergující k nekonečnu.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3 Kvadratické formy.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3 Kvadratické formy.

Připomeňte si, že kvadratická forma $K(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ (matice (a_{ij}) je symetrická) se nazývá *pozitivně definitní* (nebo *negativně definitní*), jestliže pro jakoukoli volbu hodnot $x = (x_1, ..., x_n)$ různou od $(0, .., 0)$ je $K(x) > 0$ (nebo $K(x) < 0$, resp.).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3 Kvadratické formy.

Připomeňte si, že kvadratická forma $K(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ (matice (a_{ij}) je symetrická) se nazývá *pozitivně definitní* (nebo *negativně definitní*), jestliže pro jakoukoli volbu hodnot $x = (x_1, ..., x_n)$ různou od $(0, .., 0)$ je $K(x) > 0$ (nebo $K(x) < 0$, resp.).

Nazývá se indefinitní, jestliže nabývá jak záporných, tak kladných hodnot. Nazývá se semidefinitní, jestliže nabývá pouze nezáporných nebo pouze nekladných hodnot a hodnoty 0 v nějakém nenulovém bodě.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definitnost kvadratické formy lze zjistit převedením matice (a_{ij}) na diagonální tvar.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definitnost kvadratické formy lze zjistit převedením matice (a_{ij}) na diagonální tvar.

Jsou-li všechny prvky diagonály kladné (nebo záporné), je forma pozitivně (resp. negativně) definitní, obsahuje-li diagonála prvky záporné i kladné, je forma indefinitní a ve zbývajícím případě (diagonála obsahuje 0 a čísla stejného znaménka) je semidefinitní.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definitnost kvadratické formy lze zjistit převedením matice (a_{ij}) na diagonální tvar.

Jsou-li všechny prvky diagonály kladné (nebo záporné), je forma pozitivně (resp. negativně) definitní, obsahuje-li diagonála prvky záporné i kladné, je forma indefinitní a ve zbývajícím případě (diagonála obsahuje 0 a čísla stejného znaménka) je semidefinitní.

U kvadratické formy dvou proměnných je zjištění definitnosti zvláště jednoduché (viz *Otázky*).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Je-li kvadratická forma druhých parciálních derivací funkce f v nějakém bodě indefinitní, má f v tomto bodě tzv. sedlový bod.

4. Je-li kvadratická forma druhých parciálních derivací funkce f v nějakém bodě indefinitní, má f v tomto bodě tzv. sedlový bod.

Tento případ nemůže nastat u funkcí jedné proměnné.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Je-li kvadratická forma druhých parciálních derivací funkce f v nějakém bodě indefinitní, má f v tomto bodě tzv. sedlový bod.

Tento případ nemůže nastat u funkcí jedné proměnné.

Ostatní případy jsou u funkcí jedné proměnné obdobné: druhá derivace je buď kladná (minimum) nebo záporná (maximum) nebo nulová (nelze rozhodnout).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Stejně jako u funkcí jedné proměnné bývá někdy jednodušší rozhodovat o druhu extrému nikoli pomocí druhých derivací, ale úsudkem.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Stejně jako u funkcí jedné proměnné bývá někdy jednodušší rozhodovat o druhu extrému nikoli pomocí druhých derivací, ale úsudkem.

Bývá to v případech, kdy jsou druhé derivace komplikované.

Konec poznámek 1.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 - 6x - 6xy + 6y + 3y^2$ na $\mathbb{R}^2$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 - 6x - 6xy + 6y + 3y^2$ na $\mathbb{R}^2$.

Jsou dva kritické body $(0,-1), (2,1)$. V prvním je příslušná kvadratická forma indefinitní a ve druhém je pozitivně definitní. Absolutní extrémy nejsou.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

1. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 - 6x - 6xy + 6y + 3y^2$ na $\mathbb{R}^2$.

Jsou dva kritické body $(0, -1), (2, 1)$. V prvním je příslušná kvadratická forma indefinitní a ve druhém je pozitivně definitní. Absolutní extrémy nejsou.

Proveďte podrobnosti.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte absolutní extrémy funkce $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na otevřeném čtverci $(0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte absolutní extrémy funkce $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$ na otevřeném čtverci $(0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$.

Uvnitř čtverce je jeden kritický bod $(\pi/3, \pi/3)$ s hodnotou $3\sqrt{3}/2$. Snadno se zjistí dosazováním hranice ($y = 0, x = \pi/2, y = \pi/2, x = 0$), že hodnoty funkce na hranici jsou menší než $3\sqrt{3}/2$. V tomto bodě je tedy absolutní maximum, absolutní minimum neexistuje (proč?).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x, y); 0 < x < 3, 0 < y < 2x^2\}$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x,y); 0 < x < 3, 0 < y < 2x^2$.

Podobným postupem jako v předchozím příkladě zjistíte absolutní minimum v (1,1). Absolutní maximum neexistuje.

Konec příkladů 1.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Uveďte příklad funkce dvou proměnných, která má v nějakém bodě obě parciální derivace (spojité) nulové, ale nemá v onom bodě lokální extrém.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Uveďte příklad funkce dvou proměnných definované na vnitřku jednotkového kruhu, která nemá žádný lokální extrém.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Uveďte příklad funkce dvou proměnných definované na uzavřené množině (otevřená množina spolu s hranicí) která nemá žádný lokální extrém.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že kvadratická forma $ax^2+2bxy+cy^2$ je pozitivně (nebo negativně) definitní právě když $ac > b^2$ a $a > 0$ (resp. $a < 0$).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Ukažte, že kvadratická forma $ax^2+2bxy+cy^2$ je pozitivně (nebo negativně) definitní právě když $ac > b^2$ a $a > 0$ (resp. $a < 0$).

⬇

Je indefinitní právě když $ac < b^2$ a je semidefinitní právě když $ac = b^2$.

Konec otázek 1.

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x,y) = x^2+2xy-4x+8y$ na obdélníku $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x,y) = x^2+2xy-4x+8y$ na obdélníku $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

Řešení. Označme si zkoumaný obdélník K.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x, y) = x^2+2xy-4x+8y$ na obdélníku $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

⬇

Řešení. Označme si zkoumaný obdélník K.

⬇

Spočítáme parciální derivace a určíme, že jediný kritický bod funkce f neleží ve zkoumané množině K.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na obdélníku $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

⬇

Řešení. Označme si zkoumaný obdélník K.

⬇

Spočítáme parciální derivace a určíme, že jediný kritický bod funkce f neleží ve zkoumané množině K.

⬇

Tedy f jako spojitá funkce na kompaktní množině K nabývá na K absolutního minima a maxima na hranici K.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na obdélníku $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

⬇

Řešení. Označme si zkoumaný obdélník K.

⬇

Spočítáme parciální derivace a určíme, že jediný kritický bod funkce f neleží ve zkoumané množině K.

⬇

Tedy f jako spojitá funkce na kompaktní množině K nabývá na K absolutního minima a maxima na hranici K.

⬇

Tuto hranici budeme parametrizovat pomocí 4 křivek a budeme zkoumat extrémy funkce jedné proměnné na definičním oboru těchto křivek.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x, y) = x^2+2xy-4x+8y$ na obdélníku $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

⬇

Řešení. Označme si zkoumaný obdélník K.

⬇

Spočítáme parciální derivace a určíme, že jediný kritický bod funkce f neleží ve zkoumané množině K.

⬇

Tedy f jako spojitá funkce na kompaktní množině K nabývá na K absolutního minima a maxima na hranici K.

⬇

Tuto hranici budeme parametrizovat pomocí 4 křivek a budeme zkoumat extrémy funkce jedné proměnné na definičním oboru těchto křivek.

⬇

Například část hranice H_1 ležící v ose x jde parametrizovat

$$\varphi_1(t) = (t, 0)$$

na intervalu $[0, 1]$.

⬇

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x,y) = x^2+2xy-4x+8y$ na obdélníku $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Řešení. Označme si zkoumaný obdélník K.

Spočítáme parciální derivace a určíme, že jediný kritický bod funkce f neleží ve zkoumané množině K.

Tedy f jako spojitá funkce na kompaktní množině K nabývá na K absolutního minima a maxima na hranici K.

Tuto hranici budeme parametrizovat pomocí 4 křivek a budeme zkoumat extrémy funkce jedné proměnné na definičním oboru těchto křivek.

Například část hranice H_1 ležící v ose x jde parametrizovat

$$\varphi_1(t) = (t, 0)$$

na intervalu $[0, 1]$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy na intervalu $[0, 1]$ zkoumáme extrémy funkce

$$f(\varphi_1(t, 0) = t^2 - 4t \ .$$

Tedy na intervalu $[0, 1]$ zkoumáme extrémy funkce

$$f(\varphi_1(t, 0) = t^2 - 4t \ .$$

⬇

Minima na H_1 se nabývá v $(1, 0)$, maxima v $(0, 0)$.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy na intervalu $[0, 1]$ zkoumáme extrémy funkce

$$f(\varphi_1(t, 0) = t^2 - 4t \ .$$

Minima na H_1 se nabývá v $(1, 0)$, maxima v $(0, 0)$.

Podobně s dalšími úseky hranice K.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy na intervalu $[0,1]$ zkoumáme extrémy funkce

$$f(\varphi_1(t,0) = t^2 - 4t \ .$$

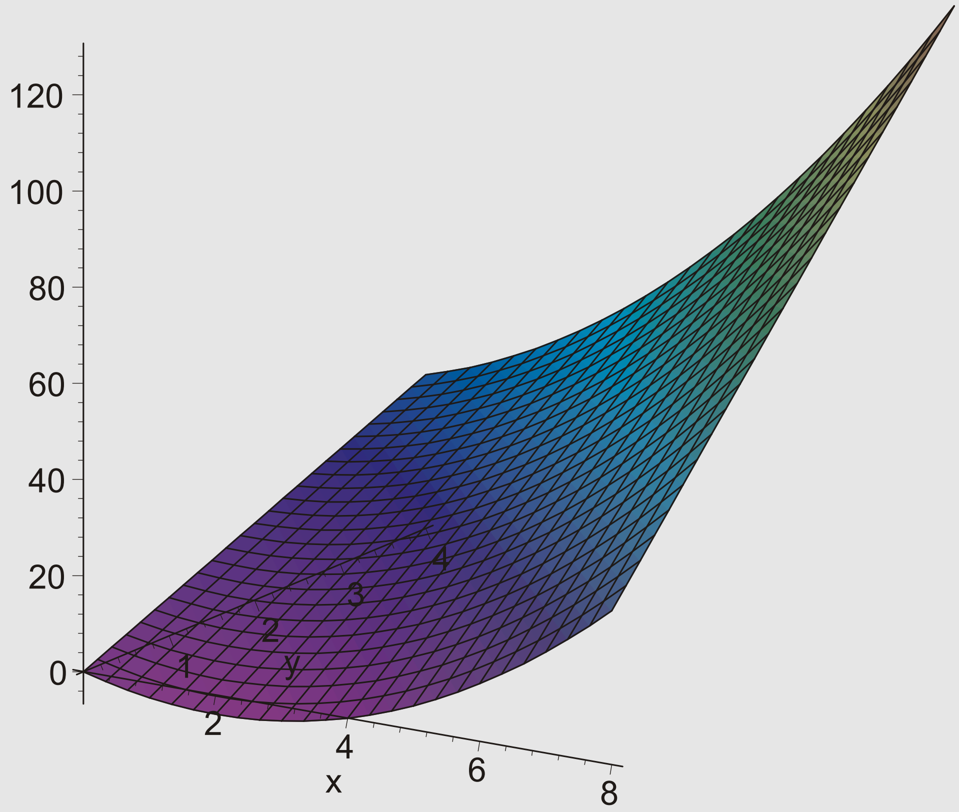
Minima na H_1 se nabývá v $(1,0)$, maxima v $(0,0)$.

Podobně s dalšími úseky hranice K.

Výsledek vznikne porovnáním hodnot v kandidátech na minimum a maximum.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obrázek grafu funkce

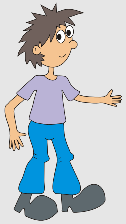


LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Všimněme si jednoduchého faktu, že ve funkci $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ máme pro pevné x na starost lineární funkci, pro pevné y kvadratickou a vždy otočenou nahoru.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Všimněme si jednoduchého faktu, že ve funkci $f(x,y) = x^2+2xy-4x+8y$ máme pro pevné x na starost lineární funkci, pro pevné y kvadratickou a vždy otočenou nahoru.



Tedy žádný bod roviny není bodem ostrého lokálního maxima. Aha.

Příklad. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^3$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Funkce $f(x,y) = x^2 + y^3$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

⇓

Řešení. Díky chování na ose y zde není lokální extrém.

⇓

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

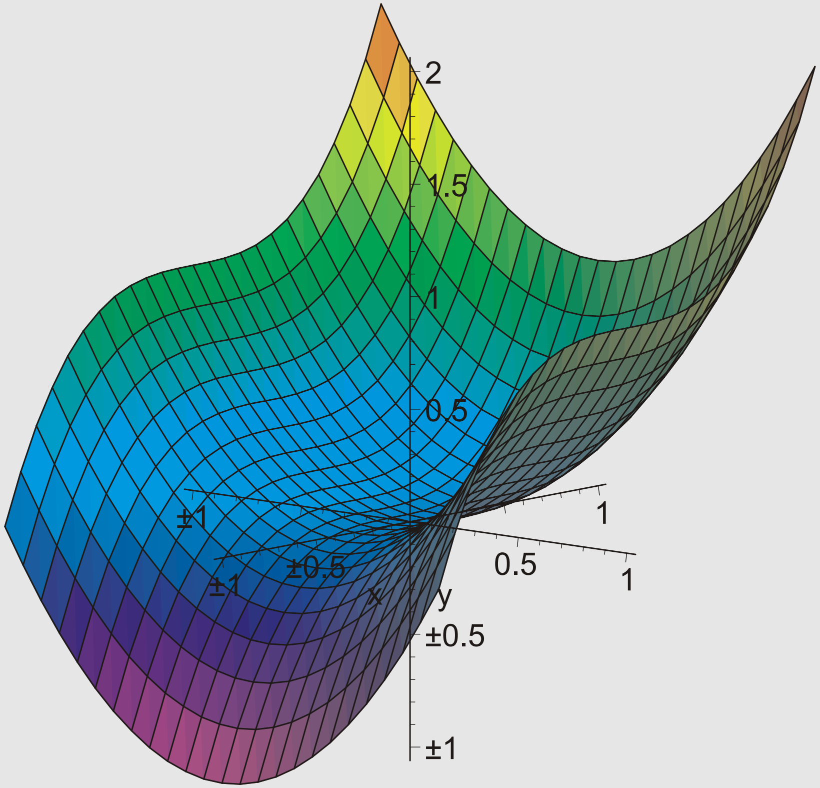
Příklad. Funkce $f(x,y) = x^2 + y^3$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

Řešení. Díky chování na ose y zde není lokální extrém.

Na kubické parabole y^3 stojí funkce x^2.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obrázek grafu funkce



LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

Řešení. Ověříme podmínku pozitivní definitnosti formy druhých parciálních derivací pomocí ověření podmínky $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$ pro $P = (0, 0)$.

Příklad. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

Řešení. Ověříme podmínku pozitivní definitnosti formy druhých parciálních derivací pomocí ověření podmínky $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$ pro $P = (0, 0)$.

V našem případě jde o vztah $2 > 0$ a $2 \cdot 2 > 0^2$, který platí.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

⬇

Řešení. Ověříme podmínku pozitivní definitnosti formy druhých parciálních derivací pomocí ověření podmínky $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$ pro $P = (0, 0)$.

⬇

V našem případě jde o vztah $2 > 0$ a $2 \cdot 2 > 0^2$, který platí.

⬇

V počátku má funkce ostré lokální maximum.

⬇

Příklad. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

⬇

Řešení. Ověříme podmínku pozitivní definitnosti formy druhých parciálních derivací pomocí ověření podmínky $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$ pro $P = (0, 0)$.

⬇

V našem případě jde o vztah $2 > 0$ a $2 \cdot 2 > 0^2$, který platí.

⬇

V počátku má funkce ostré lokální maximum.

⬇

Nezapomeňte, že se jedná o kvadratický test a že nedovede všechno.

⬇

Příklad. Funkce $f(x,y)=x^2+y^2$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

⬇

Řešení. Ověříme podmínku pozitivní definitnosti formy druhých parciálních derivací pomocí ověření podmínky $f_{xx}(P)>0$ a $f_{xx}(P)\cdot f_{yy}(P)>f_{xy}^2(P)$ pro $P=(0,0)$.

⬇

V našem případě jde o vztah $2>0$ a $2\cdot 2>0^2$, který platí.

⬇

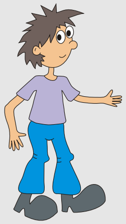
V počátku má funkce ostré lokální maximum.

⬇

Nezapomeňte, že se jedná o kvadratický test a že nedovede všechno.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Navíc jsem si všiml, že jde použít jenou ve vnitřních bodech. Smůla.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud najdeme na hranici množiny bod, v němž se vzhledem k hranici nabývá extrému, nemusí to znamenat extrém vůči množině.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud najdeme na hranici množiny bod, v němž se vzhledem k hranici nabývá extrému, nemusí to znamenat extrém vůči množině.

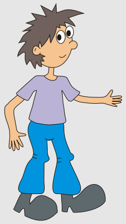
Například počátek je pro funkci $x^2 + \sin y$ docela dobrým kandidátem na ostré lokální naximum na polorovině $x \geq 0$, nicméně mu to ten sinus v libovolném okolí počátku bude škodolibě kazit.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud najdeme na hranici množiny bod, v němž se vzhledem k hranici nabývá extrému, nemusí to znamenat extrém vůči množině.

Například počátek je pro funkci $x^2 + \sin y$ docela dobrým kandidátem na ostré lokální naximum na polorovině $x \geq 0$, nicméně mu to ten sinus v libovolném okolí počátku bude škodolibě kazit.

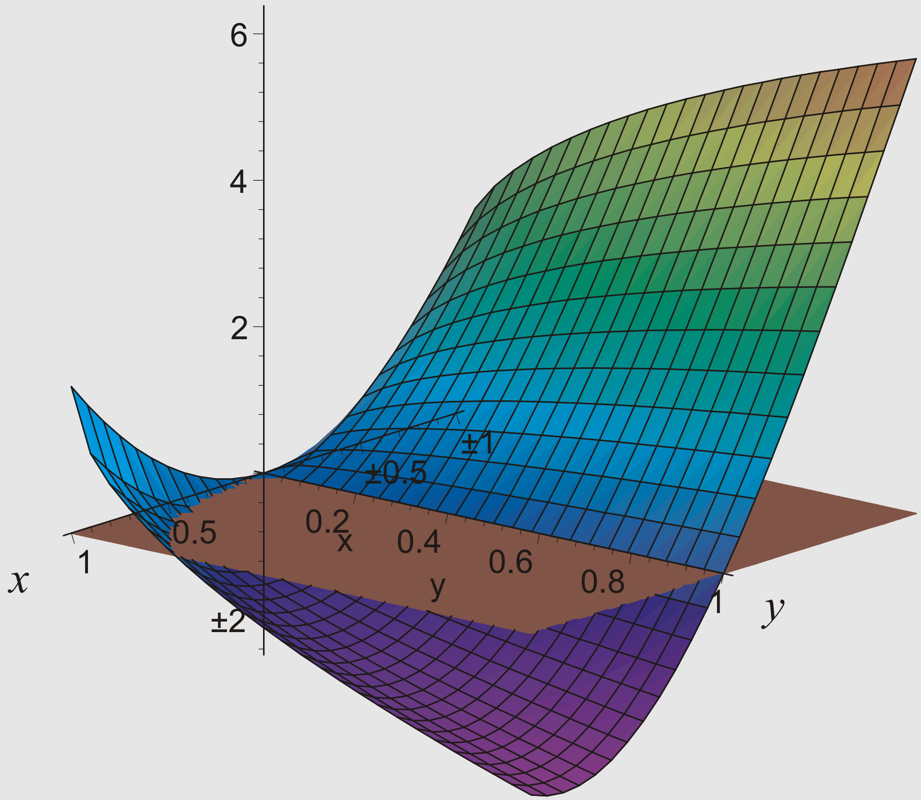
LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Na to se rád škodolibě podívám:

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obrázek grafu funkce

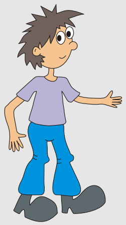


LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V okolí takových bodů musíme nasadit 100 procent osobního kouzla.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

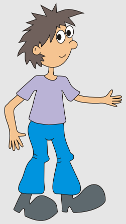
V okolí takových bodů musíme nasadit 100 procent osobního kouzla.



Budu se snažit takové záškodníky odhalit po přímkách, po parabolách a na ty nejzáludnéjší vytáhnu s ε.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V okolí takových bodů musíme nasadit 100 procent osobního kouzla.



Budu se snažit takové záškodníky odhalit po přímkách, po parabolách a na ty nejzáludnější vytáhnu s ε.

GOOD LUCK!

Konec cvičení 1.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teď poradím, jak zkoumat extrémy funkcí více proměnných v praxi:

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teď poradím, jak zkoumat extrémy funkcí více proměnných v praxi:

Následujícím radám plně důvěřuji!!!

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrného případu jsou hranice nekonečné množiny.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

⬇

2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrného případu jsou hranice nekonečné množiny.

⬇

3. Naštěstí však v praxi bývají tyto hranice většinou křivkami a tedy popsány spojitými funkcemi jedné proměnné. Dosazením těchto funkcí do zkoumané funkce se dostane funkce jedné proměnné a pro ni lze zjistit kritické body.

⬇

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

⬇

2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrného případu jsou hranice nekonečné množiny.

⬇

3. Naštěstí však v praxi bývají tyto hranice většinou křivkami a tedy popsány spojitými funkcemi jedné proměnné. Dosazením těchto funkcí do zkoumané funkce se dostane funkce jedné proměnné a pro ni lze zjistit kritické body.

⬇

5. Je však nutné si uvědomit, že takto získané např. lokální minimum je lokálním minimem pouze pro hranici a nikoli pro množinu A.

⬇

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

⬇

2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrného případu jsou hranice nekonečné množiny.

⬇

3. Naštěstí však v praxi bývají tyto hranice většinou křivkami a tedy popsány spojitými funkcemi jedné proměnné. Dosazením těchto funkcí do zkoumané funkce se dostane funkce jedné proměnné a pro ni lze zjistit kritické body.

⬇

5. Je však nutné si uvědomit, že takto získané např. lokální minimum je lokálním minimem pouze pro hranici a nikoli pro množinu A.

⬇

6. V některých speciálních případech je možné zkoumáním funkce v okolí takového lokálního extrému vzhledem k hranici určit, zda je lokálním extrémem i vzhledem k A.

⬇

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrného případu jsou hranice nekonečné množiny.

3. Naštěstí však v praxi bývají tyto hranice většinou křivkami a tedy popsány spojitými funkcemi jedné proměnné. Dosazením těchto funkcí do zkoumané funkce se dostane funkce jedné proměnné a pro ni lze zjistit kritické body.

5. Je však nutné si uvědomit, že takto získané např. lokální minimum je lokálním minimem pouze pro hranici a nikoli pro množinu A.

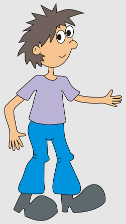
6. V některých speciálních případech je možné zkoumáním funkce v okolí takového lokálního extrému vzhledem k hranici určit, zda je lokálním extrémem i vzhledem k A.

7. Nicméně, vždy lze srovnáním hodnot na všech získaných kritických bodech zjistit absolutní extrémy.

V podstatě je tam řečeno, že se postupuje podle selského rozumu.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V podstatě je tam řečeno, že se postupuje podle selského rozumu.



Ach jo, to není dobrá zpráva . . .

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že platí následující tvrzení.

VĚTA. Nechť A je polootevřená omezená množina v rovině a její hranice patřící k A je grafem parametricky zadané křivky $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in I$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že platí následující tvrzení.

VĚTA. Nechť A je polootevřená omezená množina v rovině a její hranice patřící k A je grafem parametricky zadané křivky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t), t \in I$.

Pak absolutní maximum (minimum) spojité funkce f definované na A je maximální (resp. minimální) hodnota f na kritických bodech f uvnitř A a na kritických bodech funkce $f(\varphi(t), \psi(t)), t \in I$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že platí následující tvrzení.

VĚTA. Nechť A je polootevřená omezená množina v rovině a její hranice patřící k A je grafem parametricky zadané křivky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t), t \in I$.

Pak absolutní maximum (minimum) spojité funkce f definované na A je maximální (resp. minimální) hodnota f na kritických bodech f uvnitř A a na kritických bodech funkce $f(\varphi(t), \psi(t)), t \in I$.

…jak již bylo řečeno.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V případě, že je hranice zadána implicitně, není vždy možné dosadit do funkce $f(x, y)$ za y funkci popisující hranici!

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V případě, že je hranice zadána implicitně, není vždy možné dosadit do funkce $f(x, y)$ za y funkci popisující hranici!

V tomto případě lze použít tzv. metodu Lagrangeových multiplikátorů.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V případě, že je hranice zadána implicitně, není vždy možné dosadit do funkce $f(x, y)$ za y funkci popisující hranici!

V tomto případě lze použít tzv. metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Jde o jemnou záležitost, dávejte na ty multiplikátory pozor.

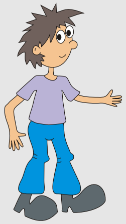
LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Já těm multiplikátorům říkam konstanty.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Já těm multiplikátorům říkam konstanty.



BÚNO nuly ;-)

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y)=0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y)=0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

VĚTA. Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x, y) = 0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

2. pro každý bod $(x, y) \in A$ je buď $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \neq 0$ nebo $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y)=0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

2. pro každý bod $(x,y) \in A$ je buď $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \neq 0$ nebo $\frac{\partial q}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,.$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y)=0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

2. pro každý bod $(x,y) \in A$ je buď $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \neq 0$ nebo $\frac{\partial q}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial (f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,.$$

Důkaz.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Za předpokladů předchozí věty se funkce

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

nazývá Lagrangeova funkce a parametr λ Lagrangeův multiplikátor.

Za předpokladů předchozí věty se funkce

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

nazývá Lagrangeova funkce a parametr λ Lagrangeův multiplikátor.

Tvrzení pak říká, že kritické body P funkce f na A odpovídají kritickým bodům (P, λ) funkce F na nějaké otevřené množině U (tj. $\mathrm{grad}(f + \lambda g)(P, \lambda) = 0$).

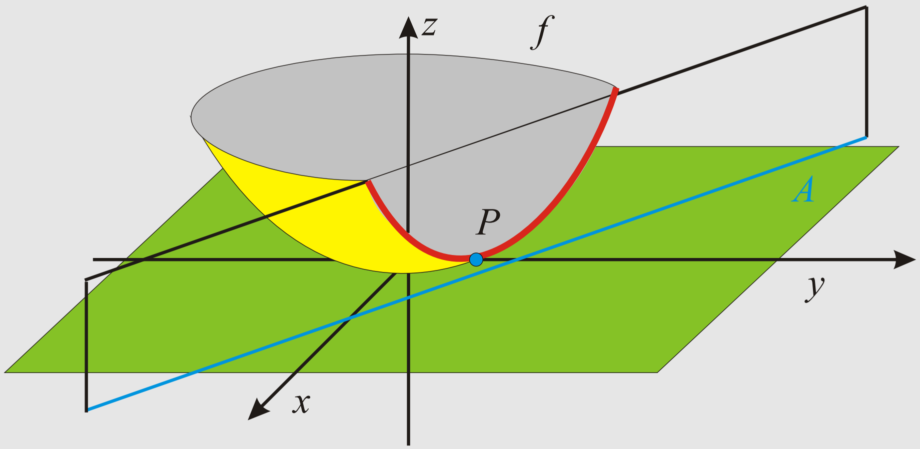
LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukážeme použití na příkladě.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukážeme použití na příkladě.

Nechť je A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y) = x + y - 2$, funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ je definována na otevřené množině $U = \mathbb{R}^2$. Hledáme extrémy f na A.



LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že platí:

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;
2. pro každý bod $(x, y) \in A$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

2. pro každý bod $(x, y) \in A$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

2. pro každý bod $(x, y) \in A$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy hledáme bod $P = (x, y) \in A$ a λ tak, aby

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;
2. pro každý bod $(x, y) \in A$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy hledáme bod $P = (x, y) \in A$ a λ tak, aby

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Spočteme řešení $x = 1$, $y = 1$ a $\lambda = -2$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy bod, který je podezřelý z nabývání extrému f na A, je bod $P = (1,1)$. Vzhledem k tomu, že funkce f je na A zdola omezená a není zhora omezená, našli jsme bod absolutního minima.

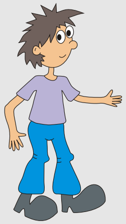
Tedy bod, který je podezřelý z nabývání extrému f na A, je bod $P = (1,1)$. Vzhledem k tomu, že funkce f je na A zdola omezená a není zhora omezená, našli jsme bod absolutního minima.

Tedy pro funkci $f + \lambda g = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$ je bod $(1,1)$ kritickým.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy bod, který je podezřelý z nabývání extrému f na A, je bod $P = (1,1)$. Vzhledem k tomu, že funkce f je na A zdola omezená a není zhora omezená, našli jsme bod absolutního minima.

Tedy pro funkci $f + \lambda g = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$ je bod $(1,1)$ kritickým.



Tak jsme přemístili paraboloid z počátku do $(1,1)$. Hle hle hle.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zjišťování, zda v P opravdu lokální extrém nastane, lze opět přenést na zjištění, zda příslušný bod (P, λ) je lokálním extrémem funkce $F = f + \lambda g$ na otevřené množině.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zjišťování, zda v P opravdu lokální extrém nastane, lze opět přenést na zjištění, zda příslušný bod (P, λ) je lokálním extrémem funkce $F = f + \lambda g$ na otevřené množině.

To je opravdu důležitá informace.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože derivace podle třetí proměnné funkce $F(x, y, \lambda)$ v příslušné kvadratické formě vypadnou, dostanou se následující postačující podmínky:

Protože derivace podle třetí proměnné funkce $F(x,y,\lambda)$ v příslušné kvadratické formě vypadnou, dostanou se následující postačující podmínky:

VĚTA. Za předpokladů předchozí věty se označí $H(h,k) = (h+k)^2 F(P)$. V kvadratické formě H se nahradí h nebo k druhou proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) = 0$ a získá se kvadratická forma $\tilde{H}(t) = at^2$ jedné proměnné.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože derivace podle třetí proměnné funkce $F(x, y, \lambda)$ v příslušné kvadratické formě vypadnou, dostanou se následující postačující podmínky:

VĚTA. Za předpokladů předchozí věty se označí $H(h, k) = (h + k)^2 F(P)$. V kvadratické formě H se nahradí h nebo k druhou proměnnou z rovnice $h \frac{\partial g}{\partial x}(P) + k \frac{\partial g}{\partial y}(P) = 0$ a získá se kvadratická forma $\tilde{H}(t) = at^2$ jedné proměnné.

1. Je-li $a > 0$, nabývá f v P ostré lokální minimum.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože derivace podle třetí proměnné funkce $F(x, y, \lambda)$ v příslušné kvadratické formě vypadnou, dostanou se následující postačující podmínky:

VĚTA. Za předpokladů předchozí věty se označí $H(h, k) = (h + k)^2 F(P)$. V kvadratické formě H se nahradí h nebo k druhou proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) = 0$ a získá se kvadratická forma $\tilde{H}(t) = at^2$ jedné proměnné.

1. Je-li $a > 0$, nabývá f v P ostré lokální minimum.

2. Je-li $a < 0$, nabývá f v P ostré lokální maximum.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Protože derivace podle třetí proměnné funkce $F(x, y, \lambda)$ v příslušné kvadratické formě vypadnou, dostanou se následující postačující podmínky:

VĚTA. Za předpokladů předchozí věty se označí $H(h, k) = (h + k)^2 F(P)$. V kvadratické formě H se nahradí h nebo k druhou proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) = 0$ a získá se kvadratická forma $\tilde{H}(t) = at^2$ jedné proměnné.

1. Je-li $a > 0$, nabývá f v P ostré lokální minimum.

2. Je-li $a < 0$, nabývá f v P ostré lokální maximum.

3. Je-li $a = 0$, nelze o lokálním extrému f v P pomocí $\tilde{H}$ rozhodnout.

Důkaz.

Nechť např. $\frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$. Potom $h = -k\frac{g_x(P)}{g_y(P)}$ a koeficient a z předchozí věty se rovná

$$f_{xx} - 2f_{xy}\frac{g_x(P)}{g_y(P)} + f_{yy}(P)\frac{g_x^2(P)}{g_y^2(P)}\,.$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť např. $\frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$. Potom $h = -k\frac{g_x(P)}{g_y(P)}$ a koeficient a z předchozí věty se rovná

$$f_{xx} - 2f_{xy}\frac{g_x(P)}{g_y(P)} + f_{yy}(P)\frac{g_x^2(P)}{g_y^2(P)}\,.$$

V následující části bude předpokládáno, že všechny parciální derivace 1.ř. používaných funkcí existují a jsou spojité.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkoumá-li se funkce tří proměnných, mohou pro vázané extrémy nastat dvě základní situace. Postupy jsou stejné, jako v předchozím případě a podrobnosti budou vynechány.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkoumá-li se funkce tří proměnných, mohou pro vázané extrémy nastat dvě základní situace. Postupy jsou stejné, jako v předchozím případě a podrobnosti budou vynechány.

I. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicí $g(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zkoumá-li se funkce tří proměnných, mohou pro vázané extrémy nastat dvě základní situace. Postupy jsou stejné, jako v předchozím případě a podrobnosti budou vynechány.

I. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicí $g(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Předpokladem je nenulovost alespoň jedné z derivací g_x, g_y, g_z v každém bodě A (tj., hodnost 1 matice $\mathrm{grad} g$ v každém bodě A).

Zkoumá-li se funkce tří proměnných, mohou pro vázané extrémy nastat dvě základní situace. Postupy jsou stejné, jako v předchozím případě a podrobnosti budou vynechány.

I. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicí $g(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Předpokladem je nenulovost alespoň jedné z derivací g_x, g_y, g_z v každém bodě A (tj., hodnost 1 matice $\operatorname{grad} g$ v každém bodě A).

Nutnou podmínkou, aby bod P byl lokálním extrémem f na A, je tedy rovnost $\operatorname{grad} F = 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ dvou proměnných, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h,k,l) = (h+k+l)^2 F(P)$ dosazením za jednu proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ dvou proměnných, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h,k,l) = (h+k+l)^2 F(P)$ dosazením za jednu proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0$.

Jde o podobnou záležitost jako pro jednu podmínku.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ dvou proměnných, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h,k,l) = (h+k+l)^2 F(P)$ dosazením za jednu proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0$.

Jde o podobnou záležitost jako pro jednu podmínku.

Pozor na podobnosti a ochylky!

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

II. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x,y,z)$ na množině A určené rovnicemi $g(x,y,z)=0, h(x,y,z)=0$ se hledají extrémy funkce

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)\,.$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

II. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x,y,z)$ na množině A určené rovnicemi $g(x,y,z)=0, h(x,y,z)=0$ se hledají extrémy funkce

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)\,.$$

Předpokladem je hodnost 2 matice s řádky $\mathrm{grad} g, \mathrm{grad} h$ v každém bodě A.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

II. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x,y,z)$ na množině A určené rovnicemi $g(x,y,z)=0, h(x,y,z)=0$ se hledají extrémy funkce

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)\,.$$

⬇

Předpokladem je hodnost 2 matice s řádky $\mathrm{grad} g, \mathrm{grad} h$ v každém bodě A.

⬇

Nutnou podmínkou, aby bod P byl lokálním extrémem f na A, je tedy rovnost $\mathrm{grad} F = 0$.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

II. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicemi $g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)\,.$$

⬇

Předpokladem je hodnost 2 matice s řádky $\mathrm{grad} g, \mathrm{grad} h$ v každém bodě A.

⬇

Nutnou podmínkou, aby bod P byl lokálním extrémem f na A, je tedy rovnost $\mathrm{grad} F = 0$.

⬇

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ jedné proměnné, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h, k, l) = (h + k + l)^2 F(P)$ dosazením za dvě proměnné z rovnic

$$h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0\,,$$
$$h\,\frac{\partial h}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial h}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial h}{\partial z}(P) = 0\,.$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Úlohy, kde se hledají extrémy funkce splňující nějakou další podmínku, se často nazývají vázané extrémy protože jsou vázané danou podmínkou nebo podmínkami.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Úlohy, kde se hledají extrémy funkce splňující nějakou další podmínku, se často nazývají vázané extrémy protože jsou vázané danou podmínkou nebo podmínkami.

Při hledání vázaných extrémů je možné v některých případech použít jak Lagrangeových multiplikátorů tak vypočítat z dané podmínky např. y a dosadit do zkoumané funkce (tím se podmínky zbavíte).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

Úlohy, kde se hledají extrémy funkce splňující nějakou další podmínku, se často nazývají vázané extrémy protože jsou vázané danou podmínkou nebo podmínkami.

Při hledání vázaných extrémů je možné v některých případech použít jak Lagrangeových multiplikátorů tak vypočítat z dané podmínky např. y a dosadit do zkoumané funkce (tím se podmínky zbavíte).

Není obecně zřejmé, která z obou metod je v daném případě jednodušší. V *Příkladech 2* takové situace najdete a můžete ozkoušet obě metody.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Někdy bývá vhodné přejít k jiným souřadnicím, např. k polárním nebo sférickým.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Někdy bývá vhodné přejít k jiným souřadnicím, např. k polárním nebo sférickým.

Mohou se tak značně zjednodušit rovnice křivek, které slouží jako podmínky, za kterých se extrémy hledají.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Někdy bývá vhodné přejít k jiným souřadnicím, např. k polárním nebo sférickým.

Mohou se tak značně zjednodušit rovnice křivek, které slouží jako podmínky, za kterých se extrémy hledají.

Např. při hledání extrémů funkce xy za podmínky $x^2/8 + y^2/2 = 1$ je vhodné zadat $x = 2\sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Někdy bývá vhodné přejít k jiným souřadnicím, např. k polárním nebo sférickým.

Mohou se tak značně zjednodušit rovnice křivek, které slouží jako podmínky, za kterých se extrémy hledají.

Např. při hledání extrémů funkce xy za podmínky $x^2/8 + y^2/2 = 1$ je vhodné zadat $x = 2\sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t$.

Obecně se vyplatí při řešení nespat.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro vyhledání kritických bodů není vždy nutné zjistit i hodnotu multiplikátoru λ.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro vyhledání kritických bodů není vždy nutné zjistit i hodnotu multiplikátoru λ.

Pro zjišťování druhu extrému pomocí kvadratické formy je však hodnota tohoto multiplikátoru potřeba.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky znamená rovnost $\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P)$, že oba vektory jsou lineárně závislé, (mají stejný nebo opačný směr).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky znamená rovnost $\mathrm{grad}\, f(P) = \lambda\, \mathrm{grad} g(P)$, že oba vektory jsou lineárně závislé, (mají stejný nebo opačný směr).

Vektor $\mathrm{grad} g(P)$ je směr normály ke křivce nebo ploše určené funkcí g v bodě P.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky znamená rovnost $\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P)$, že oba vektory jsou lineárně závislé, (mají stejný nebo opačný směr).

⇓

Vektor $\operatorname{grad} g(P)$ je směr normály ke křivce nebo ploše určené funkcí g v bodě P.

⇓

Vektor $\operatorname{grad} f(P)$ je směr největšího spádu na grafu f a současně normála ke křivce nebo plochy určené rovnicí $f(x, y) = f(P)$, resp. $f(x, y, z) = f(P)$.

⇓

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky znamená rovnost $\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P)$, že oba vektory jsou lineárně závislé, (mají stejný nebo opačný směr).

⬇

Vektor $\operatorname{grad} g(P)$ je směr normály ke křivce nebo ploše určené funkcí g v bodě P.

⬇

Vektor $\operatorname{grad} f(P)$ je směr největšího spádu na grafu f a současně normála ke křivce nebo ploše určené rovnicí $f(x,y) = f(P)$, resp. $f(x,y,z) = f(P)$.

⬇

Má-li f v P lokální extrém, musí mít tyto vektory stejný nebo opačný směr a tedy křivky $g(x,y) = 0$, $f(x,y,z) = f(P)$ mají v P společnou tečnu.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky znamená rovnost $\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P)$, že oba vektory jsou lineárně závislé, (mají stejný nebo opačný směr).

⬇

Vektor $\operatorname{grad} g(P)$ je směr normály ke křivce nebo ploše určené funkcí g v bodě P.

⬇

Vektor $\operatorname{grad} f(P)$ je směr největšího spádu na grafu f a současně normála ke křivce nebo ploše určené rovnicí $f(x,y) = f(P)$, resp. $f(x,y,z) = f(P)$.

⬇

Má-li f v P lokální extrém, musí mít tyto vektory stejný nebo opačný směr a tedy křivky $g(x,y) = 0$, $f(x,y,z) = f(P)$ mají v P společnou tečnu.

⬇

To je podstata. Nastane dotyk $g(x,y) = 0$ s vlnoplochou $f(x,y,z) = c$ pro vhodnou hodnotu c.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometricky znamená rovnost $\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P)$, že oba vektory jsou lineárně závislé, (mají stejný nebo opačný směr).

⬇

Vektor $\operatorname{grad} g(P)$ je směr normály ke křivce nebo ploše určené funkcí g v bodě P.

⬇

Vektor $\operatorname{grad} f(P)$ je směr největšího spádu na grafu f a současně normála ke křivce nebo ploše určené rovnicí $f(x, y) = f(P)$, resp. $f(x, y, z) = f(P)$.

⬇

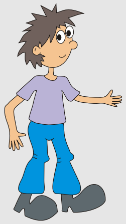
Má-li f v P lokální extrém, musí mít tyto vektory stejný nebo opačný směr a tedy křivky $g(x, y) = 0$, $f(x, y, z) = f(P)$ mají v P společnou tečnu.

⬇

To je podstata. Nastane dotyk $g(x, y) = 0$ s vlnoplochou $f(x, y, z) = c$ pro vhodnou hodnotu c.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Dík za ten dotyk.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na nalezení bodu nějaké plochy, který je nejblíže počátku, je vidět geometrický význam Lagrangeových multiplikátorů v případě o dimenzi vyšším.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

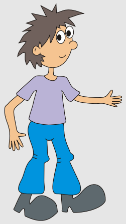
Na nalezení bodu nějaké plochy, který je nejblíže počátku, je vidět geometrický význam Lagrangeových multiplikátorů v případě o dimenzi vyšším.

Jestliže se postupně zvětšují poloměry λ koulí se středem v počátku, až se koule dotkne plochy v bodě P, dá se očekávat, že tečné roviny obou ploch budou v P stejné. To opět znamená rovnost $\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na nalezení bodu nějaké plochy, který je nejblíže počátku, je vidět geometrický význam Lagrangeových multiplikátorů v případě o dimenzi vyšším.

Jestliže se postupně zvětšují poloměry λ koulí se středem v počátku, až se koule dotkne plochy v bodě P, dá se očekávat, že tečné roviny obou ploch budou v P stejné. To opět znamená rovnost $\mathrm{grad} f(P) = \lambda\, \mathrm{grad} g(P)$.



Zkusím to s kopačákem …

Konec poznámek 2.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Najděte bod v rovině $2x + y - z = 5$ nejblíže počátku.

Příklady 2 :

1. Najděte bod v rovině $2x + y - z = 5$ nejblíže počátku.

Minimalizujete funkci $x^2+y^2+z^2$ při podmínce $2x+y-z = 5$. Vyjde bod $(5/3, 5/6, -5/6)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte absolutní extrémy funkce $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na uzavřeném čtverci $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte absolutní extrémy funkce $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na uzavřeném čtverci $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

Uvnitř čtverce je jeden kritický bod $(\pi/3, \pi/3)$. Postupně se dosazují části hranice ($y = 0, x = \pi/2, y = \pi/2, x = 0$) a dostanou se kritické body pro hranici čtverce: čtyři vrcholy a body $(\pi/2, \pi/4), (\pi/4, \pi/2)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Najděte absolutní extrémy funkce $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na uzavřeném čtverci $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

Uvnitř čtverce je jeden kritický bod $(\pi/3, \pi/3)$. Postupně se dosazují části hranice ($y = 0, x = \pi/2, y = \pi/2, x = 0$) a dostanou se kritické body pro hranici čtverce: čtyři vrcholy a body $(\pi/2, \pi/4), (\pi/4, \pi/2)$.

Srovnáním hodnot ve všech získaných bodech se dostane maximum funkce $3\sqrt{3}/2$ v bodě $(\pi/3, \pi/3)$ a minimum 0 v bodě $(0, 0)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x,y); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2x^2\}$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x, y); 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2x^2$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

Uvnitř množiny existuje jediný kritický bod $(1, 1)$, ve kterém je příslušná kvadratická forma pozitivně definitní a tedy je v tomto bodě lokální minimum s hodnotou -1.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x,y); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2x^2\}$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

⬇

Uvnitř množiny existuje jediný kritický bod $(1,1)$, ve kterém je příslušná kvadratická forma pozitivně definitní a tedy je v tomto bodě lokální minimum s hodnotou -1.

⬇

Pro hranici $y = 0$ se dostane rostoucí funkce x^3. Na hranici $x = 3$ má funkce lokální minimum v bodě $\sqrt{3}$. Na zbývající hranici má funkce lokální minimum v $\sqrt[3]{5/16}$.

⬇

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x, y); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2x^2$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

Uvnitř množiny existuje jediný kritický bod $(1, 1)$, ve kterém je příslušná kvadratická forma pozitivně definitní a tedy je v tomto bodě lokální minimum s hodnotou -1.

Pro hranici $y = 0$ se dostane rostoucí funkce x^3. Na hranici $x = 3$ má funkce lokální minimum v bodě $\sqrt{3}$. Na zbývající hranici má funkce lokální minimum v $\sqrt[3]{5/16}$.

Všechny kritické body jsou $(0, 0), (3, 0), (3, 18), (1, 1), (3, \sqrt{3}), (\sqrt[3]{5/16}, 2\sqrt[3]{(5/16)^2}$. Srovnáním hodnot v těchto bodech se dostane absolutní minimum v (1,1) a absolutní maximum v (3,18).

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x, y); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2x^2$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

Uvnitř množiny existuje jediný kritický bod $(1, 1)$, ve kterém je příslušná kvadratická forma pozitivně definitní a tedy je v tomto bodě lokální minimum s hodnotou -1.

Pro hranici $y = 0$ se dostane rostoucí funkce x^3. Na hranici $x = 3$ má funkce lokální minimum v bodě $\sqrt{3}$. Na zbývající hranici má funkce lokální minimum v $\sqrt[3]{5/16}$.

Všechny kritické body jsou $(0, 0), (3, 0), (3, 18), (1, 1), (3, \sqrt{3}), (\sqrt[3]{5/16}, 2\sqrt[3]{(5/16)^2}$. Srovnáním hodnot v těchto bodech se dostane absolutní minimum v (1,1) a absolutní maximum v (3,18).

Úvahami lze zjistit možnost lokálních extrémů v ostatních bodech. V bodě (0,0) není lokální extrém (funkce je tam na hranici rostoucí) a ani v bodě $(3, \sqrt{3})$ není lokální extrém (funkce tam klesá směrem k -1 v bodě (1,1) a stoupá směrem k vrcholům – podobně v bodě $(\sqrt[3]{5/16}, 2\sqrt[3]{(5/16)^2}$. V bodě (3,0) je lokální maximum.

4. Najděte lokální extrémy funkce $x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Najděte lokální extrémy funkce $x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

Vyjde lokální minimum v (0,0) a lokální maximum v (2,-2). Jsou to absolutní extrémy?

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Najděte body na průniku ploch $z^2 = x^2 + y^2$ s $z = 1 + x + y$ nejblíže počátku. Řešte pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

5. Najděte body na průniku ploch $z^2 = x^2 + y^2$ s $z = 1 + x + y$ nejblíže počátku. Řešte pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

(Vyjdou body $(-1 \pm \sqrt{2}/2, -1 \pm \sqrt{2}/2, -1 \pm \sqrt{2})$.)

6. Obdélník o obvodu $2s$ se otáčí kolem jedné strany. Najděte délky jeho stran takové, aby objem vzniklého rotačního tělesa byl největší.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Obdélník o obvodu $2s$ se otáčí kolem jedné strany. Najděte délky jeho stran takové, aby objem vzniklého rotačního tělesa byl největší.

(Vyjde $(s/3, 2s/3)$.)

Konec příkladů 2.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ na množině $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Řešení. Vidíme, že funkce f má v počátku sedlový bod. Extrémy na U tedy musí f nabývat na hranici $A = \partial U$.

Cvičení 2 :

Příklad. Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Řešení. Vidíme, že funkce f má v počátku sedlový bod. Extrémy na U tedy musí f nabývat na hranici $A = \partial U$.

Nasadíme metodu Lagrangeových multiplikátorů.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Vidíme, že platí:

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na $\mathbb{R}^2$;

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na $\mathbb{R}^2$;

2. pro každý bod $(x, y) \in B = (A \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\})$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na $\mathbb{R}^2$;

2. pro každý bod $(x, y) \in B = (A \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\})$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in B$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Označme $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na $\mathbb{R}^2$;

2. pro každý bod $(x,y) \in B = (A \setminus \{(1,0),(-1,0)\})$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in B$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy hledáme bod $P = (x,y) \in B$ a λ tak, aby

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Označme $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na $\mathbb{R}^2$;

2. pro každý bod $(x,y) \in B = (A \setminus \{(1,0),(-1,0)\})$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in B$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy hledáme bod $P = (x,y) \in B$ a λ tak, aby

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy řešíme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned} 2x + \lambda 2x &= 0 \\ -2y + \lambda 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy řešíme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned} 2x + \lambda 2x &= 0 \\ -2y + \lambda 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Spočteme řešení jako trojice (x, y, λ), výsledek je $(0, 1, 1)$, $(0, -1, -1)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy body, které jsou podezřelé z nabývání extrému f na B, jsou body $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (0,-1)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy body, které jsou podezřelé z nabývání extrému f na B, jsou body $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, -1)$.

Podobně můžeme zkoumat chování v bodech $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Zaměníme proměnné x a y ve větě o implicitních funkcích a dostaneme podezřelé body $P_3 = (1, 0)$, $P_4(-1, 0)$.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy body, které jsou podezřelé z nabývání extrému f na B, jsou body $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, -1)$.

Podobně můžeme zkoumat chování v bodech $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Zaměníme proměnné x a y ve větě o implicitních funkcích a dostaneme podezřelé body $P_3 = (1, 0)$, $P_4(-1, 0)$.

Jako bychom otočili souřadnicové osy.

Tedy body, které jsou podezřelé z nabývání extrému f na B, jsou body $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, -1)$.

Podobně můžeme zkoumat chování v bodech $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Zaměníme proměnné x a y ve větě o implicitních funkcích a dostaneme podezřelé body $P_3 = (1, 0)$, $P_4(-1, 0)$.

Jako bychom otočili souřadnicové osy.

Přesný důkaz toho, které body jsou body ostrého lokálního minima, se zjistí elementární úvahou.

Celkově jsme tedy našli dvě lokální minima a dvě lokální maxima na A.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

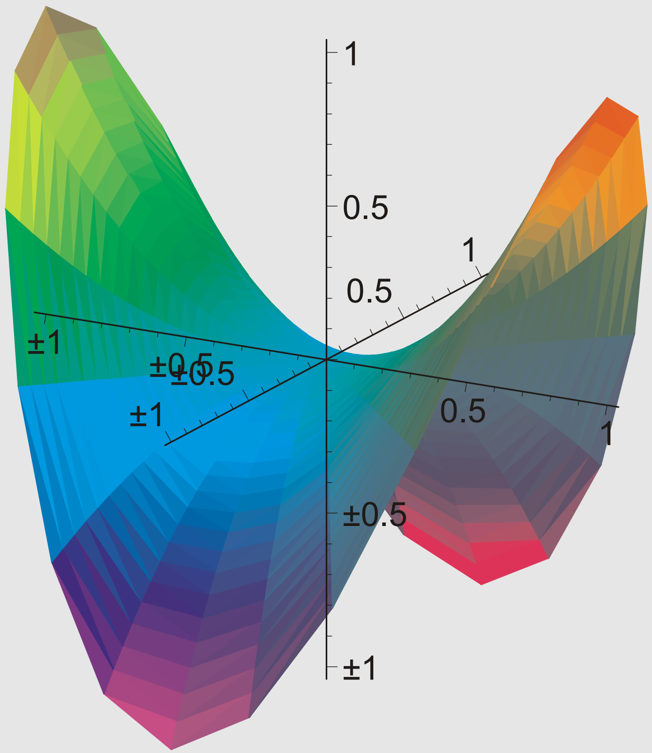
Pokud bychom hledali extrémy pouze na B, mohli jsme například v bodě P_1 hledat extrémy funkce $f + \lambda g = 2x^2 - 1$.

Pokud bychom hledali extrémy pouze na B, mohli jsme například v bodě P_1 hledat extrémy funkce $f + \lambda g = 2x^2 - 1$.

Takto tedy dostaneme body $(0, y)$, v nichž jsou lokální neostré extrémy. To potvrzuje existenci extrémů na B.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Obrázek



LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE19-EXT
Taylor
střední hodnota
lokální extrém
kritické body
kvadr.forma
vázaný extrém
Lagrange
kvadr.forma 2
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9