APLIKACE

V této části budou použita tvrzení z předchozích kapitol o funkcích více proměnných na různé úlohy, praktické i teoretické.

Následující úlohy lze zhruba rozdělit na geometrické, algebraické a úlohy popisující různé stavy v některých oblastech jiných věd, např. fyziky nebo ekonomie.

Budeme užiteční celému světu :-)

GEOMETRICKÉ ÚLOHY

Mezi typické úlohy patří hledání vzdálenosti mezi geometrickými objekty, sestrojení tečných rovin k ploše vyhovující daným podmínkám, najít geometrický objekt splňující dané podmínky, např. má jistý tvar nebo je vhodnou částí jiného objektu (např. vepsaný do koule) nebo má minimální velikost povrchu, největší objem, apod..

Například tvar střechy nad hlavou může způsobit drobné potíže při dešti.

Příklad. *Sestrojte tečnou rovinu koule $x^2+y^2+z^2=4y$, která je kolmá na roviny $x-y+z=2, x+y-2z=7$.*

Řešení. Tečná rovina k ploše $x^2+y^2-4y+z^2=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) má rovnici

$$2x_0(x-x_0)+(2y_0-4)(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0\,.$$

Jsou-li na sebe kolmé roviny, jsou na sebe kolmé i jejich normály.

Pro jistotu si to průběžně modelujte z plastelíny.

Normály ploch popsané implicitně jsou dány jejich gradienty.

V daném případě to jsou tedy vektory

$$(2x_0, 2y_0 - 4, 2z_0)\,, (1, -1, 1)\,, (1, 1, -2)$$

a skalární součin prvního vektoru s oběma zbývajícími musí být roven nule.

Tím se dostanou dvě rovnice:

$$\begin{aligned} x_0 - y_0 + z_0 &= -2 \\ x_0 + y_0 - 2z_0 &= 2\,. \end{aligned}$$

Třetí rovnicí je rovnice dané plochy, tj. povrchu koule.

Vyřešením těchto rovnic se dostanou body dotyku tečné roviny:

$$(\pm\sqrt{2/7}, 2 \pm 3\sqrt{2/7}, \pm 2\sqrt{2/7})\,.$$

Příklad. *Na svahu daném rovnicí $z = f(x, y)$ (jednotky pro x, y jsou v metrech) nalezněte ve výšce 100 metrů místa s nejprudší spádnicí.*

To jsou nejhustší místa na sjezdovce.

Příklad. *Najděte vzdálenost bodu $(1, 2, 2)$ od plochy $z = x^2 - y^2 + 8$.*

Řešení. Minimalizuje se funkce $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}$ za podmínky $z = x^2 - y^2 + 8$.

Je zřejmé, že minimum uvedené odmocniny je ve stejném bodě jako minimum výrazu pod odmocninou.

Bude se tedy hledat minimum funkce $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$ za uvedené podmínky.

Je dobré si uvědomit, že hledaný bod na ploše, který bude mít nejmenší vzdálenost od daného bodu, bude vždycky existovat!

Hledání bodu na ploše lze omezit na nějakou omezenou uzavřenou množinu, např. průnik plochy s koulí o středu v daném bodě a o poloměru, který by měl být tak velký, aby koule plochu protínala, a současně malý, ale aby ji protínala v malé množině.

Řeší se tedy soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2(x-1) - 2x\lambda &= 0 \\ 2(y-2) + 2y\lambda &= 0 \\ 2(z-2) + \lambda &= 0 \\ x^2 - y^2 - z + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Tyto rovnice je vhodné spočítat na počítači, který dá výsledek

$$x = .82013736, y = 2.561829673, z = 2.10965398, \lambda = -.21930795\,.$$

Nutno dodat, že uvedená soustava má více řešení. Ty ostatní ale leží mimo vhodně zvolenou kouli zmíněnou na začátku této úlohy.

Příklad.

Mezi kvádry s danou délkou tělesové úhlopříčky najděte kvádry s největším objemem.

Řešení. Nechť má úhlopříčka délku a a kvádr strany o délkách x, y, z.

Řešení dané úlohy tedy spočívá v hledání maxima funkce $V = xyz$ za podmínek $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ a $x > 0, y > 0, z > 0$.

Funkce V je spojitá a kladná na daném definičním oboru.

Pokud se jedna z proměnných blíží k 0, blíží se i hodnota V k 0. Funkce V tedy nemá na svém definičním oboru minimum.

Zvětší-li se definiční obor přidáním možnosti $x = 0, y = 0, z = 0$, je definiční obor funkce kompaktní množinou (průnik kompaktního intervalu $[0,a] \times [0,a] \times [0,a]$ s plochou $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$).

Maximum

Na této množině V nabývá svého maxima a nemůže to být v přidaných bodech definičního oboru.

může funkce V nabývat jen v bodech, pro které je

$$\begin{aligned} yz - \lambda 2x &= 0 \\ xz - \lambda 2y &= 0 \\ xy - \lambda 2z &= 0 \end{aligned}$$

pro nějaké λ.

Protože x, y, z jsou nenulové, vyplývá z rovnic vztah $x = y = z$ a tato hodnota se musí rovnat $a/\sqrt{3}$, což plyne z dané podmínky.

Příklad.

Protože výsledkem je jediný bod, kde může V nabývat svého lokálního extrému a z předchozí diskuse je známo, že v nějakém bodě V maxima nabývá, musí to být získaný bod.

Najděte kvádr (se stranami rovnoběžnými s osami souřadnic) maximálního objemu vepsaného do elipsoidu $x^2 + y^2/4 + z^2/8 = 1$.

Řešení. Vrcholy kvádru budou zřejmě ležet na elipsoidu a kvádr bude symetrický okolo počátku.

Jedním vrcholem (x, y, z) kvádru (např. pro $x > 0, y > 0, z > 0$) jsou ostatní vrcholy jednoznačně dány. Objem kvádru se pak rovná $8xyz$.

Hledá se tedy, ve kterém bodě má funkce $f(x, y, z) = xyz$ maximum za podmínek $x^2 + y^2/4 + z^2/8 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.

Pomocí Lagrangeových multiplikátorů se dostanou rovnice

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda x &= 0 \\ xz + y\lambda/2 &= 0 \\ xy + z\lambda/4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Odtud vyplývají rovnosti $2x^2 = y^2/2 = z^2/4$.

Proč nemůže být $\lambda = 0$?.

Dosazením do rovnice elipsoidu se dostanou body $(1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2\sqrt{2}/\sqrt{3})$.

Úsudkem lze snadno zjistit, že f dosahuje své maximum, a proto to musí být v získaném bodě.

ALGEBRAICKÉ ÚLOHY

Do této části patří důkazy mnoha nerovností, vztahů mezi čísly a jejich různými rozklady. Lze sem zařadit i prokládání přímky danými body nebo metodu nejmenších čtverců.

Příklad. *Ukažte, že geometrický průměr n kladných čísel není nikdy větší než jejich aritmetický průměr.*

Řešení. Položí se

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^{n} x_i}$$

pro kladná čísla x_i.

Zřejmě stačí předpokládat $n \geq 2$.

Definičním oborem funkce f je otevřená množina a pro získání možných kandidátů na body, kde má tato funkce minimum, stačí zjistit, kde se anulují parciální derivace (pro jednoduchost se označí $X = \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^{n} x_i}$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1 - n \cdot \frac{1}{n} \frac{X}{x_i} = 1 - \frac{X}{x_i}\,.$$

Z rovnic snadno vyplývá, že všechna čísla x_i musejí být stejná a rovnají se tedy nějakému kladnému číslu a.

Příklad.

V tomto bodě je hodnota f rovna 0 a zbývá ukázat, že tam má f minimum.

Rozložte dané kladné číslo A na násobek n kladných čísel tak, aby jejich součet byl nejmenší.

Řešení. Označí se $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ a hledá se minimum f za podmínek $\Pi_{i=1}^{n} x_i = A, x_i > 0$ pro každé i.

Při použití Lagrangeových multiplikátorů se řeší $n + 1$ rovnic

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \frac{A}{x_i} &= 0 \text{ pro } i = 1, .., n \\ \Pi_{i=1}^{n} x_i &= A\,. \end{aligned}$$

Z prvních n rovnic vyplývá, že všechna x_i jsou si rovna, a tedy podle poslední rovnice se rovnají $\sqrt[n]{A}$.

Zbývá ukázat, že v získaném bodě nabývá f svého minima $n\sqrt[n]{A}$. To vyplývá např. z nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem: $n\sqrt[n]{A} \leq n\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^{n} x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = f(x_1, ..., x_n)\,.$

Příklad.

Dokázali jsme, že i algebraici koukají.

Pro body $(1, 2), (2, 2), (4, 3)$ v rovině najděte takovou přímku, že součet čtverců vzdáleností oněch bodů k přímce je nejmenší.

Řešení. Hledají se čísla a, b taková, že součet čtverců vzdáleností daných bodů od přímky $ax + b$ je nejmenší (budeme nejdříve předpokládat, že přímka není kolmá na osu x).

Vzdálenost bodu (x_0, y_0) od této přímky je $|ax_0 - y_0 + b|$.

Hledají se tedy čísla a, b tak, aby funkce $f(a, b) = (a+b-2)^2 + (2a+b-2)^2 + (4a+b-3)^2$ měla minimální hodnotu.

Při předpokladu $a > 0, b > 0$ mohou kritické body být jen v bodech, kde se anulují parciální derivace funkce f (ty existují všude).

Dostávají se dvě rovnice:

$$\begin{aligned} 21a + 7b &= 18 \\ 7a + 3b &= 7\,, \end{aligned}$$

které mají řešení $a = 5/14, b = 3/2$.

Vzdálenost daného bodu od přímky $y = 5x/14 + 3/2$ je rovna zhruba 0,07.

Nyní je nutné se podívat na hraniční případy, tedy na hodnoty $a = 0, b = 0$.

Je-li $a = 0, b > 0$, pak $f(0, b) = (b - 2)^2 + (b - 2)^2 + (b - 3)^2$ může mít extrémy jen pro $b = 7/3$ (tam, kde se derivace podle b anuluje) a pak je vzdálenost daného bodu od přímky $y = 7/3$ rovna 2/3.

Je-li $a > 0, b = 0$, pak $f(a, 0) = ((a - 2)^2 + (2a - 2)^2 + (4a - 3)^2$ může mít extrémy jen pro $a = 6/7$ a pak je vzdálenost daného bodu od přímky $y = 6x/7$ rovna zhruba 1,57.

Zbývá uvážit případ, kdy je přímka kolmá na osu x, tj. tvaru $x = c$.

Pak se minimalizuje funkce $f(c) = (1 - c)^2 + (2 - c)^2 + (4 - c)^2$. Tato funkce může mít extrém jen pro bod $c = 7/3$ a v tomto bodě je vzdálenost danmého bodu od přímky $x = 7/3$ rovna 42/9.

Výsledkem je tedy přímka $y = 5x/14 + 3/2$.

Případy $a = 0$ a poslední případ šly snadno vyloučit úsudkem. Případ $b = 0$ šel zahrnout do prvního základního případu. Ale nemusí tomu tak být vždy.

Hledaná přímka má tedy rovnici $y = x + 1$.

Zkuste prozkoumat případ, že se hledá přímka taková, že součet vzdáleností (nikoli čtverců vzdáleností) daných bodů od ní je nejmenší.

Metoda nejmenších čtverců

Jsou dány 3 rovnice $f_i(x, y) = 0, i = 1, 2, 3$ o dvou proměnných.

Protože dané funkce mají dvě proměnné, obvykle tyto rovnice nemají řešení.

Nicméně se lze ptát, zda existují x, y tak, aby v nějakém smyslu byly hodnoty f_i v těchto bodech co nejblíže 0.

Je nutné specifikovat, v jakém smyslu se myslí ono *co nejblíže*.

V předchozím příkladě se myslel buď součet nebo součet čtverců.

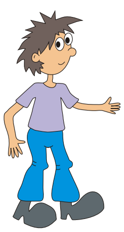
Druhý případ bývá důležitější.

Znamená to, že se hledá bod (x, y) ve kterém má funkce $f_1^2(x, y) + f_2^2(x, y) + f_3^2(x, y)$ nejmenší hodnotu.
Řešení nemusejí být jednoduchá a často se provádějí jen numericky.
Samozřejmě se v praxi většinou vyskytují úlohy s větším počtem rovnic a větším počtem proměnných.

Příklad. Řešte předchozí úlohu pro rovnice

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 1 \\ x - y &= -1 \\ 2x + 4y &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešení. Hledají se tedy x, y tak, aby hodnota $(4x + 2y - 1)^2 + (x - y + 1)^2 + (2x + 4y)^2$ byla co nejmenší.



Já jeden nejmenší čtverec mám. Ale nemůžu ho najít.

FYZIKÁLNÍ A JINÉ ÚLOHY.

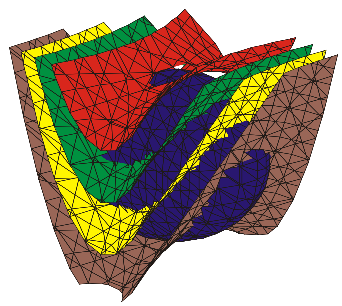
V této části by se dalo zařadit mnoho úloh, ale pro skoro všechny je nutné znát nějaké fyzikální, ekonomické, chemické, atd. zákonitosti, dané nějakými rovnostmi nebo nerovnostmi.

Nejzajímavější je tyto rovnosti a nerovnosti sestavovat, což zde ale není možné dělat.

Pak nezbývá, než ony zákonitosti zde napsat a tím se z úlohy stává čistě matematická úloha (viz např. následující úlohu) a ty byly řešeny v předchozích částech.

Příklad. *Těleso tvaru elipsoidu $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ letělo atmosférou a rozložení teploty na jeho povrchu bylo rovno $8x^2 + 4xy - 16z + 600$. Najděte místo na tělese s největší teplotou.*

Řešení. Na obrázku je modrý elipsoid řezaný plochami odpovídajícími bodům se stejnou teplotou.



Příklad. *Podle Fermatova principu se světlo šíří tak, aby z daného bodu dospělo do cíle v nejkratším čase.*

Nechť jsou dána dvě prostředí rozdělená plochou $z = f(x, y)$ a dva body A, B v prostoru, přičemž A leží nad plochou a B pod plochou.

Znáte-li rychlosti světla v obou prostředích, uveďte postup jak zjistit cestu paprsku z A do B.

Cvičení 1: Příklad. Řešte optimalizační úlohy s pomocí Lagrangeových multiplikátorů:

1. Nejbližší bod na přímce.
2. Nejbližší bod na rovině.
3. Nejlevnější konzervu s daným objemem
4. Nejlevnější bazén s daným objemem
5. Nejlevnější krabičku s daným objemem
6. Největší obdélník vepsaný do kruhu

Konec cvičení 1.

Učení 1:

Nejvíc mě u Lagrangeových multiplikátorů děsí ta vazba.

Konec učení 1.