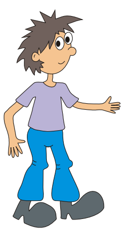
EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v C lokální extrém, jestliže má v C lokální maximum nebo lokální minimum.

Absolutní maximum funkce f na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ je hodno ta $\max\{f(x,y);(x,y) \in A\}$. Podobně se definuje absolutní minimum, dohromady se nazývají absolutní extrémy.

Nahradí-li se v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší*), dostává se definice ostrých lokálních extrémů.



Vrátil jsem se do mládí . . .

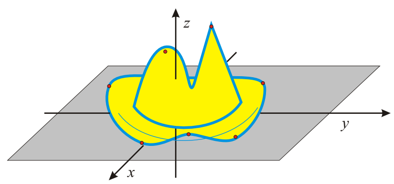
VĚTA. Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;
2. ve vnitřním bodě A, ve kterém f nemá některou z parciálních derivací 1.ř.;
3. ve vnitřním bodě A, kde má f všechny parciální derivace 1.ř. rovny 0.

Jde o jednoduché odvozování pomocí výsledků pro funkce jedné proměnné (proveďte to).

Body popsané v předchozí větě se nazývají kritické body (pro lokální extrémy).

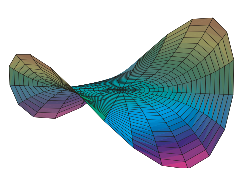
Na mém starém klobouku byly taky kritické body.



DŮSLEDEK. Nechť v otevřené množině G má funkce f všechny parciální derivace 1.ř. Má-li f v bodě $C \in G$ lokální extrém, anulují se v tomto bodě parciální derivace 1.ř. (tedy i směrové derivace).

Stejně jako u funkcí jedné proměnné **OPAK NEPLATÍ!** Uveďte příklad.

Například moje staré sedlo.



VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$, což je kvadratická forma proměnných h, k.

Potom

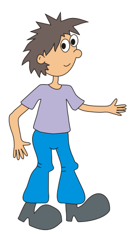
1. Je-li F pozitivně definitní, nabývá f v P ostré lokální minimum.
2. Je-li F negativně definitní, nabývá f v P ostré lokální maximum.
3. Je-li F indefinitní, nenabývá f v P lokální extrém.
4. Je-li F semidefinitní, nelze o lokálním extrému f v P pomocí F rozhodnout.

Důkaz. Podmínky tvrzení umožňují napsat Taylorův vztah do řádu 2 pro bod Q blízko bodu P:

$$f(Q) = f(P) + \mathrm{d}f(P) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(T)\,,$$

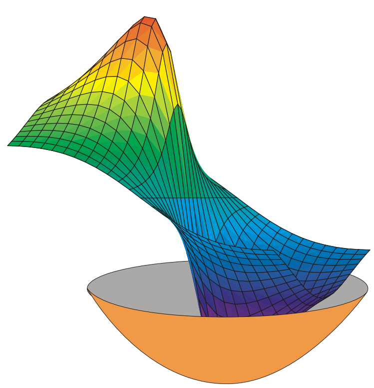
kde bod T leží mezi body P a Q. První diferenciál $\mathrm{d}f(P)$ je roven 0. Nyní je důkaz již jasný. $\diamond$

Jde o kvadratickou aproximaci funkce. Tedy nahradíme funkci jakýmsi paraboloidem. Pokud je funkce větší než paraboloid procházející grafem funkce, jde o minimum.



Teď to jenom spočítat …

Pomocný paraboloid hlídající graf funkce zespodu ukazuje na lokální minimum:



To, kam kouká kvadratická forma druhých parciálních derivací, poznáme podle uvedených testů.

U funkce $x^7 + y^6$ nic nepoznáme. Ten test je jenom kvadratický.

Následující tvrzení je známé z algebry a dokáže se snadno „úpravou na čtverec".

VĚTA. Kvadratická forma F z předchozí věty je

1. pozitivně definitní právě když $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;
2. negativně definitní právě když $f_{xx}(P) < 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;
3. indefinitní právě když $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) < f_{xy}^2(P)$;
4. semidefinitní právě když $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) = f_{xy}^2(P)$;

Takže nemusím přemýšlet. Pokud si tedy tohle budu pamatovat . . .

DŮSLEDEK. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

Jestliže $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$, pak f má v bodě P ostrý lokální extrém (maximum pro $f_{xx}(P) < 0$, minimum pro $f_{xx}(P) > 0$).

Poznámky 1:

1.

Stejně jako u funkcí jedné proměnné lze do množiny kritických bodů přidat další body, aniž se tím poruší výsledné tvrzení.

2 Absolutní extrémy.

Zřejmě je každý absolutní extrém i lokálním extrémem. Opak neplatí.

Pro vyhledání absolutních extrémů spojité funkce na kompaktní množině stačí vzít hodnoty funkce ve všech kritických bodech a najít největší a nejmenší hodnotu. Dalšího ověřování není třeba, protože spojitá funkce na kompaktní množině má vždy oba absolutní extrémy.

Na nekompaktních množinách je třeba být opatrný. I když je nekompaktní množina uzavřená (obsahuje tedy svou hranici, ale není omezená), mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti jdoucí do nekonečna být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

Je-li množina, na které se hledá extrém, otevřená a omezená, je disjunktní se svou hranicí a opět mohou hodnoty funkce na nějaké posloupnosti konvergující k bodu hranice být větší (nebo menší) než maximum (nebo minimum) z hodnot v kritických bodech.

Pokud se funkce dá spojitě rozšířit i na hranici, dostane se spojitá funkce na kompaktní množině, pokud je původní množina omezená. Pak lze použít postup uvedený výše ve druhém odstavci.

Pokud je množina, na které se hledají extrémy neomezená, je nutné uvažovat i limity funkce na posloupnostech z dané množiny konvergující k nekonečnu.

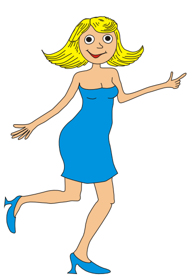
3 Kvadratické formy.

Připomeňte si, že kvadratická forma $K(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ (matice (a_{ij}) je symetrická) se nazývá *pozitivně definitní* (nebo *negativně definitní*), jestliže pro jakoukoli volbu hodnot $x = (x_1, ..., x_n)$ různou od $(0, .., 0)$ je $K(x) > 0$ (nebo $K(x) < 0$, resp.).

Nazývá se indefinitní, jestliže nabývá jak záporných, tak kladných hodnot. Nazývá se semidefinitní, jestliže nabývá pouze nezáporných nebo pouze nekladných hodnot a hodnoty 0 v nějakém nenulovém bodě.

Definitnost kvadratické formy lze zjistit převedením matice (a_{ij}) na diagonální tvar.

Jsou-li všechny prvky diagonály kladné (nebo záporné), je forma pozitivně (resp. negativně) definitní, obsahuje-li diagonála prvky záporné i kladné, je forma indefinitní a ve zbývajícím případě (diagonála obsahuje 0 a čísla stejného znaménka) je semidefinitní.



U kvadratické formy dvou proměnných je zjištění definitnosti zvláště jednoduché (viz *Otázky*).

4. Je-li kvadratická forma druhých parciálních derivací funkce f v nějakém bodě indefinitní, má f v tomto bodě tzv. sedlový bod.

Tento případ nemůže nastat u funkcí jedné proměnné.

Ostatní případy jsou u funkcí jedné proměnné obdobné: druhá derivace je buď kladná (minimum) nebo záporná (maximum) nebo nulová (nelze rozhodnout).

4. Stejně jako u funkcí jedné proměnné bývá někdy jednodušší rozhodovat o druhu extrému nikoli pomocí druhých derivací, ale úsudkem.

Bývá to v případech, kdy jsou druhé derivace komplikované.

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 - 6x - 6xy + 6y + 3y^2$ na $\mathbb{R}^2$.

Jsou dva kritické body $(0, -1), (2, 1)$. V prvním je příslušná kvadratická forma indefinitní a ve druhém je pozitivně definitní. Absolutní extrémy nejsou.

Proveďte podrobnosti.

2. Najděte absolutní extrémy funkce $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$ na otevřeném čtverci $(0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$.

Uvnitř čtverce je jeden kritický bod $(\pi/3, \pi/3)$ s hodnotou $3\sqrt{3}/2$. Snadno se zjistí dosazováním hranice ($y = 0, x = \pi/2, y = \pi/2, x = 0$), že hodnoty funkce na hranici jsou menší než $3\sqrt{3}/2$. V tomto bodě je tedy absolutní maximum, absolutní minimum neexistuje (proč?).

3. Najděte absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x, y); 0 < x < 3, 0 < y < 2x^2$.

Podobným postupem jako v předchozím příkladě zjistíte absolutní minimum v (1,1). Absolutní maximum neexistuje.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Uveďte příklad funkce dvou proměnných, která má v nějakém bodě obě parciální derivace (spojité) nulové, ale nemá v onom bodě lokální extrém.

2. Uveďte příklad funkce dvou proměnných definované na vnitřku jednotkového kruhu, která nemá žádný lokální extrém.

3. Uveďte příklad funkce dvou proměnných definované na uzavřené množině (otevřená množina spolu s hranicí) která nemá žádný lokální extrém.

4. Ukažte, že kvadratická forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$ je pozitivně (nebo negativně) definitní právě když $ac > b^2$ a $a > 0$ (resp. $a < 0$).
Je indefinitní právě když $ac < b^2$ a je semidefinitní právě když $ac = b^2$.

Konec otázek 1.

Cvičení 1:

Příklad. Spočtěte extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na obdélníku $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Řešení. Označme si zkoumaný obdélník K.

Spočítáme parciální derivace a určíme, že jediný kritický bod funkce f neleží ve zkoumané množině K.

Tedy f jako spojitá funkce na kompaktní množině K nabývá na K absolutního minima a maxima na hranici K.

Tuto hranici budeme parametrizovat pomocí 4 křivek a budeme zkoumat extrémy funkce jedné proměnné na definičním oboru těchto křivek.

Například část hranice H_1 ležící v ose x jde parametrizovat

$$\varphi_1(t) = (t, 0)$$

na intervalu $[0, 1]$.

Tedy na intervalu $[0, 1]$ zkoumáme extrémy funkce

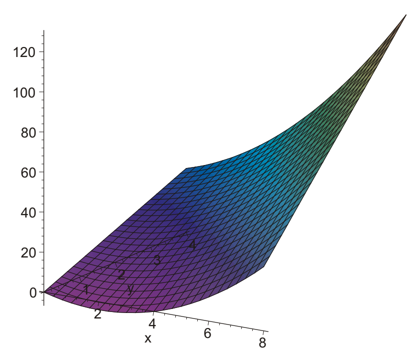
$$f(\varphi_1(t, 0) = t^2 - 4t\ .$$

Minima na H_1 se nabývá v $(1, 0)$, maxima v $(0, 0)$.

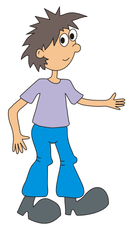
Podobně s dalšími úseky hranice K.

Výsledek vznikne porovnáním hodnot v kandidátech na minimum a maximum.

Obrázek grafu funkce



Všimněme si jednoduchého faktu, že ve funkci $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ máme pro pevné x na starost lineární funkci, pro pevné y kvadratickou a vždy otočenou nahoru.



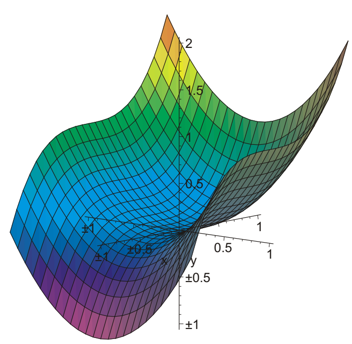
Tedy žádný bod roviny není bodem ostrého lokálního maxima. Aha.

Příklad. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^3$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

Řešení. Díky chování na ose y zde není lokální extrém.

Na kubické parabole y^3 stojí funkce x^2.

Obrázek grafu funkce



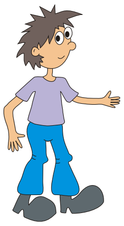
Příklad. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v počátku kritický bod. Zjistěte, zda se jedná o extrém.

Řešení. Ověříme podmínku pozitivní definitnosti formy druhých parciálních derivací pomocí ověření podmínky $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$ pro $P = (0, 0)$.

V našem případě jde o vztah $2 > 0$ a $2 \cdot 2 > 0^2$, který platí.

V počátku má funkce ostré lokální maximum.

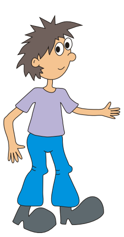
Nezapomeňte, že se jedná o kvadratický test a že nedovede všechno.



Navíc jsem si všiml, že jde použít jenou ve vnitřních bodech. Smůla.

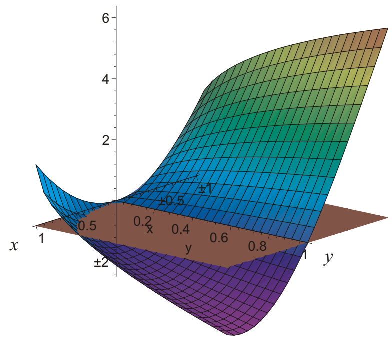
Pokud najdeme na hranici množiny bod, v němž se vzhledem k hranici nabývá extrému, nemusí to znamenat extrém vůči množině.

Například počátek je pro funkci $x^2 + \sin y$ docela dobrým kandidátem na ostré lokální naximum na polorovině $x \geq 0$, nicméně mu to ten sinus v libovolném okolí počátku bude škodolibě kazit.

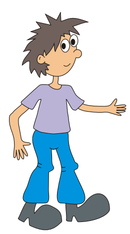


Na to se rád škodolibě podívám:

Obrázek grafu funkce



V okolí takových bodů musíme nasadit 100 procent osobního kouzla.



Budu se snažit takové záškodníky odhalit po přímkách, po parabolách a na ty nejzáludnější vytáhnu s ε.

GOOD LUCK!

Konec cvičení 1.

Teď poradím, jak zkoumat extrémy funkcí více proměnných v praxi:

Následujícím radám plně důvěřuji!!!

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrného případu jsou hranice nekonečné množiny.

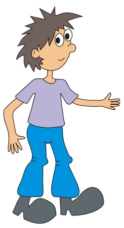
3. Naštěstí však v praxi bývají tyto hranice většinou křivkami a tedy popsány spojitými funkcemi jedné proměnné. Dosazením těchto funkcí do zkoumané funkce se dostane funkce jedné proměnné a pro ni lze zjistit kritické body.

5. Je však nutné si uvědomit, že takto získané např. lokální minimum je lokálním minimem pouze pro hranici a nikoli pro množinu A.

6. V některých speciálních případech je možné zkoumáním funkce v okolí takového lokálního extrému vzhledem k hranici určit, zda je lokálním extrémem i vzhledem k A.

7. Nicméně, vždy lze srovnáním hodnot na všech získaných kritických bodech zjistit absolutní extrémy.

V podstatě je tam řečeno, že se postupuje podle selského rozumu.



Ach jo, to není dobrá zpráva . . .

Ukažte, že platí následující tvrzení.

VĚTA. Nechť A je polootevřená omezená množina v rovině a její hranice patřící k A je grafem parametricky zadané křivky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$.

Pak absolutní maximum (minimum) spojité funkce f definované na A je maximální (resp. minimální) hodnota f na kritických bodech f uvnitř A a na kritických bodech funkce $f(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in I$.

. . . jak již bylo řečeno.

V případě, že je hranice zadána implicitně, není vždy možné dosadit do funkce $f(x, y)$ za y funkci popisující hranici!

V tomto případě lze použít tzv. metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Jde o jemnou záležitost, dávejte na ty multiplikátory pozor.

Já těm multiplikátorům říkam konstanty.

BÚNO nuly ;-)

VĚTA. Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y) = 0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

2. pro každý bod $(x,y) \in A$ je buď $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \neq 0$ nebo $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \qquad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,.$$

Důkaz.

Za předpokladů předchozí věty se funkce

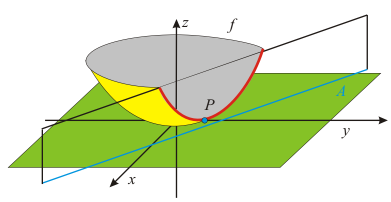
$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

nazývá Lagrangeova funkce a parametr λ Lagrangeův multiplikátor.

Tvrzení pak říká, že kritické body P funkce f na A odpovídají kritickým bodům (P, λ) funkce F na nějaké otevřené množině U (tj. $\mathrm{grad}(f + \lambda g)(P, \lambda) = 0$).

Ukážeme použití na příkladě.

Nechť je A je grafem implicitně zadané křivky $g(x, y) = x+y-2$, funkce $f(x, y) = x^2+y^2$ je definována na otevřené množině $U = \mathbb{R}^2$. Hledáme extrémy f na A.



Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;
2. pro každý bod $(x, y) \in A$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \qquad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \qquad g(P) = 0\,.$$

Tedy hledáme bod $P = (x, y) \in A$ a λ tak, aby

$$\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

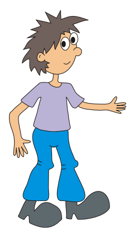
Tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

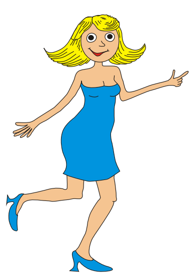
Spočteme řešení $x = 1$, $y = 1$ a $\lambda = -2$.

Tedy bod, který je podezřelý z nabývání extrému f na A, je bod $P = (1, 1)$. Vzhledem k tomu, že funkce f je na A zdola omezená a není zhora omezená, našli jsme bod absolutního minima.

Tedy pro funkci $f + \lambda g = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ je bod $(1, 1)$ kritickým.



Tak jsme přemístili paraboloid z počátku do $(1, 1)$. Hle hle hle.



Zjišťování, zda v P opravdu lokální extrém nastane, lze opět přenést na zjištění, zda příslušný bod (P, λ) je lokálním extrémem funkce $F = f + \lambda g$ na otevřené množině.

To je opravdu důležitá informace.

Protože derivace podle třetí proměnné funkce $F(x, y, \lambda)$ v příslušné kvadratické formě vypadnou, dostanou se následující postačující podmínky:

VĚTA. Za předpokladů předchozí věty se označí $H(h, k) = (h + k)^2 F(P)$. V kvadratické formě H se nahradí h nebo k druhou proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) = 0$ a získá se kvadratická forma $\tilde{H}(t) = at^2$ jedné proměnné.

1. Je-li $a > 0$, nabývá f v P ostré lokální minimum.
2. Je-li $a < 0$, nabývá f v P ostré lokální maximum.
3. Je-li $a = 0$, nelze o lokálním extrému f v P pomocí $\tilde{H}$ rozhodnout.

Důkaz.

Nechť např. $\frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$. Potom $h = -k\frac{g_x(P)}{g_y(P)}$ a koeficient a z předchozí věty se rovná

$$f_{xx} - 2f_{xy}\frac{g_x(P)}{g_y(P)} + f_{yy}(P)\frac{g_x^2(P)}{g_y^2(P)}\,.$$

V následující části bude předpokládáno, že všechny parciální derivace 1.ř. používaných funkcí existují a jsou spojité.

Zkoumá-li se funkce tří proměnných, mohou pro vázané extrémy nastat dvě základní situace. Postupy jsou stejné, jako v předchozím případě a podrobnosti budou vynechány.

I. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicí $g(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Předpokladem je nenulovost alespoň jedné z derivací g_x, g_y, g_z v každém bodě A (tj., hodnost 1 matice $\mathrm{grad} g$ v každém bodě A).

Nutnou podmínkou, aby bod P byl lokálním extrémem f na A, je tedy rovnost $\mathrm{grad}F = 0$.

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ dvou proměnných, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h,k,l) = (h+k+l)^2 F(P)$ dosazením za jednu proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0$.

Jde o podobnou záležitost jako pro jednu podmínku.

Pozor na podobnosti a ochylky!

II. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x,y,z)$ na množině A určené rovnicemi $g(x,y,z) = 0$, $h(x,y,z) = 0$ se hledají extrémy funkce

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)\,.$$

Předpokladem je hodnost 2 matice s řádky $\mathrm{grad}g, \mathrm{grad}h$ v každém bodě A.

Nutnou podmínkou, aby bod P byl lokálním extrémem f na A, je tedy rovnost $\mathrm{grad}F = 0$.

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ jedné proměnné, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h,k,l) = (h+k+l)^2 F(P)$ dosazením za dvě proměnné z rovnic

$$h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0\,,$$

$$h\,\frac{\partial h}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial h}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial h}{\partial z}(P) = 0\,.$$

Poznámky 2:

Úlohy, kde se hledají extrémy funkce splňující nějakou další podmínku, se často nazývají vázané extrémy protože jsou vázané danou podmínkou nebo podmínkami.

Při hledání vázaných extrémů je možné v některých případech použít jak Lagrangeových multiplikátorů tak vypočítat z dané podmínky např. y a dosadit do zkoumané funkce (tím se podmínky zbavíte).

Není obecně zřejmé, která z obou metod je v daném případě jednodušší. V *Příkladech 2* takové situace najdete a můžete ozkoušet obě metody.

Někdy bývá vhodné přejít k jiným souřadnicím, např. k polárním nebo sférickým.

Mohou se tak značně zjednodušit rovnice křivek, které slouží jako podmínky, za kterých se extrémy hledají.

Např. při hledání extrémů funkce xy za podmínky $x^2/8 + y^2/2 = 1$ je vhodné zadat $x = 2\sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t$.

Obecně se vyplatí při řešení nespat.

Pro vyhledání kritických bodů není vždy nutné zjistit i hodnotu multiplikátoru λ.

Pro zjišťování druhu extrému pomocí kvadratické formy je však hodnota tohoto multiplikátoru potřeba.

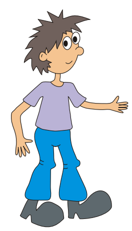
Geometricky znamená rovnost $\mathrm{grad} f(P) = \lambda\, \mathrm{grad} g(P)$, že oba vektory jsou lineárně závislé, (mají stejný nebo opačný směr).

Vektor $\mathrm{grad} g(P)$ je směr normály ke křivce nebo ploše určené funkcí g v bodě P.

Vektor $\mathrm{grad} f(P)$ je směr největšího spádu na grafu f a současně normála ke křivce nebo ploše určené rovnicí $f(x, y) = f(P)$, resp. $f(x, y, z) = f(P)$.

Má-li f v P lokální extrém, musí mít tyto vektory stejný nebo opačný směr a tedy křivky $g(x, y) = 0$, $f(x, y, z) = f(P)$ mají v P společnou tečnu.

To je podstata. Nastane dotyk $g(x, y) = 0$ s vlnoplochou $f(x, y, z) = c$ pro vhodnou hodnotu c.



Dík za ten dotyk.

Na nalezení bodu nějaké plochy, který je nejblíže počátku, je vidět geometrický význam Lagrangeových multiplikátorů v případě o dimenzi vyšším.

Jestliže se postupně zvětšují poloměry λ koulí se středem v počátku, až se koule dotkne plochy v bodě P, dá se očekávat, že tečné roviny obou ploch budou v P stejné. To opět znamená rovnost $\operatorname{grad} f(P) = \lambda \operatorname{grad} g(P)$.

Zkusím to s kopačákem . . .

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Najděte bod v rovině $2x + y - z = 5$ nejblíže počátku.

Minimalizujete funkci $x^2 + y^2 + z^2$ při podmínce $2x + y - z = 5$. Vyjde bod $(5/3, 5/6, -5/6)$.

2. Najděte absolutní extrémy funkce $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$ na uzavřeném čtverci $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

Uvnitř čtverce je jeden kritický bod $(\pi/3, \pi/3)$. Postupně se dosazují části hranice ($y = 0, x = \pi/2, y = \pi/2, x = 0$) a dostanou se kritické body pro hranici čtverce: čtyři vrcholy a body $(\pi/2, \pi/4), (\pi/4, \pi/2)$.

Srovnáním hodnot ve všech získaných bodech se dostane maximum funkce $3\sqrt{3}/2$ v bodě $(\pi/3, \pi/3)$ a minimum 0 v bodě $(0, 0)$.

3. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{(x, y); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2x^2$. (Pokračování příkladu z *Příkladů 1*.)

Uvnitř množiny existuje jediný kritický bod $(1,1)$, ve kterém je příslušná kvadratická forma pozitivně definitní a tedy je v tomto bodě lokální minimum s hodnotou -1.

Pro hranici $y = 0$ se dostane rostoucí funkce x^3. Na hranici $x = 3$ má funkce lokální minimum v bodě $\sqrt{3}$. Na zbývající hranici má funkce lokální minimum v $\sqrt[3]{5/16}$.

Všechny kritické body jsou $(0,0), (3,0), (3,18), (1,1), (3,\sqrt{3}), (\sqrt[3]{5/16}, 2\sqrt[3]{(5/16)^2}$. Srovnáním hodnot v těchto bodech se dostane absolutní minimum v (1,1) a absolutní maximum v (3,18).

Úvahami lze zjistit možnost lokálních extrémů v ostatních bodech. V bodě (0,0) není lokální extrém (funkce je tam na hranici rostoucí) a ani v bodě $(3,\sqrt{3})$ není lokální extrém (funkce tam klesá směrem k -1 v bodě (1,1) a stoupá směrem k vrcholům – podobně v bodě $(\sqrt[3]{5/16}, 2\sqrt[3]{(5/16)^2}$. V bodě (3,0) je lokální maximum.

4. Najděte lokální extrémy funkce $x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

Vyjde lokální minimum v (0,0) a lokální maximum v (2,-2). Jsou to absolutní extrémy?

5. Najděte body na průniku ploch $z^2 = x^2 + y^2$ s $z = 1 + x + y$ nejblíže počátku. Řešte pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

(Vyjdou body $(-1 \pm \sqrt{2}/2, -1 \pm \sqrt{2}/2, -1 \pm \sqrt{2})$.)

6. Obdélník o obvodu $2s$ se otáčí kolem jedné strany. Najděte délky jeho stran takové, aby objem vzniklého rotačního tělesa byl největší.

(Vyjde $(s/3, 2s/3)$.)

Konec příkladů 2.

Cvičení 2: Příklad. Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Řešení. Vidíme, že funkce f má v počátku sedlový bod. Extrémy na U tedy musí f nabývat na hranici $A = \partial U$.

Nasadíme metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Označme $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Tedy A je množina nulových bodů funkce g.

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na $\mathbb{R}^2$;

2. pro každý bod $(x,y) \in B = (A \setminus \{(1,0),(-1,0)\})$ je $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in B$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy hledáme bod $P = (x, y) \in B$ a λ tak, aby

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy řešíme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned} 2x + \lambda 2x &= 0 \\ -2y + \lambda 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Spočteme řešení jako trojice (x, y, λ), výsledek je $(0, 1, 1)$, $(0, -1, -1)$.

Tedy body, které jsou podezřelé z nabývání extrému f na B, jsou body $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, -1)$.

Podobně můžeme zkoumat chování v bodech $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Zaměníme proměnné x a y ve větě o implicitních funkcích a dostaneme podezřelé body $P_3 = (1, 0)$, $P_4(-1, 0)$.

Jako bychom otočili souřadnicové osy.

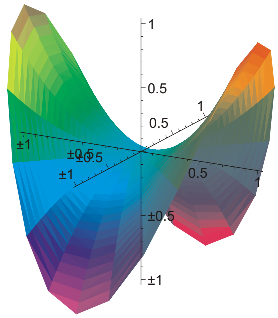
Přesný důkaz toho, které body jsou body ostrého lokálního minima, se zjistí elementární úvahou.

Celkově jsme tedy našli dvě lokální minima a dvě lokální maxima na A.

Pokud bychom hledali extrémy pouze na B, mohli jsme například v bodě P_1 hledat extrémy funkce $f + \lambda g = 2x^2 - 1$.

Takto tedy dostaneme body $(0, y)$, v nichž jsou lokální neostré extrémy. To potvrzuje existenci extrémů na B.

Obrázek



Konec cvičení 2.