EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

DEFINICE. Funkce f více proměnných. má v bodě $C \in \mathcal{D}(f)$ lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje okolí U bodu C takové, že $f(C)$ je maximální (resp. minimální) hodnota f na $U \cap \mathcal{D}(f)$.

Funkce f má v C lokální extrém, jestliže má v C lokální maximum nebo lokální minimum.

Absolutní maximum funkce f na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ je hodno ta $\max\{f(x,y); (x,y) \in A\}$. Podobně se definuje absolutní minimum, dohromady se nazývají absolutní extrémy.

Nahradí-li se v definici lokálních extrémů slovo *maximální* slovem *největší* (resp. slovo *minimální* slovem *nejmenší*), dostává se definice ostrých lokálních extrémů.

VĚTA. Funkce f definovaná na polootevřené množině A může mít lokální extrém pouze v následujících bodech:

1. v hraničním bodě A, patří-li do definičního oboru;
2. ve vnitřním bodě A, ve kterém f nemá některou z parciálních derivací 1.ř.;
3. ve vnitřním bodě A, kde má f všechny parciální derivace 1.ř. rovny 0.

DŮSLEDEK. Nechť v otevřené množině G má funkce f všechny parciální derivace 1.ř. Má-li f v bodě $C \in G$ lokální extrém, anulují se v tomto bodě parciální derivace 1.ř. (tedy i směrové derivace).

VĚTA. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P \in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

Označme $F(h,k)$ druhý diferenciál $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(P)$, což je kvadratická forma proměnných h, k.

Potom

1. Je-li F pozitivně definitní, nabývá f v P ostré lokální minimum.
2. Je-li F negativně definitní, nabývá f v P ostré lokální maximum.
3. Je-li F indefinitní, nenabývá f v P lokální extrém.
4. Je-li F semidefinitní, nelze o lokálním extrému f v P pomocí F rozhodnout.

Pomocný paraboloid hlídající graf funkce zespodu ukazuje na lokální minimum:

VĚTA. Kvadratická forma F z předchozí věty je

1. pozitivně definitní právě když
   $f_{xx}(P) > 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;
2. negativně definitní právě když
   $f_{xx}(P) < 0$ a $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$;
3. indefinitní právě když $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) < f_{xy}^2(P)$;
4. semidefinitní právě když $f_{xx}(P) \cdot f_{yy}(P) = f_{xy}^2(P)$;

DŮSLEDEK. Nechť má funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace 2.ř. v otevřené množině G a pro $P\in G$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(P)=\frac{\partial f}{\partial y}(P)=0$.

Jestliže $f_{xx}(P)\cdot f_{yy}(P) > f_{xy}^2(P)$, pak f má v bodě P ostrý lokální extrém (maximum pro $f_{xx}(P)<0$, minimum pro $f_{xx}(P)>0$).

Poznámky 1   Příklady 1   Otázky 1

Cvičení 1

1. Při zkoumání extrémů na polootevřené množině A se postupuje podobně jako v jednorozměrném případě. Nejdříve se zjistí kritické body uvnitř A.

2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde byly nejvýše dva hraniční body u intervalu, ve vícerozměrného případu jsou hranice nekonečné množiny.

3. Naštěstí však v praxi bývají tyto hranice většinou křivkami a tedy popsány spojitými funkcemi jedné proměnné. Dosazením těchto funkcí do zkoumané funkce se dostane funkce jedné proměnné a pro ni lze zjistit kritické body.

5. Je však nutné si uvědomit, že takto získané např. lokální minimum je lokálním minimem pouze pro hranici a nikoli pro množinu A.

6. V některých speciálních případech je možné zkoumáním funkce v okolí takového lokálního extrému vzhledem k hranici určit, zda je lokálním extrémem i vzhledem k A.

7. Nicméně, vždy lze srovnáním hodnot na všech získaných kritických bodech zjistit absolutní extrémy.

VĚTA. Nechť A je polootevřená omezená množina v rovině a její hranice patřící k A je grafem parametricky zadané křivky $x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in I$.

Pak absolutní maximum (minimum) spojité funkce f definované na A je maximální (resp. minimální) hodnota f na kritických bodech f uvnitř A a na kritických bodech funkce $f(\varphi(t),\psi(t)), t\in I$.

VĚTA. Nechť A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y)=0$, funkce f je definována na nějaké otevřené množině U obsahující A a platí:

1. f,g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;
2. pro každý bod $(x,y)\in A$ je buď $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\neq 0$ nebo $\frac{\partial q}{\partial y}(x,y)\neq 0$.

Má-li f v bodě $P\in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P)=0\,,\qquad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P)=0\,.$$

Důkaz.

Za předpokladů předchozí věty se funkce

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

nazývá Lagrangeova funkce a parametr λ Lagrangeův multiplikátor.

Nechť je A je grafem implicitně zadané křivky $g(x,y)=x+y-2$, funkce $f(x,y)=x^2+y^2$ je definována na otevřené množině $U=\mathbb{R}^2$. Hledáme extrémy f na A.

Vidíme, že platí:

1. f, g mají spojité parciální derivace prvního řádu na U;

2. pro každý bod $(x, y) \in A$ je $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Má-li f v bodě $P \in A$ lokální extrém, pak existuje reálné číslo λ tak, že

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy hledáme bod $P = (x, y) \in A$ a λ tak, aby

$$\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x}(P) = 0\,, \quad \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}(P) = 0\,, \quad g(P) = 0\,.$$

Tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Spočteme řešení $x = 1$, $y = 1$ a $\lambda = -2$.

Tedy bod, který je podezřelý z nabývání extrému f na A, je bod $P = (1, 1)$. Vzhledem k tomu, že funkce f je na A zdola omezená a není zhora omezená, našli jsme bod absolutního minima.

Protože derivace podle třetí proměnné funkce $F(x, y, \lambda)$ v příslušné kvadratické formě vypadnou, dostanou se následující postačující podmínky:

VĚTA. Za předpokladů předchozí věty se označí $H(h, k) = (h + k)^2 F(P)$. V kvadratické formě H se nahradí h nebo k druhou proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) = 0$ a získá se kvadratická forma $\tilde{H}(t) = at^2$ jedné proměnné.

1. Je-li $a > 0$, nabývá f v P ostré lokální minimum.

2. Je-li $a < 0$, nabývá f v P ostré lokální maximum.

3. Je-li $a = 0$, nelze o lokálním extrému f v P pomocí $\tilde{H}$ rozhodnout.

Důkaz.

Nechť např. $\frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$. Potom $h = -k\frac{g_x(P)}{g_y(P)}$ a koeficient a z předchozí věty se rovná

$$f_{xx} - 2f_{xy}\frac{g_x(P)}{g_y(P)} + f_{yy}(P)\frac{g_x^2(P)}{g_y^2(P)}\,.$$

Zkoumá-li se funkce tří proměnných, mohou pro vázané extrémy nastat dvě základní situace. Postupy jsou stejné, jako v předchozím případě a podrobnosti budou vynechány.

I. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ na množině A určené rovnicí $g(x, y, z) = 0$ se hledají extrémy funkce $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Předpokladem je nenulovost alespoň jedné z derivací g_x, g_y, g_z v každém bodě A (tj., hodnost 1 matice $\mathrm{grad} g$ v každém bodě A).

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ dvou proměnných, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h, k, l) = (h + k + l)^2 F(P)$ dosazením za jednu proměnnou z rovnice $h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P) + l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0$.

II. Pro extrémy funkce tří proměnných $f(x,y,z)$ na množině A určené rovnicemi $g(x,y,z)=0, h(x,y,z)=0$ se hledají extrémy funkce

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)\,.$$

Předpokladem je hodnost 2 matice s řádky $\mathrm{grad} g, \mathrm{grad} h$ v každém bodě A.

Nutnou podmínkou, aby bod P byl lokálním extrémem f na A, je tedy rovnost $\mathrm{grad} F = 0$.

Postačující podmínky pak dává definitnost kvadratické formy $\tilde{H}$ jedné proměnné, která vznikne z kvadratické formy tří proměnných $H(h,k,l)=(h+k+l)^2 F(P)$ dosazením za dvě proměnné z rovnic

$$h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P)+k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P)+l\,\frac{\partial g}{\partial z}(P)=0\,,$$

$$h\,\frac{\partial h}{\partial x}(P)+k\,\frac{\partial h}{\partial y}(P)+l\,\frac{\partial h}{\partial z}(P)=0\,.$$

Poznámky 2 Příklady 2 Cvičení 2