INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

V předchozích kapitolách bylo uvedeno mnoho příkladů na použití integrálu funkcí jedné proměnné.

Je zřejmě vhodné mít k dispozici podobný nástroj i pro funkce více proměnných. Vytvoříme si jej.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

V předchozích kapitolách bylo uvedeno mnoho příkladů na použití integrálu funkcí jedné proměnné.

Je zřejmě vhodné mít k dispozici podobný nástroj i pro funkce více proměnných. Vytvoříme si jej.

Na to se těším.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integrály funkcí více proměnných jsou zobecněním jednorozměrného případu. Všimněte si, kde se objeví něco opravdu nového.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integrály funkcí více proměnných jsou zobecněním jednorozměrného případu. Všimněte si, kde se objeví něco opravdu nového.

Budu se snažit. Podobně jako u funkcí jedné proměnné, lze i integrál funkcí více proměnných definovat více způsoby.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integrál funkcí jedné proměnné byl definován jednak čistě analyticky (pomocí primitivních funkcí, tedy pomocí derivace) a jednak geometricky (pomocí limity obsahů jistých ploch).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integrál funkcí jedné proměnné byl definován jednak čistě analyticky (pomocí primitivních funkcí, tedy pomocí derivace) a jednak geometricky (pomocí limity obsahů jistých ploch).

ANO. To byly fundamentální myšlenky, které tvoří jednorozměrný integrál!!!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro funkce více proměnných nelze použít přístup pomocí primitivních funkcí, geometrický přístup však použít lze. Jsou však i jiné možnosti, např. pomocí teorie míry nebo pomocí rozšiřování jistých lineárních zobrazení na jistých prostorech funkcí.

Na sta je podob integrování ...

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

My použijeme přístup pomocí již definovaného integrálu funkcí jedné proměnné. Pak se ukáže, že pro funkce používané v praxi je tento přístup ekvivalentní geometrickému přístupu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

My použijeme přístup pomocí již definovaného integrálu funkcí jedné proměnné. Pak se ukáže, že pro funkce používané v praxi je tento přístup ekvivalentní geometrickému přístupu.

Podobně jako u jedné proměnné slouží zvolená definice pro výpočet integrálů, kdežto geometrický přístup slouží k objasnění použití integrálů.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

My použijeme přístup pomocí již definovaného integrálu funkcí jedné proměnné. Pak se ukáže, že pro funkce používané v praxi je tento přístup ekvivalentní geometrickému přístupu.

Podobně jako u jedné proměnné slouží zvolená definice pro výpočet integrálů, kdežto geometrický přístup slouží k objasnění použití integrálů.

Integrál tedy je možné definovat různými způsoby. A to se opravdu děje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Klídek. Pro počítání příkladů je to zpravidla jedno. A tam, kde to není jedno se musí definice integrálu specifikovat.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

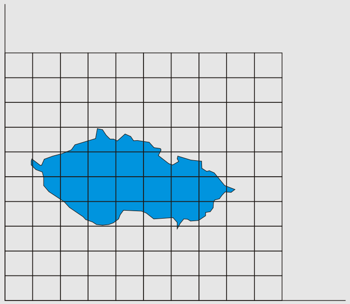
V kapitole o aplikacích integrálu byl uveden postup pro výpočet obsahu obsahu podmnožin roviny nebo objemu objemu podmnožin prostoru, což lze chápat jako výpočet integrálu funkce dvou nebo tří proměnných, která je na dané množině identicky rovna 1 a jinde rovna 0. Tento postup lze snadno upravit pro obecné funkce.

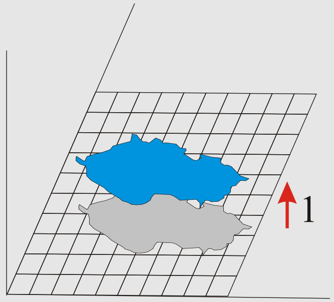
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

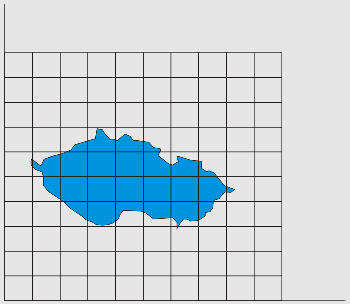
V kapitole o aplikacích integrálu byl uveden postup pro výpočet obsahu obsahu podmnožin roviny nebo objemu objemu podmnožin prostoru, což lze chápat jako výpočet integrálu funkce dvou nebo tří proměnných, která je na dané množině identicky rovna 1 a jinde rovna 0. Tento postup lze snadno upravit pro obecné funkce.

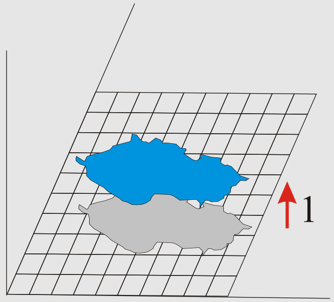
Používá se trik, že objem tělěsa je roven "základna x výška".

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9




1





Republika ve výšce 1 odpovídá integraci funkce $f(x, y) = 1$ na půdorysu republiky.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující výklad bude prováděn pro funkce dvou proměnných.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující výklad bude prováděn pro funkce dvou proměnných.

A vy si příslušné definice a tvrzení modifikujte i pro tři proměnné (popř. pro n proměnných, pokud je vám nejlépe ve velkém kolektivu ...).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA INTERVALECH

Oproti reálné přímce je v rovině a prostoru větší variabilita množin, přes které je vhodné integrál definovat.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA INTERVALECH

Oproti reálné přímce je v rovině a prostoru větší variabilita množin, přes které je vhodné integrál definovat.

V této části se seznámíte s integrací na intervalech. Potom bude integrál zadefinován i na obecnějších množinách.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA INTERVALECH

Oproti reálné přímce je v rovině a prostoru větší variabilita množin, přes které je vhodné integrál definovat.

V této části se seznámíte s integrací na intervalech. Potom bude integrál zadefinován i na obecnějších množinách.

DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x,y)$ definovaná na intervalu $I=(a,b)\times(c,d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA INTERVALECH

Oproti reálné přímce je v rovině a prostoru větší variabilita množin, přes které je vhodné integrál definovat.

V této části se seznámíte s integrací na intervalech. Potom bude integrál zadefinován i na obecnějších množinách.

DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x,y)$ definovaná na intervalu $I=(a,b)\times(c,d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

Jestliže $\int_I f$ je konečný, říká se, že $\int_I f$ *konverguje*.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímo z předchozí definice integrálu plynou následující pozorování (viz *Otázky*).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Přímo z předchozí definice integrálu plynou následující pozorování (viz *Otázky*).

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $\int_I f$ konverguje a g je funkce na I, která je totožná s f na vnitřku intervalu I. Pak $\int_I g$ konverguje a rovná se $\int_I f$.
2. Nechť $A \subset B$ jsou intervaly v rovině a funkce f definovaná na B má nulové hodnoty na $B \setminus A$. Pak
$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
jakmile má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Snadno se dokáží základní vlastnosti integrálu v rovině. Některé vlastnosti obdobné těm z funkcí jedné proměnné nelze převést (např. integrace po částech), některé jsou odloženy na později (např. substituce).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Snadno se dokáží základní vlastnosti integrálu v rovině. Některé vlastnosti obdobné těm z funkcí jedné proměnné nelze převést (např. integrace po částech), některé jsou odloženy na později (např. substituce).

Ta substituce je na vícerozměrné integraci nejkouzelnější. Už se těším.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Snadno se dokáží základní vlastnosti integrálu v rovině. Některé vlastnosti obdobné těm z funkcí jedné proměnné nelze převést (např. integrace po částech), některé jsou odloženy na později (např. substituce).

Ta substituce je na vícerozměrné integraci nejkouzelnější. Už se těším.

Doufám, že i ta bude po částech.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řekneme, že dva intervaly v rovině se nepřekrývají, jestliže jejich průnik neobsahuje žádný interval v rovině (viz též *Otázky*).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

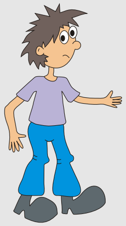
Řekneme, že dva intervaly v rovině se nepřekrývají, jestliže jejich průnik neobsahuje žádný interval v rovině (viz též *Otázky*).

VĚTA. Nechť I je interval v rovině.

1. Integrál na I je lineární, tj. pro libovolné funkce f, g na I a pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g\,,$$
jakmile má pravá strana smysl.
2. Nechť I je sjednocením nepřekrývajících se intervalů $J_1, \ldots, J_n$ a f je funkce definovaná na I. Potom
$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
jakmile má jedna strana smysl.
3. Jsou-li g, h funkce definované na I a $h \le g$ na I pak
$$\int_I h \le \int_I g\,,$$
jakmile mají obě strany smysl.

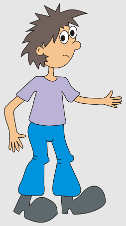
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tohle by opravdu mělo platit?

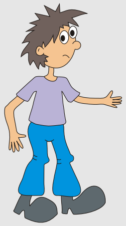
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tohle by opravdu mělo platit?

No jo. Je to trivialita.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



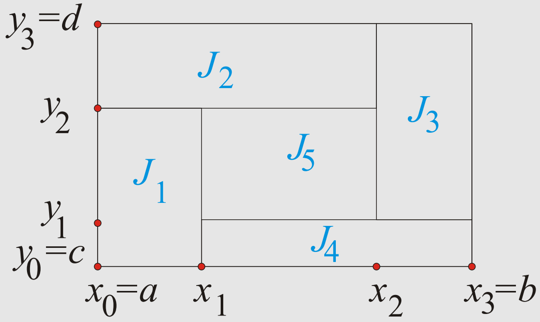
Tohle by opravdu mělo platit?

No jo. Je to trivialita.

Důkaz. Důkaz prvního a posledního tvrzení je ponechán čtenáři.

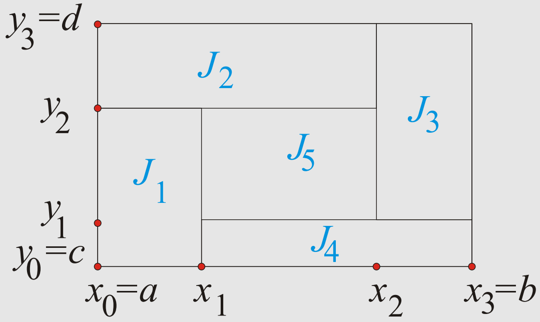
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

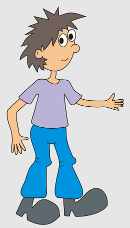
Ve druhém tvrzení se pro jednoduchost důkaz omezí na uzavřený interval I. Vezme se dělení intervalu (a, b) tvořené průměty kolmých stran intervalů J_i, např. vyjdou body $a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} = b$. Podobně na intervalu (c, d) vyjde dělení $c = x_0 < y_1 < ... < y_l < y_{y+1} = d$. Nyní je I sjednocením nepřekrývajících se intervalů $I_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], i = 0, ..., K, j = 0, ..., l$. Tento systém intervalů má vlastnost, že průměty na osy libovolných dvou intervalů se buď nepřekrývají nebo jsou totožné.



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ve druhém tvrzení se pro jednoduchost důkaz omezí na uzavřený interval I. Vezme se dělení intervalu (a, b) tvořené průměty kolmých stran intervalů J_i, např. vyjdou body $a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} = b$. Podobně na intervalu (c, d) vyjde dělení $c = x_0 < y_1 < ... < y_l < y_{y+1} = d$. Nyní je I sjednocením nepřekrývajících se intervalů $I_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], i = 0, ..., K, j = 0, ..., l$. Tento systém intervalů má vlastnost, že průměty na osy libovolných dvou intervalů se buď nepřekrývají nebo jsou totožné.





Teď jsem pochopil to nepře-krývání.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro takto uspořádané intervaly se druhé tvrzení dokáže jednoduše přímo z definice dvojrozměrného integrálu, použitím součtového vzorce pro zobecněné Newtonovy integrály.

Pro takto uspořádané intervaly se druhé tvrzení dokáže jednoduše přímo z definice dvojrozměrného integrálu, použitím součtového vzorce pro zobecněné Newtonovy integrály.

Platí tedy $\int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \sum_{i,j=0}^{k,l} \int_{I_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro takto uspořádané intervaly se druhé tvrzení dokáže jednoduše přímo z definice dvojrozměrného integrálu, použitím součtového vzorce pro zobecněné Newtonovy integrály.

Platí tedy $\int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \sum_{i,j=0}^{k,l} \int_{I_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

Každý interval J_m je nyní pokryt některými nepřekrývajícími se intervaly $I_{i,j}, i, j \in K_m$, které mají opět předchozí vlastnost průmětů, a tedy

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro takto uspořádané intervaly se druhé tvrzení dokáže jednoduše přímo z definice dvojrozměrného integrálu, použitím součtového vzorce pro zobecněné Newtonovy integrály.

Platí tedy $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j=0}^{k,l} \int_{I_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Každý interval J_m je nyní pokryt některými nepřekrývajícími se intervaly $I_{i,j}, i,j \in K_m$, které mají opět předchozí vlastnost průmětů, a tedy

$\int_{J_m} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j\in K_m} \int_{I_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. ◇

Poznámky 1 :

1. V definici dvojrozměrného integrálu lze místo zobecněného Newtonova integrálu použít i jiné integrály (Riemannův, J–integrál, K–integrál nebo L–integrál).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

1. V definici dvojrozměrného integrálu lze místo zobecněného Newtonova integrálu použít i jiné integrály (Riemannův, J–integrál, K–integrál nebo L–integrál).

⬇

Podle obecnosti použitých integrálů se dostane obecnost příslušného integrálu funkcí dvou proměnných.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 1 :

1. V definici dvojrozměrného integrálu lze místo zobecněného Newtonova integrálu použít i jiné integrály (Riemannův, J–integrál, K–integrál nebo L–integrál).

Podle obecnosti použitých integrálů se dostane obecnost příslušného integrálu funkcí dvou proměnných.

V tomto textu (ale většinou i v praxi) postačí uvažovat zobecněný Newtonův integrál.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pro výsledek integrace je jedno, jestli je integrovaná funkce definovaná na hranici nebo nikoli. Její hodnoty na hranici lze měnit bez vlivu na integraci.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pro výsledek integrace je jedno, jestli je integrovaná funkce definovaná na hranici nebo nikoli. Její hodnoty na hranici lze měnit bez vlivu na integraci.

Vzhledem k použitému integrálu je možné, aby integrovaná funkce nebyla definovaná na malé množině uvnitř intervalu anebo lze na této malé množině hodnoty funkce změnit. Hodnotu integrálu to neovlivní.

2. Pro výsledek integrace je jedno, jestli je integrovaná funkce definovaná na hranici nebo nikoli. Její hodnoty na hranici lze měnit bez vlivu na integraci.

Vzhledem k použitému integrálu je možné, aby integrovaná funkce nebyla definovaná na malé množině uvnitř intervalu anebo lze na této malé množině hodnoty funkce změnit. Hodnotu integrálu to neovlivní.

Co to ale znamená „malá množina"?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pro výsledek integrace je jedno, jestli je integrovaná funkce definovaná na hranici nebo nikoli. Její hodnoty na hranici lze měnit bez vlivu na integraci.

Vzhledem k použitému integrálu je možné, aby integrovaná funkce nebyla definovaná na malé množině uvnitř intervalu anebo lze na této malé množině hodnoty funkce změnit. Hodnotu integrálu to neovlivní.

Co to ale znamená „malá množina"?

Je potřeba, aby na intervalu (a, b) existovalo jen konečně mnoho bodů p, kde $\int_c^d f(p, y)\,\mathrm{d}y$ nebude mít smysl (např. $f(p, y)$ není definováno) a pro každé jiné $p \in (a, b)$ existuje jen konečně mnoho bodů $q \in (c, d)$ takových, že $f(p, q)$ není definováno (nebo v těchto bodech není $f(p, y)$ spojitá).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pro výsledek integrace je jedno, jestli je integrovaná funkce definovaná na hranici nebo nikoli. Její hodnoty na hranici lze měnit bez vlivu na integraci.

Vzhledem k použitému integrálu je možné, aby integrovaná funkce nebyla definovaná na malé množině uvnitř intervalu anebo lze na této malé množině hodnoty funkce změnit. Hodnotu integrálu to neovlivní.

Co to ale znamená „malá množina"?

Je potřeba, aby na intervalu (a,b) existovalo jen konečně mnoho bodů p, kde $\int_c^d f(p,y)\,\mathrm{d}y$ nebude mít smysl (např. $f(p,y)$ není definováno) a pro každé jiné $p \in (a,b)$ existuje jen konečně mnoho bodů $q \in (c,d)$ takových, že $f(p,q)$ není definováno (nebo v těchto bodech není $f(p,y)$ spojitá).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Takováto malá množina může být velmi divoká.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je lépe předpokládat, že má tvar nějaké jednoduché křivky (např. konečné sjednocení oblouků). Např. $f(x, y)$ může být spojitá v intervalu I kromě hranice menšího intervalu J vloženého do I.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je lépe předpokládat, že má tvar nějaké jednoduché křivky (např. konečné sjednocení oblouků). Např. $f(x, y)$ může být spojitá v intervalu I kromě hranice menšího intervalu J vloženého do I.

⇓

To může být případ druhého tvrzení v Pozorování, kde se hodnoty funkce na hranici menšího intervalu změní na nulu.

⇓

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je lépe předpokládat, že má tvar nějaké jednoduché křivky (např. konečné sjednocení oblouků). Např. $f(x, y)$ může být spojitá v intervalu I kromě hranice menšího intervalu J vloženého do I.

⬇

To může být případ druhého tvrzení v Pozorování, kde se hodnoty funkce na hranici menšího intervalu změní na nulu.

⬇

Při větší pozornosti lze dokonce uvažovat i nekonečně mnoho uvedených špatných bodů, ale musí být nějak hezky rozloženy.

⬇

Je lépe předpokládat, že má tvar nějaké jednoduché křivky (např. konečné sjednocení oblouků). Např. $f(x, y)$ může být spojitá v intervalu I kromě hranice menšího intervalu J vloženého do I.

To může být případ druhého tvrzení v Pozorování, kde se hodnoty funkce na hranici menšího intervalu změní na nulu.

Při větší pozornosti lze dokonce uvažovat i nekonečně mnoho uvedených špatných bodů, ale musí být nějak hezky rozloženy.

Je to podobná (jen o něco složitější) situace jako u zobecněného Newtonova integrálu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Z druhého tvrzení první věty vyplývá možnost definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se intervalů:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Z druhého tvrzení první věty vyplývá možnost definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se intervalů:

Nechť $\{J_i\}_{i=1}^n$ *je systém nepřekrývajících se intervalů a* A *je jejich sjednocení. Pak se definuje* $\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3. Z druhého tvrzení první věty vyplývá možnost definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se intervalů:

⬇

Nechť $\{J_i\}_{i=1}^n$ *je systém nepřekrývajících se intervalů a* A *je jejich sjednocení. Pak se definuje* $\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

⬇

Jestliže je i množina A intervalem, pak je tato definice v souladu s již uvedenou definicí integrálu na intervalu.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Z druhého tvrzení první věty vyplývá možnost definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se intervalů:

⬇

Nechť $\{J_i\}_{i=1}^n$ *je systém nepřekrývajících se intervalů a* A *je jejich sjednocení. Pak se definuje* $\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

⬇

Jestliže je i množina A intervalem, pak je tato definice v souladu s již uvedenou definicí integrálu na intervalu.

⬇

A chybělo málo aby se to nepovedlo.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec poznámek 1.

Příklady 1 :

Zkontrolujte (v prvním integrálu je $I = (1,2) \times (3,4)$, ve druhém $I = (1,3) \times (2,5)$ a ve třetím $I = (0,1) \times (0,1)$):

$$\int_I \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \int_1^2 \Big(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\Big)\,\mathrm{d}x = \log\frac{25}{24}\,,$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Zkontrolujte (v prvním integrálu je $I = (1,2) \times (3,4)$, ve druhém $I = (1,3) \times (2,5)$ a ve třetím $I = (0,1) \times (0,1)$):

$$\int_I \frac{\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{(x+y)^2} = \int_1^2 \Big(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\Big)\,\mathrm{dx} = \log\frac{25}{24}\,,$$

$$\int_I \big(5x^2y - 2y^3\big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} == \int_1^3 \Big(\frac{105x^2}{2} - \frac{609}{2}\Big)\,\mathrm{dx} = -154\,,$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

Zkontrolujte (v prvním integrálu je $I = (1,2) \times (3,4)$, ve druhém $I = (1,3) \times (2,5)$ a ve třetím $I = (0,1) \times (0,1)$):

$$\int_I \frac{\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{(x+y)^2} = \int_1^2 \Big(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\Big)\,\mathrm{dx} = \log \frac{25}{24}\,,$$

⬇

$$\int_I \big(5x^2y - 2y^3\big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} == \int_1^3 \Big(\frac{105x^2}{2} - \frac{609}{2}\Big)\,\mathrm{dx} = -154\,,$$

⬇

$$\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 \pi x/4\,\mathrm{dx} = \pi/12\,.$$

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 1 :

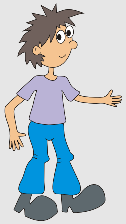
Zkontrolujte (v prvním integrálu je $I=(1,2)\times(3,4)$, ve druhém $I=(1,3)\times(2,5)$ a ve třetím $I=(0,1)\times(0,1)$):

$$\int_I \frac{\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{(x+y)^2} = \int_1^2 \Big(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\Big)\,\mathrm{dx} = \log\frac{25}{24}\,,$$

$$\int_I \big(5x^2y - 2y^3\big)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} == \int_1^3 \Big(\frac{105x^2}{2} - \frac{609}{2}\Big)\,\mathrm{dx} = -154\,,$$

$$\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 \pi x/4\,\mathrm{dx} = \pi/12\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Integrovat jsem nezapomněl.

Konec příkladů 1.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že platí ($I = (a,b) \times (c,d)$, g je funkce na (a,b), h je funkce na (c,d)):

$$\int_I g(x)h(y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \int_c^d h(y)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile pravá strana existuje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že platí ($I = (a,b) \times (c,d)$, g je funkce na (a,b), h je funkce na (c,d)):

$$\int_I g(x)h(y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \int_c^d h(y)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile pravá strana existuje.

2 Ukažte, že $\int_I \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ je obsah obdélníku I.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 1 :

1. Ukažte, že platí ($I = (a,b) \times (c,d)$, g je funkce na (a,b), h je funkce na (c,d)):

$$\int_I g(x)h(y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \int_c^d h(y)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile pravá strana existuje.

2 Ukažte, že $\int_I \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ je obsah obdélníku I.

3. Označí-li se $\mu(I)$ obsah intervalu I, pak platí

$$\inf\{f(x,y); (x,y) \in I\}\mu(I) \le \int_I f \le \sup\{f(x,y); (x,y) \in I\}\mu(I)\,,$$

pokud $\int_I f$ existuje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Dokažte, že

$$\lim_n \frac{\int_{J_n} f}{\mu(J_n)} = f(x,y)\,,$$

jestliže $\int_{J_n} f$ existují a J_n jsou otevřené intervaly obsahující bod (x, y), jejichž strany konvergují monotónně k 0.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

4. Dokažte, že

$$\lim_n \frac{\int_{J_n} f}{\mu(J_n)} = f(x,y)\,,$$

jestliže $\int_{J_n} f$ existují a J_n jsou otevřené intervaly obsahující bod (x,y), jejichž strany konvergují monotónně k 0.

5. Nechť $a < \alpha < \beta < b$ a $c < \gamma < \delta < d$, $I = (a,b) \times (c,d)$, $J = (\alpha,\beta) \times (\gamma,\delta)$ a funkce f je definovaná na I a rovná 0 na $I \setminus J$. Ukažte, že potom $\int_I f = \int_J f$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Nechť F je spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ a její druhá smíšená derivace F_{xy} je na I rovna f. Ukažte, že potom

$$\int_I f = F(a, c) - F(b, c) + F(b, d) - F(a, d)\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Nechť F je spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$ a její druhá smíšená derivace F_{xy} je na I rovna f. Ukažte, že potom

$$\int_I f = F(a,c) - F(b,c) + F(b,d) - F(a,d)\,.$$

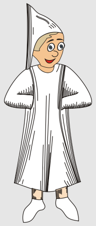
TADY SE NĚCO DĚJE!!!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. Nechť F je spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ a její druhá smíšená derivace F_{xy} je na I rovna f. Ukažte, že potom

$$\int_I f = F(a, c) - F(b, c) + F(b, d) - F(a, d)\,.$$

TADY SE NĚCO DĚJE!!!



Snažil jsem se …

Konec otázek 1.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte integrál z funkce $f(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{x}$ na intervalu $I = (0,1) \times (0,1)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte integrál z funkce $f(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{x}$ na intervalu $I = (0,1) \times (0,1)$.

⬇

Řešení. Bude se integrovat přes čtvereček.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte integrál z funkce $f(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{x}$ na intervalu $I = (0,1) \times (0,1)$.

Řešení. Bude se integrovat přes čtvereček.

Kam na to lidi chodí ...

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte integrál z funkce $f(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{x}$ na intervalu $I = (0,1) \times (0,1)$.

⬇

Řešení. Bude se integrovat přes čtvereček.

⬇

Kam na to lidi chodí ...

⬇

Z aditivity integrálu máme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy + \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 1 :

Příklad. Spočtěte integrál z funkce $f(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{x}$ na intervalu $I = (0,1) \times (0,1)$.

⬇

Řešení. Bude se integrovat přes čtvereček.

⬇

Kam na to lidi chodí ...

⬇

Z aditivity integrálu máme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy + \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podle definice je uvedený součet integrálů roven

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 2xy \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{x} \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy postupným integrováním dostáváme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy + \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(+\infty) = +\infty.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy postupným integrováním dostáváme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy + \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(+\infty) = +\infty.$$

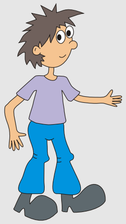
Podle zavedené terminologie tedy integrál existuje, ale nekonverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy postupným integrováním dostáváme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy + \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(+\infty) = +\infty.$$

Podle zavedené terminologie tedy integrál existuje, ale nekonverguje.



To vždycky popletu, alespoň si to myslím ;-)

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál z funkce $f(x,y) = -\log(x)\log(y)$ na intervalu $I = (0,1)\times(0,1)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál z funkce $f(x,y) = -\log(x)\log(y)$ na intervalu $I = (0,1)\times(0,1)$.

Řešení. Podle definice platí

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočítejte integrál z funkce $f(x,y) = -\log(x)\log(y)$ na intervalu $I = (0,1)\times(0,1)$.

Řešení. Podle definice platí

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$

Postupným integrováním dostáváme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = -1.$$

Příklad. Spočítejte integrál z funkce $f(x, y) = -\log(x)\log(y)$ na intervalu $I = (0, 1)\times(0, 1)$.

Řešení. Podle definice platí

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$

Postupným integrováním dostáváme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = -1.$$

Využili znalost jednorozměrného interálu

$$\int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = -1,$$

který se spočte snadno metodou per partes.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ani při integrování se nesmí usnout . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ani při integrování se nesmí usnout . . .

Ani jsem se o to nesnažil . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 1.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

V části o existenci Newtonových integrálů bylo ukázáno, že integrál z omezené spojité funkce na omezeném intervalu konverguje, tedy existuje a je konečný.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

V části o existenci Newtonových integrálů bylo ukázáno, že integrál z omezené spojité funkce na omezeném intervalu konverguje, tedy existuje a je konečný.

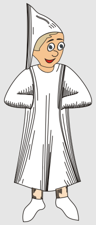
To je klíčová záležitost. Dokážeme si to i pro vícerozměrný integrál.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li dána omezená spojitá funkce f na omezeném intervalu I v rovině, měl by integrál z f přes I konvergovat. Všechny vnitřní integrály $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}$ konvergují a rovnají se nějakému číslu závisejícímu na x, označí se $g(x)$. Aby bylo možné opět použít uvedenou existenční větu pro funkce jedné proměnné na $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$, je nutné vědět, že g je na (a,b) spojitá a omezená. Omezenost je zřejmá a spojitost je dokázána v kapitole o integrálech s parametrem.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je-li dána omezená spojitá funkce f na omezeném intervalu I v rovině, měl by integrál z f přes I konvergovat. Všechny vnitřní integrály $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}$ konvergují a rovnají se nějakému číslu závisejícímu na x, označí se $g(x)$. Aby bylo možné opět použít uvedenou existenční větu pro funkce jedné proměnné na $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$, je nutné vědět, že g je na (a,b) spojitá a omezená. Omezenost je zřejmá a spojitost je dokázána v kapitole o integrálech s parametrem.



To jsem se muzel hodně snažit, aby platily i takovéto věcičky. Uf.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

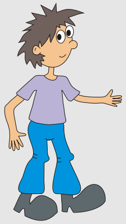
Lze tedy tvrdit a používat toto:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li f spojitá omezená funkce na omezeném intervalu I, pak $\int_I f$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li f spojitá omezená funkce na omezeném intervalu I, pak $\int_I f$ konverguje.



Tu větu dávno znám.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

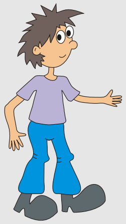
Vzhledem k monotónnosti integrálu, platí i zde srovnávací kritérium:

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $0 \le f \le g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Vzhledem k monotónnosti integrálu, platí i zde srovnávací kritérium:

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $0 \leq f \leq g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.



Tu větu dávno znám.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a, b] \times [c, d]$ a funkce f je spojitá na I.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a,b] \times [c,d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x \in [a,b]$ existuje $y_x \in (c,d)$ tak, že $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} = f(x,y_x)(d-c)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a,b]\times[c,d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x\in[a,b]$ existuje $y_x\in(c,d)$ tak, že $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} = f(x,y_x)(d-c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x (podle předchozí části) a $\int_I f = (d-c)\int_a^b f(x,y_x)\,\mathrm{dx}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a,b] \times [c,d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x \in [a,b]$ existuje $y_x \in (c,d)$ tak, že $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} = f(x,y_x)(d-c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x (podle předchozí části) a $\int_I f = (d-c)\int_a^b f(x,y_x)\,\mathrm{dx}$.

Tedy existuje $p \in (a,b)$ tak, že $\int_I f = (d-c)(b-a)f(p,y_p)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

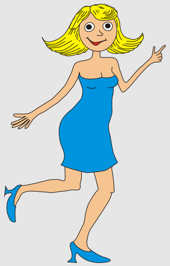
Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a,b]\times[c,d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x\in[a,b]$ existuje $y_x\in(c,d)$ tak, že $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} = f(x,y_x)(d-c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x (podle předchozí části) a $\int_I f = (d-c)\int_a^b f(x,y_x)\,\mathrm{dx}$.

Tedy existuje $p\in(a,b)$ tak, že $\int_I f = (d-c)(b-a)f(p,y_p)$.



Tím je dokázáno následující tvrzení (věta o střední hodnotě pro integrály funkcí dvou proměnných):

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$, pak existuje bod (p, q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p, q)(d - c)(b - a)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

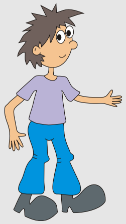
VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$, pak existuje bod (p, q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p, q)(d - c)(b - a)$.

Integrál má tedy geometrický význam, a to objem kvádru nad I s výškou rovnou nějaké funkční hodnotě.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$, pak existuje bod (p, q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p, q)(d - c)(b - a)$.

Integrál má tedy geometrický význam, a to objem kvádru nad I s výškou rovnou nějaké funkční hodnotě.



O.K.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako u Newtonových integrálů se nyní dostane:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako u Newtonových integrálů se nyní dostane:

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou zvolena rozdělení $a = x_0 < x_{1,n} < \ldots < x_{k_n,n} = b$ intervalu $[a,b]$ a $c = y_0 < y_{1,n} < \ldots < y_{l_n,n} = d$ intervalu $[c,d]$ taková, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako u Newtonových integrálů se nyní dostane:

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou zvolena rozdělení $a = x_0 < x_{1,n} < ... < x_{k_n,n} = b$ intervalu $[a, b]$ a $c = y_0 < y_{1,n} < ... < y_{l_n,n} = d$ intervalu $[c, d]$ taková, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

Pak pro libovolně zvolená čísla $p_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$ je

$$\lim_n \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} f(p_{i,n}, q_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \int_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

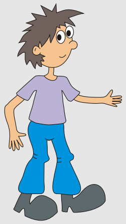
Podobně jako u Newtonových integrálů se nyní dostane:

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou zvolena rozdělení $a = x_0 < x_{1,n} < ... < x_{k_n,n} = b$ intervalu $[a,b]$ a $c = y_0 < y_{1,n} < ... < y_{l_n,n} = d$ intervalu $[c,d]$ taková, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

Pak pro libovolně zvolená čísla $p_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$ je

$$\lim_n \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} f(p_{i,n}, q_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Newton a Riemann, na to nemam.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

Podle první vlastnosti integrálu je $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

⬇

Podle první vlastnosti integrálu je $\int_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \int_{J_{i,j}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

⬇

Podle předchozího tvrzení platí $\int_{J_{i,j}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(p'_{i,n}, q'_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$ pro nějaká $p'_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q'_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.

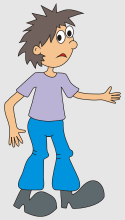
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující postup je zřejmý:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &- \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} f(p_{i,n},q_{j,n})(x_{i,n}-x_{i-1,n})(y_{j,n}-y_{j-1,n})\Big| \\
&\le \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \Big| \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - f(p_{i,n},q_{j,n})(x_{i,n}-x_{i-1,n})(y_{j,n}-y_{j-1,n})\Big| \\
&\le \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} |f(p'_{i,n},q'_{j,n}) - f(p_{i,n},q_{j,n})|(x_{i,n}-x_{i-1,n})(y_{j,n}-y_{j-1,n}) \\
&\le \varepsilon \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} (x_{i,n}-x_{i-1,n})(y_{j,n}-y_{j-1,n}) = \varepsilon(b-a)(d-c)\,.
\end{aligned}$$

$\diamond$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Mnoho písmenek a indexů, bů.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedená limita naznačuje praktický význam integrálu funkcí dvou proměnných:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedená limita naznačuje praktický význam integrálu funkcí dvou proměnných:

Je-li $f \geq 0$, pak $\int_I f$ je roven objemu tělesa kolmého na rovinu xy, s dolní podstavou rovnou I a s „horní podstavou" rovnou grafu funkce f.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Uvedená limita naznačuje praktický význam integrálu funkcí dvou proměnných:

Je-li $f \geq 0$, pak $\int_I f$ je roven objemu tělesa kolmého na rovinu xy, s dolní podstavou rovnou I a s „horní podstavou" rovnou grafu funkce f.

Sám to neumím říct stručněji. Tak je to asi dobře.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup má velký význam při aplikacích integrálu, jak bude vidět v dalších kapitolách.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V definici integrálu funkce dvou proměnných se nejdříve integruje podle proměnné y a potom podle proměnné x.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V definici integrálu funkce dvou proměnných se nejdříve integruje podle proměnné y a potom podle proměnné x.

Není důvod, proč počítat integrál zrovna v tomto pořadí.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V definici integrálu funkce dvou proměnných se nejdříve integruje podle proměnné y a potom podle proměnné x.

Není důvod, proč počítat integrál zrovna v tomto pořadí.

Vzniká otázka, zda přehozením pořadí integrování (tj. nejdříve podle x a potom podle y) vyjde stejné číslo.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V definici integrálu funkce dvou proměnných se nejdříve integruje podle proměnné y a potom podle proměnné x.

Není důvod, proč počítat integrál zrovna v tomto pořadí.

Vzniká otázka, zda přehozením pořadí integrování (tj. nejdříve podle x a potom podle y) vyjde stejné číslo.

Následující věta říká, že pro spojité funkce ano.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na intervalu $I=[a,b]\times[c,d]$. Potom

$$\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx}=\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na intervalu $I=[a,b]\times[c,d]$. Potom

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na intervalu $I=[a,b]\times[c,d]$. Potom

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

A jak na to půjdem? Použijem geometrickou interpretaci, která nezávisí na prohození os x a y.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$. Potom

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

A jak na to půjdem? Použijem geometrickou interpretaci, která nezávisí na prohození os x a y.

Zase jde o drobný formalizmus. V první půlce důkazu se nic neděje, a v druhé taky nic.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Použije se značení z předchozího důkazu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Použije se značení z předchozího důkazu.

Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Použije se značení z předchozího důkazu.

Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

Podle první vlastnosti integrálu je $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Použije se značení z předchozího důkazu.

Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

Podle první vlastnosti integrálu je $\int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

Podle věty o střední hodnotě platí

$$\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = f(p'_{i,n}, q'_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$$

pro nějaká $p'_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q'_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejně lze postupovat u integrálu s přehozeným pořadím integrace a dostane se

$$\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = f(p''_{i,n}, q''_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$$

pro nějaká $p''_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q''_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejně lze postupovat u integrálu s přehozeným pořadím integrace a dostane se

$$\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = f(p''_{i,n}, q''_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$$

pro nějaká $p''_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q''_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.

Tím se dostává

$$\begin{aligned} \Big| \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} &- \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} \Big| \\ &\le \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} |f(p'_{i,n}, q'_{j,n}) - f(p''_{i,n}, q''_{j,n})|(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) \\ &\le \varepsilon \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} (x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \varepsilon(b-a)(d-c)\,. \end{aligned}$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Stejně lze postupovat u integrálu s přehozeným pořadím integrace a dostane se

$$\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = f(p''_{i,n}, q''_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$$

pro nějaká $p''_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q''_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.

Tím se dostává

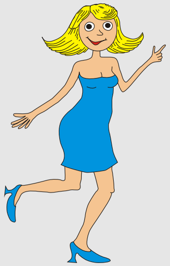
$$\begin{aligned}\Big|\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} &- \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\Big| \\ &\le \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} |f(p'_{i,n}, q'_{j,n}) - f(p''_{i,n}, q''_{j,n})|(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) \\ &\le \varepsilon \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} (x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \varepsilon(b-a)(d-c)\,.\end{aligned}$$

Protože ε bylo libovolné, musí platit tvrzení věty.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

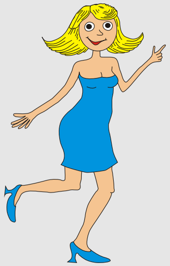
BTW. Všimli jste si té půlky?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tato důležitá věta znamená, že není třeba hlídat pořadí integrace a je možné využít vhodnějšího pořadí.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Tato důležitá věta znamená, že není třeba hlídat pořadí integrace a je možné využít vhodnějšího pořadí.

V příkladech jsou uvedena zajímavá využití Fubiniovy věty.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Limita součtů v geometrickém popisu integrálu může existovat i pro nespojité funkce a dokonce i v případě, kdy integrál na pravé straně neexistuje. Touto limitou se definuje tzv. Riemannův integrál funkcí dvou proměnných.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Limita součtů v geometrickém popisu integrálu může existovat i pro nespojité funkce a dokonce i v případě, kdy integrál na pravé straně neexistuje. Touto limitou se definuje tzv. Riemannův integrál funkcí dvou proměnných.

⬇

Uvedená věta říká, že pro spojité funkce na kompaktním intervalu je Riemannův integrál roven integrálu z definice na začátku kapitoly.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Limita součtů v geometrickém popisu integrálu může existovat i pro nespojité funkce a dokonce i v případě, kdy integrál na pravé straně neexistuje. Touto limitou se definuje tzv. Riemannův integrál funkcí dvou proměnných.

Uvedená věta říká, že pro spojité funkce na kompaktním intervalu je Riemannův integrál roven integrálu z definice na začátku kapitoly.

Definice integrálu pomocí uvedených součtů má výhodu v názornosti a nevýhody v tom, že se nedá použít k normálním výpočtům a že je omezena na kompaktní množiny. V dalších krocích je nutné definici různými způsoby rozšířit na obecnější množiny a znovu dokazovat příslušná tvrzení.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 2 :

1. Limita součtů v geometrickém popisu integrálu může existovat i pro nespojité funkce a dokonce i v případě, kdy integrál na pravé straně neexistuje. Touto limitou se definuje tzv. Riemannův integrál funkcí dvou proměnných.

Uvedená věta říká, že pro spojité funkce na kompaktním intervalu je Riemannův integrál roven integrálu z definice na začátku kapitoly.

Definice integrálu pomocí uvedených součtů má výhodu v názornosti a nevýhody v tom, že se nedá použít k normálním výpočtům a že je omezena na kompaktní množiny. V dalších krocích je nutné definici různými způsoby rozšířit na obecnější množiny a znovu dokazovat příslušná tvrzení.

Přístup uvedený v tomto textu (tj. nejdříve probrat integrál na intervalu a pak na obecnějších množinách) je uveden z didaktických důvodů.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Je nutné podotknout, že název *Fubiniova věta* není v případě zobecněného Newtonova integrálu příliš vhodný. Uvedené tvrzení bylo samozřejmě pro tyto integrály známé dlouho před Fubinim. Italský matematik Fubini toto tvrzení dokázal pro Lebesgueovy integrály a pro mnohem obecnější funkce, než se používají v tomto textu. Jsou učebnice, kde se uvedené tvrzení pro zobecněné Newtonovy integrály nazývá *věta o záměně pořadí integrace*.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Je nutné podotknout, že název *Fubiniova věta* není v případě zobecněného Newtonova integrálu příliš vhodný. Uvedené tvrzení bylo samozřejmě pro tyto integrály známé dlouho před Fubinim. Italský matematik Fubini toto tvrzení dokázal pro Lebesgueovy integrály a pro mnohem obecnější funkce, než se používají v tomto textu. Jsou učebnice, kde se uvedené tvrzení pro zobecněné Newtonovy integrály nazývá *věta o záměně pořadí integrace*.

Tomu rozumím. Kde je ale to "pořadí integrace?

Uvidíte v příkladech, že existují dvojrozměrné integrály, u kterých integrace podle jednoho pořadí souřadnic lze spočítat a podle druhého pořadí spočítat nejde nebo velmi složitě.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Fubiniovy věty lze počítat i jednorozměrné integrály. Jedná se vlastně o integrování funkcí podle parametru.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Fubiniovy věty lze počítat i jednorozměrné integrály. Jedná se vlastně o integrování funkcí podle parametru.

To musí ale být nepěkný trik! Zkusím to na někoho . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí Fubiniovy věty lze počítat i jednorozměrné integrály. Jedná se vlastně o integrování funkcí podle parametru.

To musí ale být nepěkný trik! Zkusím to na někoho …

Chci si hrát …

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec poznámek 2.

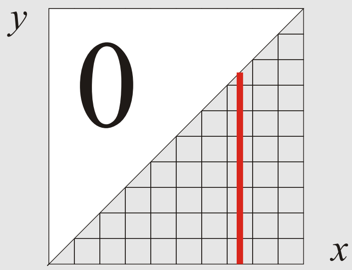
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Nechť funkce f je definována na $I = (0,1) \times (0,1)$ předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \geq x; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{pro } y < x. \end{cases}$$

.



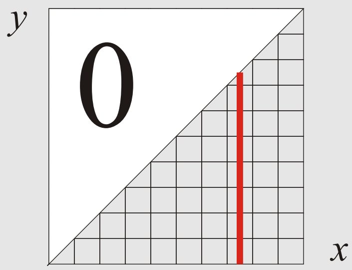
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 2 :

1. Nechť funkce f je definována na $I = (0,1) \times (0,1)$ předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \geq x; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{pro } y < x. \end{cases}$$

.



Pak $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dy} = \sin x$ a tedy $\int_I f = 1 - \cos(1)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

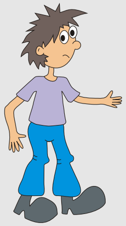
Ukažte, že volbou druhého pořadí integrace se dostanete do potíží:

$$\int_I f = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ukažte, že volbou druhého pořadí integrace se dostanete do potíží:

$$\int_I f = \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy}\,.$$



To bolelo . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \log x \int_a^b x^y\,\mathrm{dy}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \log x \int_a^b x^y\,\mathrm{dy}$.

Potom

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} = \log\frac{b+1}{a+1}\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \log x \int_a^b x^y\,\mathrm{dy}$.

Potom

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} = \log\frac{b+1}{a+1}\,.$$

Na jednom místě předchozího výpočtu je třeba předpokládat, že -1 neleží mezi čísly a, b ani se jim nerovná.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \log x \int_a^b x^y\,\mathrm{dy}$.

Potom

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} = \log\frac{b+1}{a+1}\,.$$

Na jednom místě předchozího výpočtu je třeba předpokládat, že -1 neleží mezi čísly a, b ani se jim nerovná.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zjistěte, kde přesně.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobným způsobem spočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{dx}\,,$$

kde $0 < a < b < +\infty$ (použijte rovnost $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \sqrt{\pi}/2$ vypočítanou v *Příkladech 4*)

Konec příkladů 2.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1)\times(0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1)\times(0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Řešení.

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=$$

$$= \;-(\arctan(1)-\arctan(0))=-\frac{\pi}{4}.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 2 :

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1)\times(0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\left(\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y=\\ &= -(\arctan(1)-\arctan(0))=-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Nyní integrujme stejnou funkci ale v opačném pořadí, tj. nejprve podle proměnné y a potom podle proměnné x.

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\\ &= (\arctan(1)-\arctan(0))=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

HA!!! CO TO BYLO???

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

HA!!! CO TO BYLO???

Bylo to moc snadné?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

HA!!! CO TO BYLO???

Bylo to moc snadné?

Vidíme, že tomto případě závisí výsledek na pořadí integrace.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy\ ?$$

neexistuje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ ?$$

neexistuje.

Kdyby totiž existoval, pak by podle Fubiniovy věty musel při libovolném pořadí integrace funkce f vyjít stejný výsledek.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ ?$$

neexistuje.

Kdyby totiž existoval, pak by podle Fubiniovy věty musel při libovolném pořadí integrace funkce f vyjít stejný výsledek.

A to je vždycky tak neočekávané? To si budu raději kontrolovat předpoklady . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 2.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 2 :

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 2.

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Tak jako v případě funkcí jedné proměnné, nebude se tento text zabývat integrací na co nejobecnějších podmnožinách roviny nebo prostoru.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Tak jako v případě funkcí jedné proměnné, nebude se tento text zabývat integrací na co nejobecnějších podmnožinách roviny nebo prostoru.

V dalším textu budou hlavně používány spojité funkce na polootevřených množinách, a to ještě v jistém smyslu hezkých.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Tak jako v případě funkcí jedné proměnné, nebude se tento text zabývat integrací na co nejobecnějších podmnožinách roviny nebo prostoru.

V dalším textu budou hlavně používány spojité funkce na polootevřených množinách, a to ještě v jistém smyslu hezkých.

Hezké množiny se v praxi vyskytují nejčastěji.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otevřené množiny reálných čísel jsou sjednocením nejvýše spočetně mnoha otevřených intervalů. Integrály přes otevřené množiny na $\mathbb{R}$ se tedy dají popsat jako součty integrálů přes intervaly.

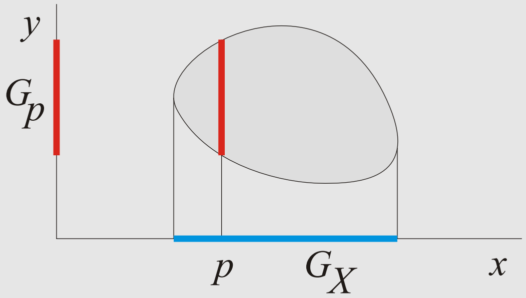
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otevřené množiny reálných čísel jsou sjednocením nejvýše spočetně mnoha otevřených intervalů. Integrály přes otevřené množiny na $\mathbb{R}$ se tedy dají popsat jako součty integrálů přes intervaly.

S malými rozdíly se dá teoreticky postupovat i v rovině a prostoru. Pro praktický výpočet však tento přístup není vhodný, protože popis intervalů v rovině, jejichž sjednocení je daná otevřená množina, bývá obtížný.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Proto bude uvedena obdobná definice jako v předchozí části. Základní definice se omezí na množiny, které nazveme *typu* α: polootevřená množina G v rovině je typu α, jestliže její projekce na osu x je interval (označí se G_X) a pro každé $p \in G_X$ je průnik G s kolmicí na osu x v bodě p opět interval (označí se G_p).



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{G_X} \Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

existuje-li pravá strana.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{G_X} \Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

existuje-li pravá strana.

Jestliže $\int_G f$ je konečný, říká se, že $\int_G f$ *konverguje*.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A tahle jednoduchá pozorování pro právě definovaný integrál (na množinách typu α) se dokáží stejně jako pro integál na intervalech.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A tahle jednoduchá pozorování pro právě definovaný integrál (na množinách typu α) se dokáží stejně jako pro integál na intervalech.

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $\int_G f$ konverguje a g je funkce na G, která je totožná s f na vnitřku množiny G. Pak $\int_G g$ konverguje a rovná se $\int_G f$.
2. Nechť $G \subset H$ jsou množiny typu α a funkce f definovaná na H má nulové hodnoty na $H \setminus G$. Pak
$$\int_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_H f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
jakmile má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

I další základní vlastnosti dvojrozměrného integrálu na množinách typu α jsou stejné jako na intervalech:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

I další základní vlastnosti dvojrozměrného integrálu na množinách typu α jsou stejné jako na intervalech:

Dvě množiny typu α se *nepřekrývají*, jestliže jejich průnik má prázdný vnitřek.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

I další základní vlastnosti dvojrozměrného integrálu na množinách typu α jsou stejné jako na intervalech:

Dvě množiny typu α se *nepřekrývají*, jestliže jejich průnik má prázdný vnitřek.

VĚTA. Nechť G je podmnožina roviny typu α.

1. Integrál je lineární, tj. pro libovolné funkce f, g na G a libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_G (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_G f + \beta \int_G g \,,$$
jakmile má pravá strana smysl.
2. Nechť G je sjednocením nepřekrývajících se množin $G_1, \ldots, G_n$ typu α a f je funkce definovaná na G. Potom
$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{G_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
jakmile má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

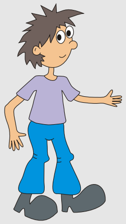
3. Jsou-li g, h funkce definované na G a $h \leq g$ na G pak

$$\int_G h \leq \int_G g\,,$$

jakmile mají obě strany smysl.

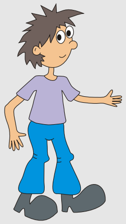
..

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To mi něco připomíná.
Přesně jako základní vlastnosti integrálu na intervalech.

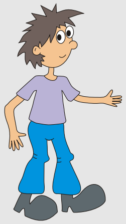
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To mi něco připomíná. Přesně jako základní vlastnosti integrálu na intervalech.

Důkaz. V důkazu druhého tvrzení je opět třeba najít rozdělení G na nepřekrývající se množiny typu α takové, že průměty na osy libovolných dvou těchto množin se buď nepřekrývají nebo jsou totožné.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

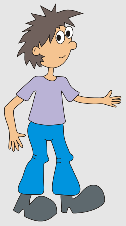


To mi něco připomíná.
Přesně jako základní vlastnosti integrálu na intervalech.

Důkaz. V důkazu druhého tvrzení je opět třeba najít rozdělení G na nepřekrývající se množiny typu α takové, že průměty na osy libovolných dvou těchto množin se buď nepřekrývají nebo jsou totožné.

K tomu si stačí uvědomit, že průměty množin G_i na osy jsou intervaly a stačí vzít společné rozdělení těchto intervalů na každé ose.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



To mi něco připomíná. Přesně jako základní vlastnosti integrálu na intervalech.

Důkaz. V důkazu druhého tvrzení je opět třeba najít rozdělení G na nepřekrývající se množiny typu α takové, že průměty na osy libovolných dvou těchto množin se buď nepřekrývají nebo jsou totožné.

K tomu si stačí uvědomit, že průměty množin G_i na osy jsou intervaly a stačí vzít společné rozdělení těchto intervalů na každé ose.

Místo intervalů $I_{i,j}$ z důkazu stejného tvrzení pro intervaly se vezmou průniky $I_{i,j} \cap G_m$. Jinak je postup stejný. $\diamond$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako pro intervaly lze nyní definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se množin typu α:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako pro intervaly lze nyní definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se množin typu α:

Nechť $\{G_i\}_{i=1}^n$ *je systém nepřekrývajících se množin typu* α *a* A *je jejich sjednocení. Pak se definuje* $\int_A f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \sum_{i=1}^n \int_{G_i} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně jako pro intervaly lze nyní definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se množin typu α:

Nechť $\{G_i\}_{i=1}^n$ je systém nepřekrývajících se množin typu α a A je jejich sjednocení. Pak se definuje $\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \int_{G_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Jestliže je i množina A množinou typu α, pak je tato definice v souladu s již uvedenou definicí integrálu na intervalu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní bude uveden vztah definovaného integrálu na množinách typu α k dříve definovanému integrálu na intervalech.

Nyní bude uveden vztah definovaného integrálu na množinách typu α k dříve definovanému integrálu na intervalech.

Jestliže je množina G sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se intervalů, je integrál funkce na G součtem integrálů této funkce na pokrývajících intervalech?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní bude uveden vztah definovaného integrálu na množinách typu α k dříve definovanému integrálu na intervalech.

Jestliže je množina G sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se intervalů, je integrál funkce na G součtem integrálů této funkce na pokrývajících intervalech?

Obecně to platit nemůže, už proto, že tuto (obecně nekonečnou) řadu nelze nějak přirozeně uspořádat (na rozdíl od intervalů na přímce). Řada tedy musí konvergovat absolutně, daný integrál však absolutně konvergovat nemusí.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nyní bude uveden vztah definovaného integrálu na množinách typu α k dříve definovanému integrálu na intervalech.

Jestliže je množina G sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se intervalů, je integrál funkce na G součtem integrálů této funkce na pokrývajících intervalech?

Obecně to platit nemůže, už proto, že tuto (obecně nekonečnou) řadu nelze nějak přirozeně uspořádat (na rozdíl od intervalů na přímce). Řada tedy musí konvergovat absolutně, daný integrál však absolutně konvergovat nemusí.

Je proto nutné se omezit na funkce absolutně integrovatelné, tj. funkce f mající konvergentní integrály $\int_G f$, $\int_G |f|$.

VĚTA. Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

VĚTA. Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

Důkaz. Nechť G je otevřená podmnožina roviny. Pro $n \in \mathbb{N}$ se označí $\mathcal{A}_n$ rozdělení roviny na uzavřené čtverce přímkami kolmými na osy a procházejícími body $k + i/2^n$, kde $k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., 2^n$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

Důkaz. Nechť G je otevřená podmnožina roviny. Pro $n \in \mathbb{N}$ se označí $\mathcal{A}_n$ rozdělení roviny na uzavřené čtverce přímkami kolmými na osy a procházejícími body $k + i/2^n$, kde $k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., 2^n$.

Dále se označí G_1 sjednocení všech intervalů z $\mathcal{A}_1$, které leží v G a G_n sjednocení G_{n-1} a všech intervalů z $\mathcal{A}_n$, které leží v G a nepřekrývá se se žádným intervalem použitým pro konstrukci G_{n-1}.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

Důkaz. Nechť G je otevřená podmnožina roviny. Pro $n \in \mathbb{N}$ se označí $\mathcal{A}_n$ rozdělení roviny na uzavřené čtverce přímkami kolmými na osy a procházejícími body $k + i/2^n$, kde $k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., 2^n$.

Dále se označí G_1 sjednocení všech intervalů z $\mathcal{A}_1$, které leží v G a G_n sjednocení G_{n-1} a všech intervalů z $\mathcal{A}_n$, které leží v G a nepřekrývá se se žádným intervalem použitým pro konstrukci G_{n-1}.

Množiny G_n tvoří rostoucí posloupnost (uzavřených) množin, které jsou sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

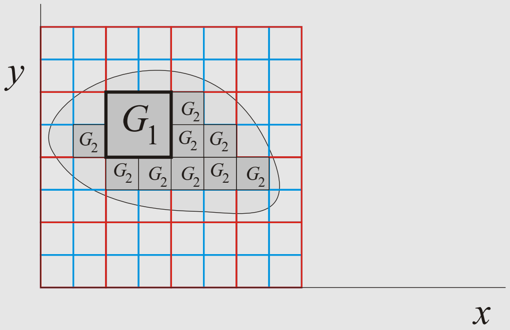
Důkaz. Nechť G je otevřená podmnožina roviny. Pro $n \in \mathbb{N}$ se označí $\mathcal{A}_n$ rozdělení roviny na uzavřené čtverce přímkami kolmými na osy a procházejícími body $k + i/2^n$, kde $k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., 2^n$.

Dále se označí G_1 sjednocení všech intervalů z $\mathcal{A}_1$, které leží v G a G_n sjednocení G_{n-1} a všech intervalů z $\mathcal{A}_n$, které leží v G a nepřekrývá se se žádným intervalem použitým pro konstrukci G_{n-1}.

Množiny G_n tvoří rostoucí posloupnost (uzavřených) množin, které jsou sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

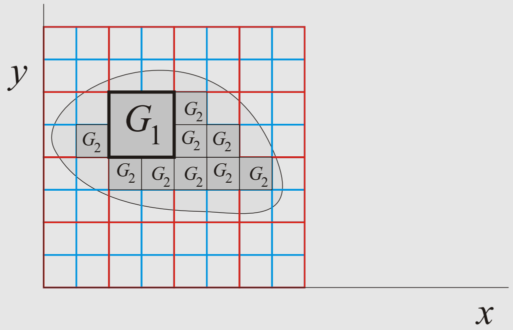
Zbývá ukázat, že $\bigcup G_n = G$. Pro bod $a \in G$ existuje n a uzavřený interval I z $\mathcal{A}_n$ obsahující a a ležící v G. Tento interval I buď je částí nějakého intervalu z $\mathcal{A}_k$ použitého pro konstrukci G_k s $k \leq n$ (potom $a \in G_k$) nebo nikoli, a pak bude I použit pro konstrukci G_{n+1} — potom $a \in G_{n+1}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



◇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



◇

Situaci popsanou v tvrzení se bude krátce říkat *rozdělení na intervaly*.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť G je množina typu α a f je absolutně integrovatelná funkce na G. Potom pro každé rozdělení G na intervaly $\{J_n\}$ platí

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde řada na pravé straně absolutně konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť G je množina typu α a f je absolutně integrovatelná funkce na G. Potom pro každé rozdělení G na intervaly $\{J_n\}$ platí

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde řada na pravé straně absolutně konverguje.

Důkaz. Vzhledem k předpokladu absolutní integrovatelnosti f lze předpokládat, že $f \geq 0$. Potom je zřejmé, že $\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť G je množina typu α a f je absolutně integrovatelná funkce na G. Potom pro každé rozdělení G na intervaly $\{J_n\}$ platí

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde řada na pravé straně absolutně konverguje.

Důkaz. Vzhledem k předpokladu absolutní integrovatelnosti f lze předpokládat, že $f \geq 0$. Potom je zřejmé, že $\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Označí se $A_n = \bigcup i = 1^n J_i$ a $I_{n,x} = (\varphi(x), \psi(x)) \cap A_n$. Potom funkce $g_n(x) = \int_{I_{n,x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ konvergují bodově k funkci $g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ podle čtvrté vlastnosti Newtonova integrálu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť G je množina typu α a f je absolutně integrovatelná funkce na G. Potom pro každé rozdělení G na intervaly $\{J_n\}$ platí

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde řada na pravé straně absolutně konverguje.

Důkaz. Vzhledem k předpokladu absolutní integrovatelnosti f lze předpokládat, že $f \geq 0$. Potom je zřejmé, že $\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Označí se $A_n = \bigcup i = 1^n J_i$ a $I_{n,x} = (\varphi(x), \psi(x)) \cap A_n$. Potom funkce $g_n(x) = \int_{I_{n,x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ konvergují bodově k funkci $g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ podle čtvrté vlastnosti Newtonova integrálu.

Nyní se použije věta o přehození limity a integrálu (integrovatelná majoranta je $|g|$):

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_n \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{dx} = \lim_n \int_{A_n} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_n \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{dx} = \lim_n \int_{A_n} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Zde A_n je konečné sjednocení intervalů. $\diamond$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí tvrzení se vhodně používá v důkazové technice. Důkaz se provede na intervalech a potom pomocí součtů převede na obecnější množiny.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Uvedená definice je schválně napsaná ve tvaru vhodném pro ještě obecnější množiny, kdy projekce G_X a průniky G_x nemusejí být intervaly.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Uvedená definice je schválně napsaná ve tvaru vhodném pro ještě obecnější množiny, kdy projekce G_X a průniky G_x nemusejí být intervaly.

⬇

Pro obecnější integrály mohou být tyto množiny mnohem složitější než intervaly (nebo jejich konečná sjednocení).

A teď něco na vysvětlenou k předchozímu důkazu: Co byly ty záhadné funkce φ a ψ?

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Uvedená definice je schválně napsaná ve tvaru vhodném pro ještě obecnější množiny, kdy projekce G_X a průniky G_x nemusejí být intervaly.

Pro obecnější integrály mohou být tyto množiny mnohem složitější než intervaly (nebo jejich konečná sjednocení).

A teď něco na vysvětlenou k předchozímu důkazu: Co byly ty záhadné funkce φ a ψ?

V případě použitém v definici je G_X rovno nějakému intervalu, např. (a, b) a každý interval G_x je např. tvaru (c_x, d_x). Pak lze integrál psát ve tvaru

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \Big(\int_{c_x}^{d_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 3 :

1. Uvedená definice je schválně napsaná ve tvaru vhodném pro ještě obecnější množiny, kdy projekce G_X a průniky G_x nemusejí být intervaly.

Pro obecnější integrály mohou být tyto množiny mnohem složitější než intervaly (nebo jejich konečná sjednocení).

A teď něco na vysvětlenou k předchozímu důkazu: Co byly ty záhadné funkce φ a ψ?

V případě použitém v definici je G_X rovno nějakému intervalu, např. (a, b) a každý interval G_x je např. tvaru (c_x, d_x). Pak lze integrál psát ve tvaru

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{c_x}^{d_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Krajní body c_x, d_x jsou vlastně hodnoty nějakých funkcí φ, ψ definovaných na (a, b),

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

tj. $c_x = \varphi(x), d_x = \psi(x)$. Takže množiny G použité v definici jsou vlastně množiny ležící mezi grafy dvou funkcí nad nějakým intervalem.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

tj. $c_x = \varphi(x), d_x = \psi(x)$. Takže množiny G použité v definici jsou vlastně množiny ležící mezi grafy dvou funkcí nad nějakým intervalem.

Zřejmě je vhodné požadovat $\varphi \leq \psi$. Nejčastěji používané případy v tomto textu budou spojité funkce φ, ψ.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Na základě druhého tvrzení v pozorování lze zvolit ještě jeden přístup ke zkoumání integrálů funkcí více proměnných.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Na základě druhého tvrzení v pozorování lze zvolit ještě jeden přístup ke zkoumání integrálů funkcí více proměnných.

Obecnou podmnožinu A roviny lze vložit do nějakého intervalu I a dodefinovat $f(x, y) = 0$ pro $(x, y) \notin A$. Pak lze použít definici integrálu na intervalu z předchozí části.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Na základě druhého tvrzení v pozorování lze zvolit ještě jeden přístup ke zkoumání integrálů funkcí více proměnných.

⬇

Obecnou podmnožinu A roviny lze vložit do nějakého intervalu I a dodefinovat $f(x,y) = 0$ pro $(x,y) \notin A$. Pak lze použít definici integrálu na intervalu z předchozí části.

⬇

Takto dodefinovaná funkce však na onom intervalu není obecně spojitá, i když f na A spojitá byla.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Na základě druhého tvrzení v pozorování lze zvolit ještě jeden přístup ke zkoumání integrálů funkcí více proměnných.

⬇

Obecnou podmnožinu A roviny lze vložit do nějakého intervalu I a dodefinovat $f(x,y) = 0$ pro $(x,y) \notin A$. Pak lze použít definici integrálu na intervalu z předchozí části.

⬇

Takto dodefinovaná funkce však na onom intervalu není obecně spojitá, i když f na A spojitá byla.

⬇

Z předchozího pozorování vyplývá, že nezáleží na tom, jaký interval obsahující množinu A se zvolí. Je možné zvolit celou rovinu, bývá však vhodnější volit interval co nejmenší.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Na základě druhého tvrzení v pozorování lze zvolit ještě jeden přístup ke zkoumání integrálů funkcí více proměnných.

Obecnou podmnožinu A roviny lze vložit do nějakého intervalu I a dodefinovat $f(x,y) = 0$ pro $(x,y) \notin A$. Pak lze použít definici integrálu na intervalu z předchozí části.

Takto dodefinovaná funkce však na onom intervalu není obecně spojitá, i když f na A spojitá byla.

Z předchozího pozorování vyplývá, že nezáleží na tom, jaký interval obsahující množinu A se zvolí. Je možné zvolit celou rovinu, bývá však vhodnější volit interval co nejmenší.

V jednotlivých případech je nutno uvážit, zda je vhodnější integrovat přes lepší množinu (interval) a ztratit spojitost funkce (body nespojitosti ale pak tvoří malou množinu) anebo integrovat přes horší množinu ale spojitou funkci.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Věta o vyjádření integrálu na G jako součet integrálů na intervalech vytvářejících rozdělení množiny G dává návod, jak rozšířit Riemannův integrál z intervalů na obecnější množiny.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Věta o vyjádření integrálu na G jako součet integrálů na intervalech vytvářejících rozdělení množiny G dává návod, jak rozšířit Riemannův integrál z intervalů na obecnější množiny.

Je vidět, že takto se dostane jen tzv. absolutně konvergentní integrál, což znamená, že $\int |f|$ konverguje pokud $\int f$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Věta o vyjádření integrálu na G jako součet integrálů na intervalech vytvářejících rozdělení množiny G dává návod, jak rozšířit Riemannův integrál z intervalů na obecnější množiny.

Je vidět, že takto se dostane jen tzv. absolutně konvergentní integrál, což znamená, že $\int |f|$ konverguje pokud $\int f$ konverguje.

Riemannův integrál lze definovat i přímo na obecných množinách pomocí pokrytí množiny G nepřekrývajícími se intervaly určitého průměru. Pak některé intervaly obsahují i body neležící v dané množině. Je to jakási aproximace množiny G shora, tj. sjednocení použitých intervalů je větší než G. U věty používající rozdělení G na intervaly se používá aproximace zdola.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Věta o vyjádření integrálu na G jako součet integrálů na intervalech vytvářejících rozdělení množiny G dává návod, jak rozšířit Riemannův integrál z intervalů na obecnější množiny.

⬇

Je vidět, že takto se dostane jen tzv. absolutně konvergentní integrál, což znamená, že $\int |f|$ konverguje pokud $\int f$ konverguje.

⬇

Riemannův integrál lze definovat i přímo na obecných množinách pomocí pokrytí množiny G nepřekrývajícími se intervaly určitého průměru. Pak některé intervaly obsahují i body neležící v dané množině. Je to jakási aproximace množiny G shora, tj. sjednocení použitých intervalů je větší než G. U věty používající rozdělení G na intervaly se používá aproximace zdola.

⬇

V matematice je vždy mnoho cest vedoucích k jednomu cíli.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

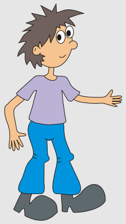
3. Věta o vyjádření integrálu na G jako součet integrálů na intervalech vytvářejících rozdělení množiny G dává návod, jak rozšířit Riemannův integrál z intervalů na obecnější množiny.

Je vidět, že takto se dostane jen tzv. absolutně konvergentní integrál, což znamená, že $\int |f|$ konverguje pokud $\int f$ konverguje.

Riemannův integrál lze definovat i přímo na obecných množinách pomocí pokrytí množiny G nepřekrývajícími se intervaly určitého průměru. Pak některé intervaly obsahují i body neležící v dané množině. Je to jakási aproximace množiny G shora, tj. sjednocení použitých intervalů je větší než G. U věty používající rozdělení G na intervaly se používá aproximace zdola.

V matematice je vždy mnoho cest vedoucích k jednomu cíli.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



Že bych z toho měl radost . . .

Konec poznámek 3.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 3 :

Jestliže je množina, přes kterou se má integrovat, zadána nikoli pomocí ohraničujících funkcí jedné proměnné, ale buď pomocí implicitně zadané funkce nebo je popsána vlastnostmi dvojic bodů, bývá někdy obtížné stanovit meze příslušných jednorozměrných integrálů.

Příklady 3 :

Jestliže je množina, přes kterou se má integrovat, zadána nikoli pomocí ohraničujících funkcí jedné proměnné, ale buď pomocí implicitně zadané funkce nebo je popsána vlastnostmi dvojic bodů, bývá někdy obtížné stanovit meze příslušných jednorozměrných integrálů.

Často pomůže představa nebo nakreslení oné množiny.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x, y); x + y > 1, x^2 + y^2 < 1\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x, y); x + y > 1, x^2 + y^2 < 1\}$.

$\boxed{\text{Množinu } G \text{ si nakreslete.}}$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x, y); x + y > 1, x^2 + y^2 < 1\}$.

Množinu G si nakreslete.

Projekce G na osu x je interval $(0, 1)$. Pro každé $x \in (0, 1)$ je $G_x = (1 - x, \sqrt{1 - x^2})$, tj. G je množina ležící mezi grafy funkcí $1 - x$ a $\sqrt{1 - x^2}$ na intervalu $(0, 1)$. Tedy

$$\int_G f = \int_0^1 \Big(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x, y); y < 4, 2x < y < 3x\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x,y); y < 4, 2x < y < 3x\}$.

Množinu G si nakreslete.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x,y); y < 4, 2x < y < 3x\}$.

Množinu G si nakreslete.

Projekce G na osu x je interval $(0,2)$. Na intervalu $(0,4/3)$ jsou intervaly G_x rovny $(2x,3x)$, na intervalu $(4/3,2)$ jsou rovny $(2x,4)$.

2. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x,y); y < 4, 2x < y < 3x\}$.

Množinu G si nakreslete.

Projekce G na osu x je interval $(0,2)$. Na intervalu $(0,4/3)$ jsou intervaly G_x rovny $(2x,3x)$, na intervalu $(4/3,2)$ jsou rovny $(2x,4)$.

Integrál se tedy musí kvůli výpočtu rozdělit na dva sčítance (v tomto případě lze použít záměnu pořadí integrace a pak není nutné integrál rozdělovat):

$$\int_G f = \int_0^{4/3} \left(\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{4/3}^{2} \left(\int_{2x}^{4} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x,y); y < 4, 2x < y < 3x\}$.

Množinu G si nakreslete.

Projekce G na osu x je interval $(0,2)$. Na intervalu $(0,4/3)$ jsou intervaly G_x rovny $(2x,3x)$, na intervalu $(4/3,2)$ jsou rovny $(2x,4)$.

Integrál se tedy musí kvůli výpočtu rozdělit na dva sčítance (v tomto případě lze použít záměnu pořadí integrace a pak není nutné integrál rozdělovat):

$$\int_G f = \int_0^{4/3} \Big(\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} + \int_{4/3}^{2} \Big(\int_{2x}^{4} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

Najděte podobným způsobem meze integrálů pro integraci přes množinu $G = \{(x,y); y < 1, x > y^2/2, x^2 + y^2 < 5\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

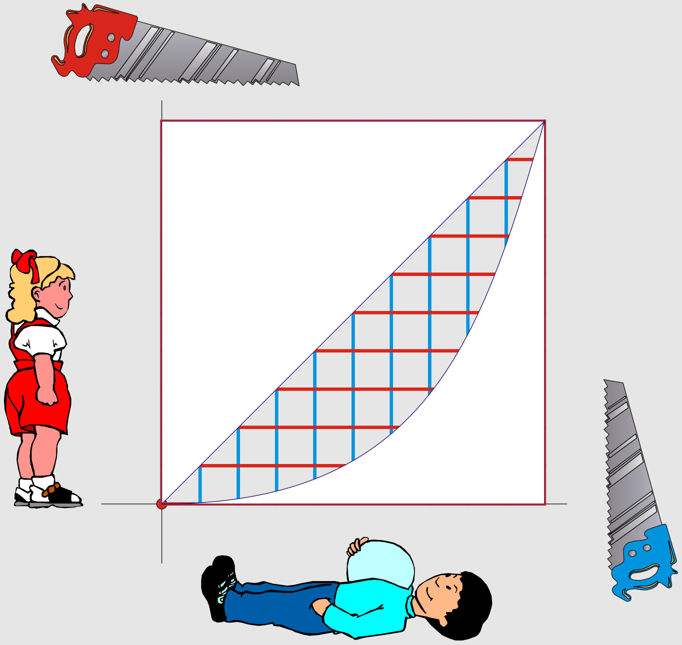
Konec příkladů 3.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 3 :

Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy^2 \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x.$$



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Integrál vypočítáme tak, že nejprve funkci xy^2 zintegrujeme podle proměnné y (kde meze integrálu jsou x^2 a x) a potom podle proměnné x (od 0 do 1).

Řešení. Integrál vypočítáme tak, že nejprve funkci xy^2 zintegrujeme podle proměnné y (kde meze integrálu jsou x^2 a x) a potom podle proměnné x (od 0 do 1).

Pozor, takto jíme oříšek bez rozlousknutí skořápky. Ve skutečnosti řežeme ostošest pro všechna x od 0 do 1 a pak pro pevné x příslušný řez spočítáme. Nakonec to dointegrujeme přes x.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy

$$\int_{x^2}^{x} xy^2 \,\mathrm{d}y = x\frac{1}{3}(x^3 - x^6) = \frac{1}{3}(x^4 - x^7).$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy

$$\int_{x^2}^{x} xy^2 \, \mathrm{d}y = x\frac{1}{3}(x^3 - x^6) = \frac{1}{3}(x^4 - x^7).$$

Tuto budeme nyní integrovat podle x

$$\int_0^1 \frac{1}{3}(x^4 - x^7) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy

$$\int_{x^2}^{x} xy^2 \,\mathrm{d}y = x\frac{1}{3}(x^3 - x^6) = \frac{1}{3}(x^4 - x^7).$$

Tuto budeme nyní integrovat podle x

$$\int_0^1 \frac{1}{3}(x^4 - x^7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.$$

Získali jsme tak celkový výsledek

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy^2 \,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{40}.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy

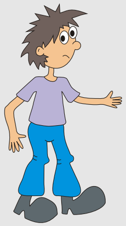
$$\int_{x^2}^{x} xy^2 \,\mathrm{d}y = x\frac{1}{3}(x^3 - x^6) = \frac{1}{3}(x^4 - x^7).$$

Tuto budeme nyní integrovat podle x

$$\int_0^1 \frac{1}{3}(x^4 - x^7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.$$

Získali jsme tak celkový výsledek

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy^2 \,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{40}.$$



Tedy pouhou jednu čtyřicetinu za veliký kus mého života :-(

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 3.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení 3 :

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec učení 3.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Následující existenční věty pro integrály na množinách typu α jsou stejné jako pro integrály na intervalech.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Následující existenční věty pro integrály na množinách typu α jsou stejné jako pro integrály na intervalech.

V prvním tvrzení je však potřeba jeden další předpoklad na množinu G, totiž že hranice je v jistém smyslu spojitá.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Následující existenční věty pro integrály na množinách typu α jsou stejné jako pro integrály na intervalech.

V prvním tvrzení je však potřeba jeden další předpoklad na množinu G, totiž že hranice je v jistém smyslu spojitá.

VĚTA. Nechť $\varphi \leq \psi$ jsou spojité funkce na omezeném intervalu (a, b) a $G = \{(x, y); x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak $\int_G f$ konverguje pro každou omezenou a spojitou funkci na G.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Následující existenční věty pro integrály na množinách typu α jsou stejné jako pro integrály na intervalech.

V prvním tvrzení je však potřeba jeden další předpoklad na množinu G, totiž že hranice je v jistém smyslu spojitá.

VĚTA. Nechť $\varphi \leq \psi$ jsou spojité funkce na omezeném intervalu (a, b) a $G = \{(x, y); x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak $\int_G f$ konverguje pro každou omezenou a spojitou funkci na G.

Používáme podmínky povědomé z jednorozměrného integrálu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Stačí ukázat, že funkce $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ je spojitá funkce na (a,b).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Stačí ukázat, že funkce $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ je spojitá funkce na (a,b).

To je dokázáno v kapitole o integrálech s parametrem pro konstantní funkce φ, ψ.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Stačí ukázat, že funkce $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je spojitá funkce na (a,b).

To je dokázáno v kapitole o integrálech s parametrem pro konstantní funkce φ, ψ.

Důkaz bude proveden za dodatečného předpokladu, že f je spojitá a omezená i na nějaké otevřené množině obsahující uzávěr množiny G.

Důkaz. Stačí ukázat, že funkce $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je spojitá funkce na (a,b).

To je dokázáno v kapitole o integrálech s parametrem pro konstantní funkce φ, ψ.

Důkaz bude proveden za dodatečného předpokladu, že f je spojitá a omezená i na nějaké otevřené množině obsahující uzávěr množiny G.

Nechť $x_n \to x$ v (a,b). Potom

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{\varphi(x_n)}^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} \;-\; \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big| \\
&= \Big|\int_{\varphi(x_n)}^{\varphi(x)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} \;+\; \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \big(f(x_n,y)-f(x,y)\big)\,\mathrm{dy} + \int_{\psi(x)}^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy}\Big| \\
&\le M|\varphi(x_n)-\varphi(x)| \;+\; \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \big|f(x_n,y)-f(x,y)\big|\,\mathrm{dy} + M|\psi(x_n)-\psi(x)|\,,
\end{aligned}
$$

kde M je horní mez funkce $|f|$ na (a,b).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz. Stačí ukázat, že funkce $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je spojitá funkce na (a,b).

To je dokázáno v kapitole o integrálech s parametrem pro konstantní funkce φ, ψ.

Důkaz bude proveden za dodatečného předpokladu, že f je spojitá a omezená i na nějaké otevřené množině obsahující uzávěr množiny G.

Nechť $x_n \to x$ v (a,b). Potom

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\varphi(x_n)}^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} \;-\; \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big| \\
&= \Big| \int_{\varphi(x_n)}^{\varphi(x)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} \;+\; \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \big(f(x_n,y) - f(x,y)\big)\,\mathrm{dy} + \int_{\psi(x)}^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} \Big| \\
&\le M|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \;+\; \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \big|f(x_n,y) - f(x,y)\big|\,\mathrm{dy} + M|\psi(x_n) - \psi(x)|\,,
\end{aligned}$$

kde M je horní mez funkce $|f|$ na (a,b).

V posledním řádku zřejmě konvergují první a poslední člen k 0. Prostřední člen konverguje k 0 podle věty o spojitosti integrálu s parametrem.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jak jsme použili dodatečné předpoklady?

Následující srovnávací kritérium plyne jednoduše ze základních vlastností integrálu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující srovnávací kritérium plyne jednoduše ze základních vlastností integrálu.

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $f \leq g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Následující srovnávací kritérium plyne jednoduše ze základních vlastností integrálu.

⬇

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $f \leq g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

⬇

Jako u řad a jednorozměrného integrálu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X}\left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = \int_{G_Y}\left(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{G_Y} \left(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

Důkaz. Protože f je absolutně integrovatelná, lze $\int_G f$ vyjádřit jako součet řady z integrálů $\int_{J_n} f$, kde $\{J_n\}$ je rozdělení G na intervaly. Pro každý integrál $\int_{J_n} f$ již platí Fubiniova věta. Nyní se opět použije věta o vyjádření $\int_G f$ pomocí součtu $\int_{J_n} f$, tentokrát již s přehozením pořadí integrace. $\diamond$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{G_Y} \left(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

Důkaz. Protože f je absolutně integrovatelná, lze $\int_G f$ vyjádřit jako součet řady z integrálů $\int_{J_n} f$, kde $\{J_n\}$ je rozdělení G na intervaly. Pro každý integrál $\int_{J_n} f$ již platí Fubiniova věta. Nyní se opět použije věta o vyjádření $\int_G f$ pomocí součtu $\int_{J_n} f$, tentokrát již s přehozením pořadí integrace. $\diamond$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Všiměte si, že rozdělení G na intervaly nebylo definováno v závislosti na průmětech G_x, proto vyjde stejně podle osy x i y.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 4 :

1. Důkaz první existenční věty bez předpokladu spojitosti f na otevřené množině obsahující uzávěr množiny G je složitější a vyžaduje některá tvrzení o rozšíření zobrazení.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Věta o záměně pořadí integrace platí (se snadným důkazem) pro nepřekrývající se sjednocení množin typu uvedených ve Fubiniově větě.

Konec poznámek 4.

Příklady 4 :

1. Přehoďte pořadí integrace u integrálu $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Přehoďte pořadí integrace u integrálu $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$.

Meze v druhém integrálu znamenají, že $x^2 < y < 2x$, takže $y/2 < x < \sqrt{y}$. Protože $0 < x < 2$, je $0 < y < 4$ a platí $\{(x,y); x^2 < y < 2x, 0 < x < 2\} = \{(x,y); y/2 < x < \sqrt{y}, 0 < y < 4\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Přehoďte pořadí integrace u integrálu $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$.

Meze v druhém integrálu znamenají, že $x^2 < y < 2x$, takže $y/2 < x < \sqrt{y}$. Protože $0 < x < 2$, je $0 < y < 4$ a platí $\{(x,y); x^2 < y < 2x, 0 < x < 2\} = \{(x,y); y/2 < x < \sqrt{y}, 0 < y < 4\}$.

Výsledkem je tedy integrál $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

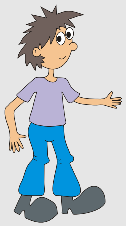
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Přehoďte pořadí integrace u integrálu $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$.

Meze v druhém integrálu znamenají, že $x^2 < y < 2x$, takže $y/2 < x < \sqrt{y}$. Protože $0 < x < 2$, je $0 < y < 4$ a platí $\{(x,y); x^2 < y < 2x, 0 < x < 2\} = \{(x,y); y/2 < x < \sqrt{y}, 0 < y < 4\}$.

Výsledkem je tedy integrál $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.



To byla rychlovka.

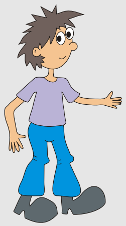
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 4 :

1. Přehoďte pořadí integrace u integrálu $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Meze v druhém integrálu znamenají, že $x^2 < y < 2x$, takže $y/2 < x < \sqrt{y}$. Protože $0 < x < 2$, je $0 < y < 4$ a platí $\{(x,y); x^2 < y < 2x, 0 < x < 2\} = \{(x,y); y/2 < x < \sqrt{y}, 0 < y < 4\}$.

Výsledkem je tedy integrál $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



To byla rychlovka.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je nutné dávat pozor, protože převod intervalů nemusí být tak přímý, jako byl v uvedeném příkladě. Následující příklad je složitější

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Napište pro $\int_G$ obě možná pořadí integrace, je-li $G = \{(x,y); 0 < y < 1, x^2 + y^2 < 5, y^2 < 2x\}$. Při jednom pořadí budete muset integrál rozepsat jako součet tří integrálů, při druhém pořadí to nutné nebude.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Napište pro $\int_G$ obě možná pořadí integrace, je-li $G = \{(x, y); 0 < y < 1, x^2 + y^2 < 5, y^2 < 2x\}$. Při jednom pořadí budete muset integrál rozepsat jako součet tří integrálů, při druhém pořadí to nutné nebude.

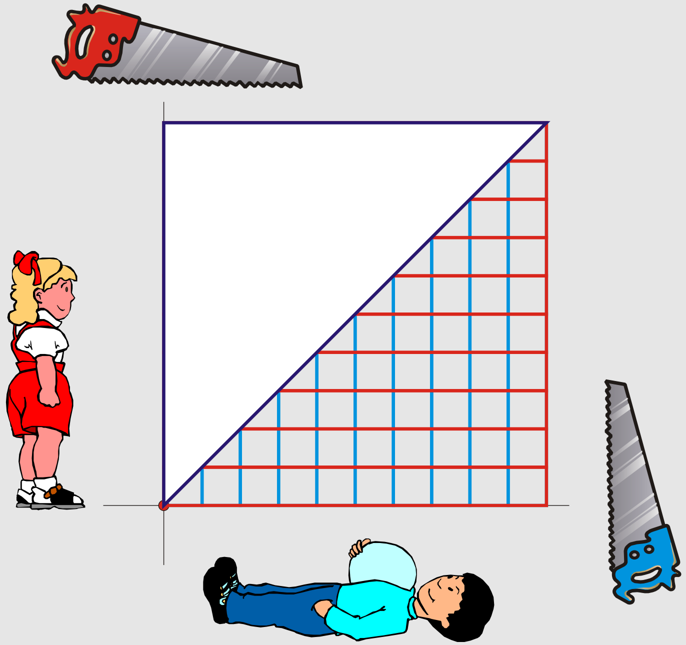
Zkuste nakreslit obrázek množiny G.

Konec příkladů 4.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

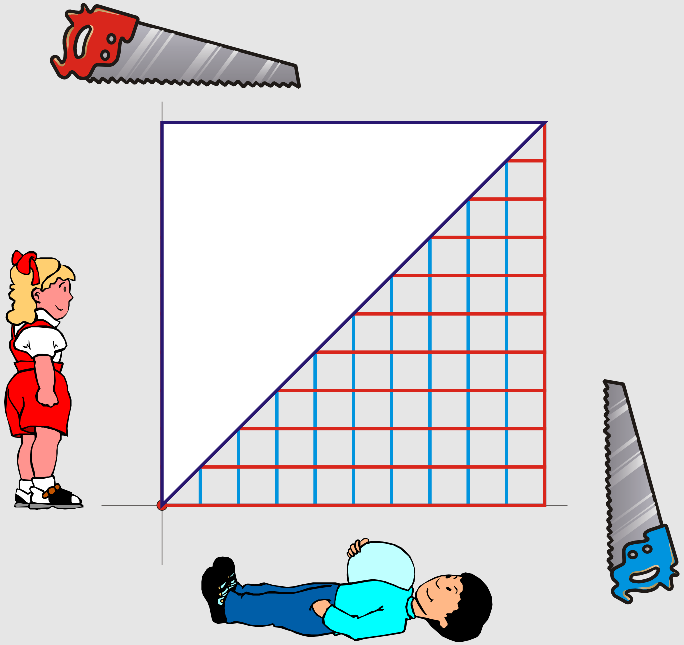
Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < x\}$, kde $a > 0$, viz obrázek.



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < x\}$, kde $a > 0$, viz obrázek.

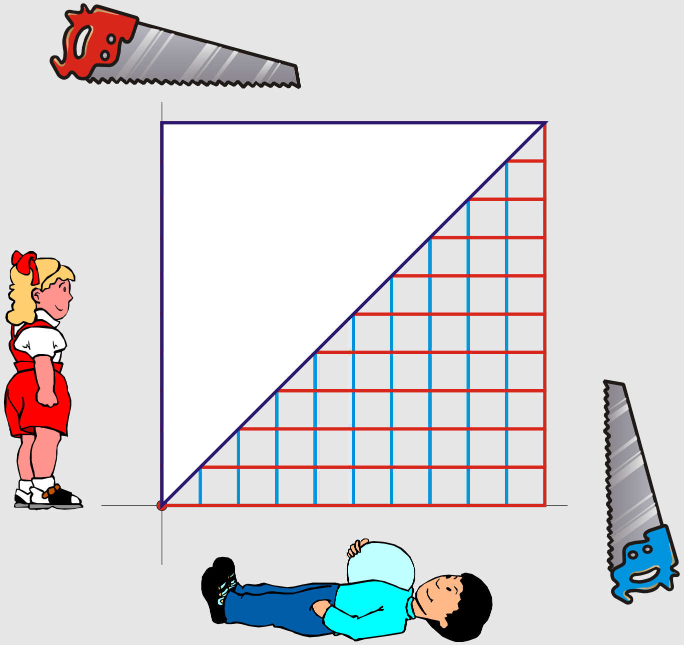


Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace (t.j. podle kluka i holčičky).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 4 :

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < x\}$, kde $a > 0$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace (t.j. podle kluka i holčičky).

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Změníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Změníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Jak je vidět z obrázku, hledaný integrál bude

$$\int_0^a \left(\int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(x, y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Změníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Jak je vidět z obrázku, hledaný integrál bude

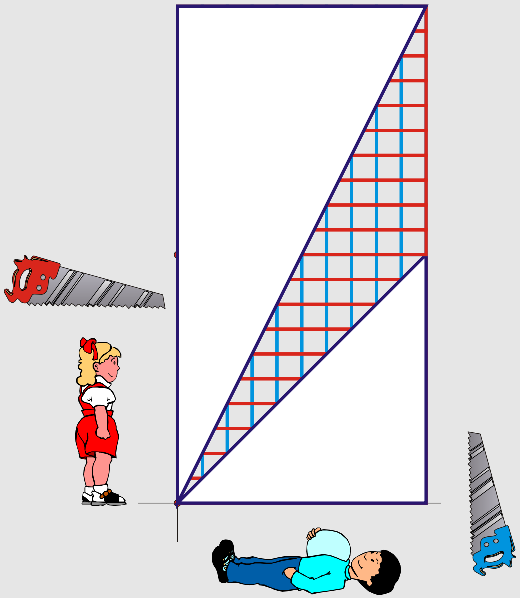
$$\int_0^a \left(\int_y^a f(x, y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Já fandil oběma stejně ...

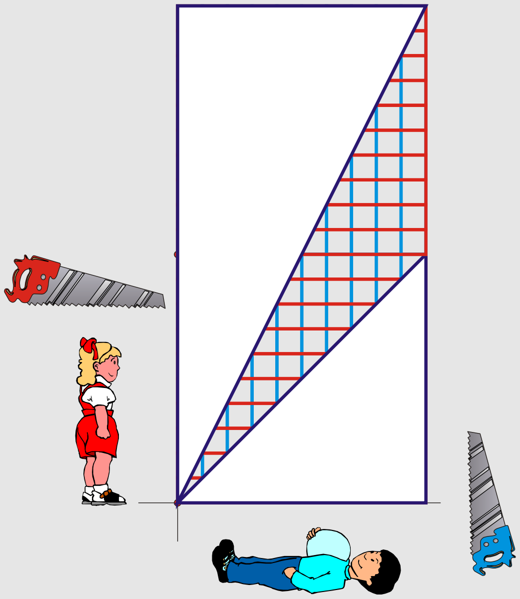
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\ x < y < 2x\}$, viz obrázek.



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

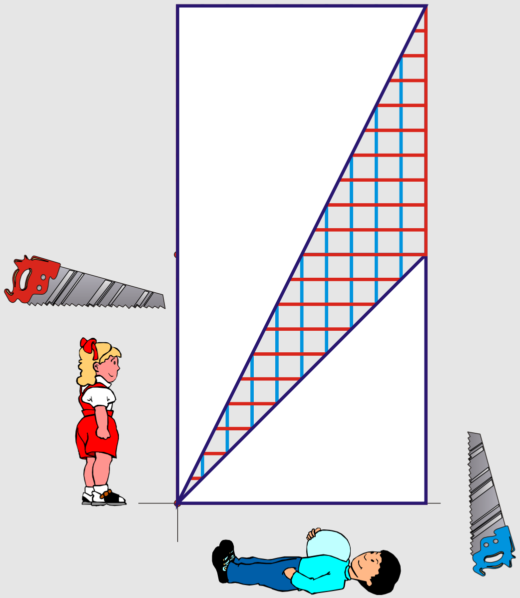
Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\ x < y < 2x\}$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\ x < y < 2x\}$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace.

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right)\, \mathrm{d}x.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Změníme pořadí integrace, tj. nejprve budeme integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y. Jak je vidět z obrázku, hledaný integrál bude nyní součtem dvou integrálů

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

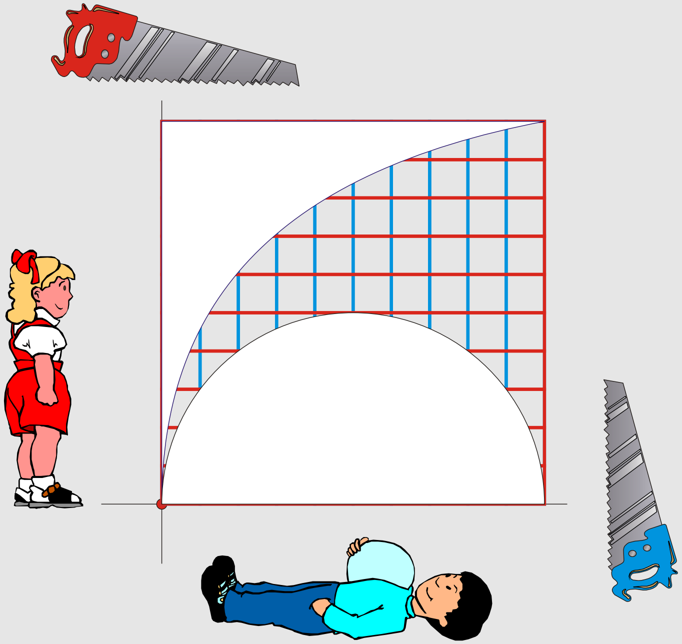
Změníme pořadí integrace, tj. nejprve budeme integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y. Jak je vidět z obrázku, hledaný integrál bude nyní součtem dvou integrálů

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

Já fandil klukovi …

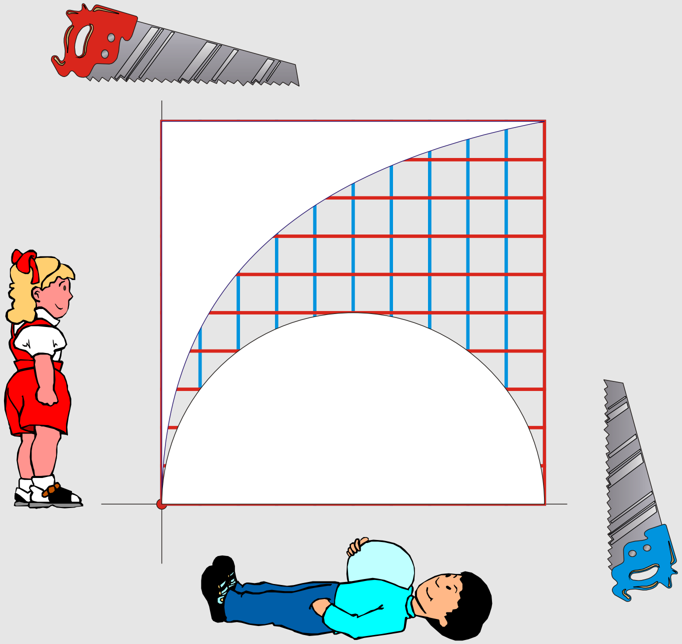
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} < y < \sqrt{2ax}\}$, viz obrázek.



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

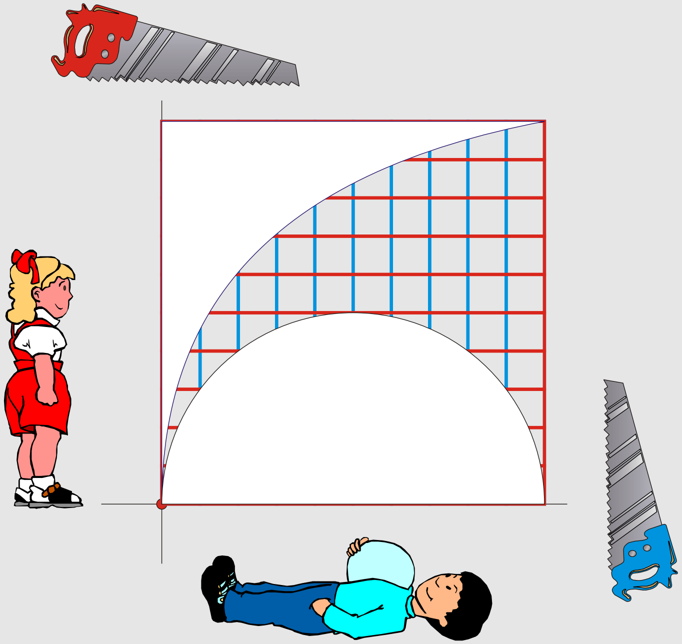
Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} < y < \sqrt{2ax}\}$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} < y < \sqrt{2ax}\}$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace.

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Zaměníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Zaměníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Nejprve si uvědomme, jak vlastně vypadá množina M. Proměnná x probíhá interval $(0, 2a)$, to je jasné.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Zaměníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Nejprve si uvědomme, jak vlastně vypadá množina M. Proměnná x probíhá interval $(0, 2a)$, to je jasné.

Proměnná y leží pro každé (pro tuto chvíli pevné) x v intervalu $(\sqrt{2ax-x^2}, \sqrt{2ax})$. To znamená mezi křivkami $\sqrt{2ax-x^2}$ a $\sqrt{2ax}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Zaměníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Nejprve si uvědomme, jak vlastně vypadá množina M. Proměnná x probíhá interval $(0, 2a)$, to je jasné.

Proměnná y leží pro každé (pro tuto chvíli pevné) x v intervalu $(\sqrt{2ax - x^2}, \sqrt{2ax})$. To znamená mezi křivkami $\sqrt{2ax - x^2}$ a $\sqrt{2ax}$.

První z nich je půlkružnice se středem v bodě $(a, 0)$ a poloměrem a, což snadno zjistíme výpočtem

$$\begin{gathered} y = \sqrt{2ax - x^2}, \\ y^2 = 2ax - x^2, \\ (x-a)^2 + y^2 = a^2. \end{gathered}$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^{2a}\left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$

Zaměníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Nejprve si uvědomme, jak vlastně vypadá množina M. Proměnná x probíhá interval $(0,2a)$, to je jasné.

Proměnná y leží pro každé (pro tuto chvíli pevné) x v intervalu $(\sqrt{2ax-x^2},\sqrt{2ax})$. To znamená mezi křivkami $\sqrt{2ax-x^2}$ a $\sqrt{2ax}$.

První z nich je půlkružnice se středem v bodě $(a,0)$ a poloměrem a, což snadno zjistíme výpočtem

$$\begin{gathered}y=\sqrt{2ax-x^2},\\ y^2=2ax-x^2,\\ (x-a)^2+y^2=a^2.\end{gathered}$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Druhá z křivek, tedy $\sqrt{2ax}$, je graf funkce "druhá odmocnina."Při záměně pořadí se nejprve integruje podle proměnné x.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Druhá z křivek, tedy $\sqrt{2ax}$, je graf funkce "druhá odmocnina."Při záměně pořadí se nejprve integruje podle proměnné x.

Z obrázku je patrné, že pro $y \in (0, a)$ musíme integrál podle x rozdělit na součet dvou integrálů, a sice na integrál přes interval $(\frac{y^2}{2a}, a - \sqrt{a^2 + y^2})$ a na integrál přes $(a + \sqrt{a^2 + y^2}, 2a)$. Pro $y \in (a, 2a)$ integrujeme podle x přes interval $(\frac{y^2}{2a}, 2a)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Druhá z křivek, tedy $\sqrt{2ax}$, je graf funkce "druhá odmocnina."Při záměně pořadí se nejprve integruje podle proměnné x.

Z obrázku je patrné, že pro $y \in (0,a)$ musíme integrál podle x rozdělit na součet dvou integrálů, a sice na integrál přes interval $(\frac{y^2}{2a}, a - \sqrt{a^2+y^2})$ a na integrál přes $(a + \sqrt{a^2+y^2}, 2a)$. Pro $y \in (a, 2a)$ integrujeme podle x přes interval $(\frac{y^2}{2a}, 2a)$.

Dostáváme tak výsledek

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{a} \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2+y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\sqrt{a^2+y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y +$$

$$+ \int_a^{2a} \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Druhá z křivek, tedy $\sqrt{2ax}$, je graf funkce "druhá odmocnina."Při záměně pořadí se nejprve integruje podle proměnné x.

Z obrázku je patrné, že pro $y \in (0, a)$ musíme integrál podle x rozdělit na součet dvou integrálů, a sice na integrál přes interval $(\frac{y^2}{2a}, a - \sqrt{a^2 + y^2})$ a na integrál přes $(a + \sqrt{a^2 + y^2}, 2a)$. Pro $y \in (a, 2a)$ integrujeme podle x přes interval $(\frac{y^2}{2a}, 2a)$.

Dostáváme tak výsledek

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{a} \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2+y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\sqrt{a^2+y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y +$$

$$+ \int_a^{2a} \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

My holčičky máme vždycky nejvíc práce . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 4.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SUBSTITUCE

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SUBSTITUCE

Jak lze převést substituční větu z jedné proměnné na více proměnné?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SUBSTITUCE

Jak lze převést substituční větu z jedné proměnné na více proměnné?

Jednak se transformuje množina, přes kterou se integruje a jednak se transformuje funkce, která se integruje!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SUBSTITUCE

Jak lze převést substituční větu z jedné proměnné na více proměnné?

Jednak se transformuje množina, přes kterou se integruje a jednak se transformuje funkce, která se integruje!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Už to vypadalo, že se sem nikdy nedostaneme . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

Předně je proto nutné pro substituce nalézt vhodné funkce! A to dá práci.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

Předně je proto nutné pro substituce nalézt vhodné funkce! A to dá práci.

Je potřeba, aby se otevřená množina převedla opět na otevřenou množinu a její hranice na hranici nové množiny.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

Předně je proto nutné pro substituce nalézt vhodné funkce! A to dá práci.

Je potřeba, aby se otevřená množina převedla opět na otevřenou množinu a její hranice na hranici nové množiny.

Stejně jako u jedné proměnné musí být transformační zobrazení prosté.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

Předně je proto nutné pro substituce nalézt vhodné funkce! A to dá práci.

Je potřeba, aby se otevřená množina převedla opět na otevřenou množinu a její hranice na hranici nové množiny.

Stejně jako u jedné proměnné musí být transformační zobrazení prosté.

Zřejmě musí být i spojité a, protože se v transformaci funkce opět vyskytnou derivace, měly by být i parciální derivace transformace spojité.

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

Předně je proto nutné pro substituce nalézt vhodné funkce! A to dá práci.

Je potřeba, aby se otevřená množina převedla opět na otevřenou množinu a její hranice na hranici nové množiny.

Stejně jako u jedné proměnné musí být transformační zobrazení prosté.

Zřejmě musí být i spojité a, protože se v transformaci funkce opět vyskytnou derivace, měly by být i parciální derivace transformace spojité.

Bude nutné přidat ještě jeden přirozený požadavek odpovídající nenulovosti derivace.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz následující věty je komplikovaný a vyžaduje jisté znalosti z geometrie roviny, které jdou nad rámec tohoto textu. Proto důkaz uveden nebude.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz následující věty je komplikovaný a vyžaduje jisté znalosti z geometrie roviny, které jdou nad rámec tohoto textu. Proto důkaz uveden nebude.

VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Důkaz následující věty je komplikovaný a vyžaduje jisté znalosti z geometrie roviny, které jdou nad rámec tohoto textu. Proto důkaz uveden nebude.

VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Uvedený determinant se značí $J(\varphi, \psi)$ a nazývá Jacobiho determinant nebo stručněji Jacobián. Zobrazení Φ mající uvedené tři vlastnosti předchozí věty se nazývá regulární zobrazení.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Regulární zobrazení jsou jakési plastické deformace definičního oboru. Lokálně (v bodě) se plastická hmota definičního oboru zředí s koeficientem rovným Jacobiánu.

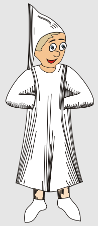
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Regulární zobrazení jsou jakési plastické deformace definičního oboru. Lokálně (v bodě) se plastická hmota definičního oboru zředí s koeficientem rovným Jacobiánu.

To, že vše vyjde je moje dílo. Jsem na to pyšný!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Regulární zobrazení jsou jakési plastické deformace definičního oboru. Lokálně (v bodě) se plastická hmota definičního oboru zředí s koeficientem rovným Jacobiánu.



To, že vše vyjde je moje dílo. Jsem na to pyšný!

Dík. BTW, je to v podstatě to samé jako v jednorozměrném případě. Hm ...

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na H. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,$$

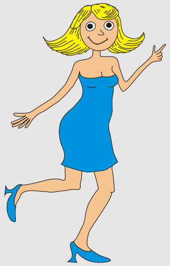
jestliže má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na H. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(\varphi, \psi)|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.



Vzhledem k podobnosti s jednorozměrným případem se budeme soustředit na odchylky ;-)

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

1. Často se pojem *regulární zobrazení* používá pro zobrazení splňující jen první dvě podmínky předchozí definice, tj., zobrazení nemusí být prosté. Pro účely substituce v integrálu je však nutné použít prostá zobrazení, proto byla tato podmínka zahrnuta do definice regulárního zobrazení.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

1. Často se pojem *regulární zobrazení* používá pro zobrazení splňující jen první dvě podmínky předchozí definice, tj., zobrazení nemusí být prosté. Pro účely substituce v integrálu je však nutné použít prostá zobrazení, proto byla tato podmínka zahrnuta do definice regulárního zobrazení.

Kdyby prosté nebylo, mohli bychom jeho obraz "zintegrovat"třeba pětinásobně.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Poznámky 5 :

1. Často se pojem *regulární zobrazení* používá pro zobrazení splňující jen první dvě podmínky předchozí definice, tj., zobrazení nemusí být prosté. Pro účely substituce v integrálu je však nutné použít prostá zobrazení, proto byla tato podmínka zahrnuta do definice regulárního zobrazení.

Kdyby prosté nebylo, mohli bychom jeho obraz "zintegrovat"třeba pětinásobně.

Substituce je pouze jenom uplácání hmoty do lepšího tvaru. Je to úplně jasné.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V případě funkcí jedné proměnné definované na intervalu dává uvedená definice regulárního zobrazení funkce mající nenulovou spojitou derivaci na daném intervalu (třetí podmínka o prostém zobrazení je splněna automaticky).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

V případě funkcí jedné proměnné definované na intervalu dává uvedená definice regulárního zobrazení funkce mající nenulovou spojitou derivaci na daném intervalu (třetí podmínka o prostém zobrazení je splněna automaticky).

Pokud se regulární zobrazení otevřené množiny G na otevřenou množinu H rozšíří spojitě i na hranici množiny G, zobrazuje tuto hranici na hranici množiny H (nemusí však být na hranici prostě).

V případě funkcí jedné proměnné definované na intervalu dává uvedená definice regulárního zobrazení funkce mající nenulovou spojitou derivaci na daném intervalu (třetí podmínka o prostém zobrazení je splněna automaticky).

Pokud se regulární zobrazení otevřené množiny G na otevřenou množinu H rozšíří spojitě i na hranici množiny G, zobrazuje tuto hranici na hranici množiny H (nemusí však být na hranici prostě).

A co pro neomezené množiny???

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pro funkce jedné proměnné se uvedená formulace věty o záměně proměnných v integrálu na první pohled liší od dříve uvedené věty o substituci.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pro funkce jedné proměnné se uvedená formulace věty o záměně proměnných v integrálu na první pohled liší od dříve uvedené věty o substituci.

Tam byl jacobián (tj. derivace φ') bez absolutní hodnoty. Ale meze a, b mohly být uspořádány jako $a > b$.

2. Pro funkce jedné proměnné se uvedená formulace věty o záměně proměnných v integrálu na první pohled liší od dříve uvedené věty o substituci.

Tam byl jacobián (tj. derivace φ') bez absolutní hodnoty. Ale meze a, b mohly být uspořádány jako $a > b$.

Pak se přehozením mezí změnilo znaménko a to vlastně změní φ' na $|\varphi'|$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Pro funkce jedné proměnné se uvedená formulace věty o záměně proměnných v integrálu na první pohled liší od dříve uvedené věty o substituci.

Tam byl jacobián (tj. derivace φ') bez absolutní hodnoty. Ale meze a, b mohly být uspořádány jako $a > b$.

Pak se přehozením mezí změnilo znaménko a to vlastně změní φ' na $|\varphi'|$.

To si dobře promyslete.

Uvědomte si, že pokud zobrazení φ mělo v nějakém bodě derivaci zápornou a navíc všude spojitou nenulovou, byla derivace záporná všude (nemohla se přes nulu "přehoupnout"), a tedy zobrazení bylo klesající a proto $a > b$.

Konec poznámek 5.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Polární souřadnice.
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Polární souřadnice.
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

⇓

Spočtěte, že jacobián $J = r$.

⇓

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Polární souřadnice.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

⬇

Spočtěte, že jacobián $J = r$.

⬇

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a + 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 5 :

1. Polární souřadnice.
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

Spočtěte, že jacobián $J = r$.

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a + 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

Tato množina je malá ve smyslu, že změna hodnot funkce na této množině neovlivní hodnotu integrálu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

⬇

Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x, y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

⬇

Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

⬇

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

⬇

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

⬇

Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

⬇

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

⬇

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

⬇

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1,2), v \in (2,3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

⬇

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

⬇

Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

⬇

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

⬇

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

⬇

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1,2), v \in (2,3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

⬇

Pokud spočtete jacobián inverzního zobrazení, dostanete hodnotu $3y^2/x$, což je $3v$ a tedy převrácená hodnota prvního jacobiánu. Tato situace platí obecně (viz *Otázky*).

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1,2), v \in (2,3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

Pokud spočtete jacobián inverzního zobrazení, dostanete hodnotu $3y^2/x$, což je $3v$ a tedy převrácená hodnota prvního jacobiánu. Tato situace platí obecně (viz *Otázky*).

Výsledný obsah je pak roven $\log(3/2)/3$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte

$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int_K e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,,$$

kde K je první kvadrant.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte

$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int_K e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,,$$

kde K je první kvadrant.

V posledním integrálu zaveďte polární souřadnice a dostanete integrál

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \int_0^\infty re^{-r^2}\ \mathrm{d}r\,,$$

který snadno spočtete. Výsledkem bude $L = \sqrt{\pi}/2$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte

$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int_K e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,,$$

kde K je první kvadrant.

V posledním integrálu zaveďte polární souřadnice a dostanete integrál

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \int_0^\infty r e^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,,$$

který snadno spočtete. Výsledkem bude $L = \sqrt{\pi}/2$.

To je paráda. Tenhle integrál mne vždy příjemně překvapí.

Konec příkladů 5.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :

1. Upravte definici regulárního zobrazení a větu o substituci pro jednorozměrný případ a ukažte, že dostanete věty o substituci pro Newtonův integrál.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 5 :

1. Upravte definici regulárního zobrazení a větu o substituci pro jednorozměrný případ a ukažte, že dostanete věty o substituci pro Newtonův integrál.

A jaképak má asi parciální derivace identické zobrazení?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teď je trošku těžší tvrzení, ale VELICE užitečné.

2*. Dokažte následující tvrzení: *Zobrazují-li $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ regulárně otevřenou množinu G na množinu H a (g, h) je inverzní zobrazení $H \to G$, pak $J(\varphi, \psi) = 1/J(g, h)$, dosadí-li se do pravé strany za u, v jejich vyjádření v x, y.*

Teď je trošku těžší tvrzení, ale VELICE užitečné.

2*. Dokažte následující tvrzení: *Zobrazují-li $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ regulárně otevřenou množinu G na množinu H a (g, h) je inverzní zobrazení $H \to G$, pak $J(\varphi, \psi) = 1/J(g, h)$, dosadí-li se do pravé strany za u, v jejich vyjádření v x, y.*

[Použijte parciální derivace složených funkcí.]

Teď je trošku těžší tvrzení, ale VELICE užitečné.

2*. Dokažte následující tvrzení: *Zobrazují-li* $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ *regulárně otevřenou množinu* G *na množinu* H *a* (g,h) *je inverzní zobrazení* $H \to G$, *pak* $J(\varphi,\psi) = 1/J(g,h)$, *dosadí-li se do pravé strany za* u, v *jejich vyjádření v* x, y.

[Použijte parciální derivace složených funkcí.]

To je sqělý. To používám rád.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teď je trošku těžší tvrzení, ale VELICE užitečné.

2*. Dokažte následující tvrzení: *Zobrazují-li* $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ *regulárně otevřenou množinu* G *na množinu* H *a* (g, h) *je inverzní zobrazení* $H \to G$, *pak* $J(\varphi, \psi) = 1/J(g, h)$, *dosadí-li se do pravé strany za* u, v *jejich vyjádření v* x, y.

[Použijte parciální derivace složených funkcí.]

To je sqělý. To používám rád.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alespoň jeden ten jacobián se ale musí někde najít, není-liž pravda.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Alespoň jeden ten jacobián se ale musí někde najít, není-liž pravda.

Ano. Mimochodem, díky našim definicím se $\mathbb{R}^2$ chová jako hmota a substituce tomu rozumí. To je hezké.

Konec otázek 5.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

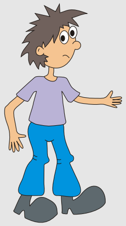
Cvičení 5 :

Ne všechno jde dobře řezat.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 5 :

Ne všechno jde dobře řezat.



Například kokosový ořech je záludná potvora.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když se na kokosový ořech podíváš kouzelnými brýlemi, je hranatý a dobře se řeže.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Když se na kokosový ořech podíváš kouzelnými brýlemi, je hranatý a dobře se řeže.

Místo kouzelných brýlí stačí tu množinu transformovat na hezčí množinu pomocí substituce.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Substituce je základem mnohých kouzel . . .

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Substituce je základem mnohých kouzel . . .

Například substituce $y = 1/x$ transformuje náš x-ový dvorek $[0, 1]$ na y-ový lán $[1, +\infty]$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Substituce je základem mnohých kouzel ...

Například substituce $y = 1/x$ transformuje náš x-ový dvorek $[0, 1]$ na y-ový lán $[1, +\infty]$.

A to se u nekonečna ještě musí přemýšlet.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Substituce je nejčastěji používána na kulaté věci jako ořech, ten se přetransformuje na kvádr a ten se dobře řeže.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Substituce je nejčastěji používána na kulaté věci jako ořech, ten se přetransformuje na kvádr a ten se dobře řeže.

Zkusíme dvojrozměrný ořech.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ořech v rovině je například $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ořech v rovině je například $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

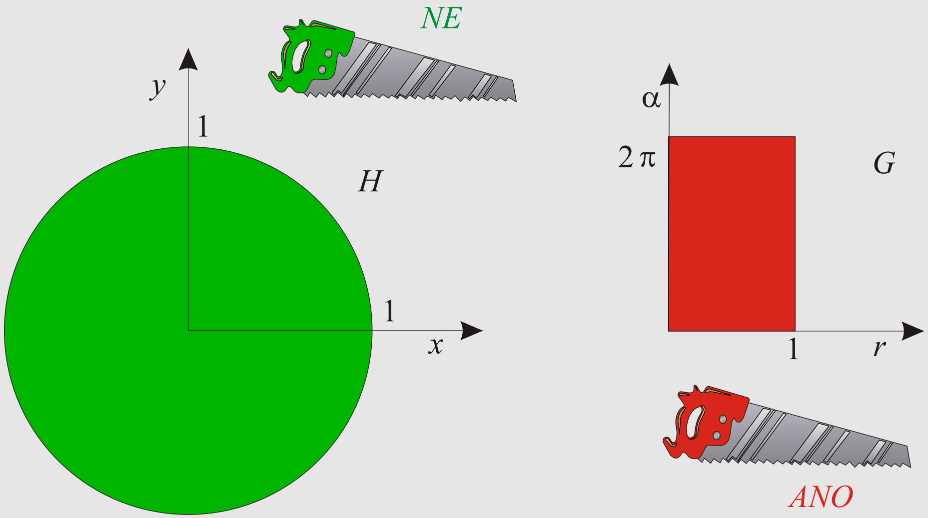
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y daná vzorci

$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$$

s jacobiánem $J = r$ nám dovolí (SUBSTITUCE) napsat ořech takto $G = \{(r, \alpha) : 0 < r \leq 1, 0 < \alpha < 2\pi\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární ořech je hranatý a bude se dobře řezat.



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

Podle věty o substituci bude platit pro rovinnou velikost ořechu (integrujeme $f(x, y) = 1$)

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_G f(\varphi(r,\alpha),\psi(r,\alpha))|J(\varphi,\psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

Podle věty o substituci bude platit pro rovinnou velikost ořechu (integrujeme $f(x, y) = 1$)

$$\int_H f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(r, \alpha), \psi(r, \alpha))|J(\varphi, \psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,$$

tedy

$$\int_H 1\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G r\ \ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

Podle věty o substituci bude platit pro rovinnou velikost ořechu (integrujeme $f(x, y) = 1$)

$$\int_H f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(r, \alpha), \psi(r, \alpha))|J(\varphi, \psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,$$

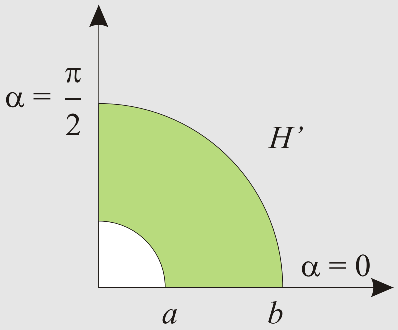
tedy

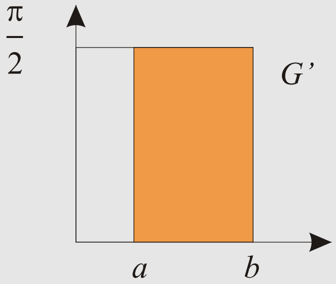
$$\int_H 1\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G r\ \ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$

A vpravo je to hranaté, tedy se to snadno spočte.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

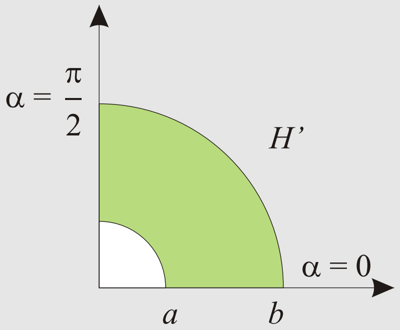
Podobně se transformují takzvané "koko-bello".

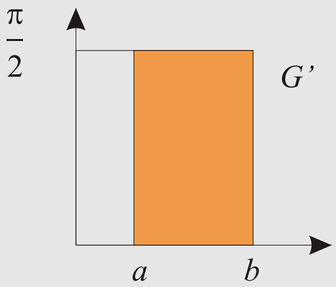




LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podobně se transformují takzvané "koko-bello".





Raději bych opravdu řezal hranatý ořech, ale nevím, jak bude chutnat ten hranatý.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Mimochodem, nějaké body ořechu zmizely (pro $\alpha = 0$), což nevadí.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Mimochodem, nějaké body ořechu zmizely (pro $\alpha = 0$), což nevadí.

Existují i jednodušší substituce. Například $u = y$, $v = x$. Hodí se na něco?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Mimochodem, nějaké body ořechu zmizely (pro $\alpha = 0$), což nevadí.

Existují i jednodušší substituce. Například $u = y$, $v = x$. Hodí se na něco?

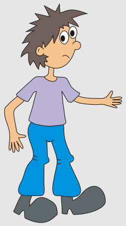
$$\int_0^1 \left(\int_0^2 1 \ \mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_H 1 \ \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_G 1\,|1| \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v = \int_0^2 \left(\int_0^1 1 \ \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Prohození.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Prohození.



Prohození. Jednou mne prohození bolelo.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množině $M = \{x^4 + y^4 \leq 1\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na množině $M = \{x^4 + y^4 \leq 1\}$.

⬇

Řešení. Pro výpočet zvolíme polární souřadnice. Provedeme tedy substituci

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x,y)=x^2+y^2$ na množině $M=\{x^4+y^4\le 1\}$.

Řešení. Pro výpočet zvolíme polární souřadnice. Provedeme tedy substituci

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi.$$

Jak snadno zjistíme, vzorem množiny M je množina

$$\left\{(r,\varphi):\ r\le(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-\frac{1}{4}},\ \varphi\in(-\pi,\pi)\right\}.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ na množině $M = \{x^4+y^4 \leq 1\}$.

Řešení. Pro výpočet zvolíme polární souřadnice. Provedeme tedy substituci

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Jak snadno zjistíme, vzorem množiny M je množina

$$\left\{(r,\varphi) :\ r \leq (\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^{-\frac{1}{4}},\ \varphi \in (-\pi,\pi)\right\}.$$

Jsem HAPPY !!!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Platí tedy

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-\frac{1}{4}}} r^2 r\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-1}\,\mathrm{d}\varphi = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Platí tedy

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-\frac14}} r^2 r\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac14\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-1}\,\mathrm{d}\varphi = \cdots = \frac{\sqrt2}{2}\pi.$$

A co kdyby ti Mikuláš s čertem přinesli substituci $x = r\sqrt{\cos\varphi}, \quad y = r\sqrt{\sin\varphi}$?

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Platí tedy

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-\frac{1}{4}}} r^2 r\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-1}\,\mathrm{d}\varphi = \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

A co kdyby ti Mikuláš s čertem přinesli substituci $x = r\sqrt{\cos\varphi}$, $\quad y = r\sqrt{\sin\varphi}$?

Jsem HAPPIER !!!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Problém bývá s tím, jak najít při dané substituci obraz množiny. Zpravidla stačí vzoreček, kterým je množina definována pro (x, y) přepsat pomocí substitučních vzorečků.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Problém bývá s tím, jak najít při dané substituci obraz množiny. Zpravidla stačí vzoreček, kterým je množina definována pro (x, y) přepsat pomocí substitučních vzorečků.

A to samé je při celém integrování. Přepíše se podle substituce množina, funkce i ta tajuplná $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. Tedy substituce z jedné vody načisto.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x + y$ na množině $\{1 < x + y < 2,\ 3 < x - y < 4\}$"

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x+y$ na množině $\{1 < x+y < 2,\ 3 < x-y < 4\}$"

⬇

se po substituci $x+y=u$, $x-y=v$ tváří

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x+y$ na množině $\{1 < x+y < 2,\ 3 < x-y < 4\}$"

⬇

se po substituci $x+y=u$, $x-y=v$ tváří

⬇

"Vypočítejte integrál funkce $u \cdot |J|$ na množině $\{1 < u < 2,\ 3 < v < 4\}$, kde J je determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial u}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix} ."$$

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x + y$ na množině $\{1 < x + y < 2,\ 3 < x - y < 4\}$"

$\Downarrow$

se po substituci $x + y = u$, $x - y = v$ tváří

$\Downarrow$

"Vypočítejte integrál funkce $u \cdot |J|$ na množině $\{1 < u < 2,\ 3 < v < 4\}$, kde J je determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial u}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix} ."$$

$\Downarrow$

Něco se ale muselo udělat. Najít inverzní formulku pro x a y. Protože ta substituce je obecně záludná.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud bych uhodl substituci ve tvaru $x = u + v$, $y = u - v$, byl bych vysmátej. Jenom bych to přepsal.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pokud bych uhodl substituci ve tvaru $x = u + v$, $y = u - v$, byl bych vysmátej. Jenom bych to přepsal.

Já jsem taky vysmátá.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 5.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Teorie trojrozměrného integrálu je obdobná teorii dvojrozměrného integrálu a v mnoha případech je změna jen formální.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Teorie trojrozměrného integrálu je obdobná teorii dvojrozměrného integrálu a v mnoha případech je změna jen formální.

Trojrozměrný integrál se převede na sled jednorozměrného a dvojrozměrného (a tedy tří jednorozměrných integrálů) vzorcem

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_a^b \Big(\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

kde (a,b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H je projekce množiny G do roviny yz.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Teorie trojrozměrného integrálu je obdobná teorii dvojrozměrného integrálu a v mnoha případech je změna jen formální.

Trojrozměrný integrál se převede na sled jednorozměrného a dvojrozměrného (a tedy tří jednorozměrných integrálů) vzorcem

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_a^b \Big(\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

kde (a,b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H je projekce množiny G do roviny yz.

Pro použití předchozí části je třeba požadovat, aby H byla typu α nebo konečné sjednocení takových nepřekrývajících se množin a projekce G do osy x byl interval nebo konečné sjednocení intervalů. Tyto množiny se mohou také nazývat typu α (nebo jsou to sjednocení konečně mnoha nepřekrývajících se množin typu α).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podívejte se nyní po řadě na tvrzení pro dvojrozměrné integrály:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podívejte se nyní po řadě na tvrzení pro dvojrozměrné integrály:

Pozorování a základní vlastnosti jsou stejné.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podívejte se nyní po řadě na tvrzení pro dvojrozměrné integrály:

Pozorování a základní vlastnosti jsou stejné.

Věta o rozdělení otevřených množin na intervaly je stejná.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podívejte se nyní po řadě na tvrzení pro dvojrozměrné integrály:

Pozorování a základní vlastnosti jsou stejné.

Věta o rozdělení otevřených množin na intervaly je stejná.

Stejný je i popis integrálu pomocí součtu integrálů přes nějaké rozdělení na intervaly.

Podívejte se nyní po řadě na tvrzení pro dvojrozměrné integrály:

Pozorování a základní vlastnosti jsou stejné.

Věta o rozdělení otevřených množin na intervaly je stejná.

Stejný je i popis integrálu pomocí součtu integrálů přes nějaké rozdělení na intervaly.

Stejné jsou i věty o existenci.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta platí i pro trojrozměrné integrály:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta platí i pro trojrozměrné integrály:

Trojrozměrný integrál spojité absolutně integrovatelné funkce lze počítat v jakémkoli pořadí souřadnic.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta platí i pro trojrozměrné integrály:

Trojrozměrný integrál spojité absolutně integrovatelné funkce lze počítat v jakémkoli pořadí souřadnic.

Možností těchto pořadí je šest a je asi zbytečné je tu všechny vypisovat. Prosím.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o záměně souřadnic za jiné se také změní jen formálně.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o záměně souřadnic za jiné se také změní jen formálně.

Nejdříve se zadefinuje *regulární zobrazení* prostoru do sebe:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť jsou na otevřené množině G definovány funkce $u = \varphi(x,y,z), v = \psi(x,y,z), w = \tau/x,y,z)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce φ, ψ, τ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

Pak se zobrazení Φ nazývá regulární a zobrazuje G na otevřenou množinu. Uvedený determinant je Jacobiho determinant nebo Jacobián a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Platí tvrzení

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))|J(\varphi, \psi, \tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.

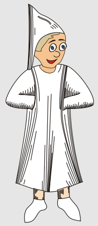
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Platí tvrzení

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))|J(\varphi, \psi, \tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.



TO jsem byl já. Byla to skvostná chvilka :-)

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 6 :

1. Určete příslušné meze v jednotlivých jednorozměrných integrálech pro $\int_G f$, kde $G = \{(x, y, z); x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 3\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady 6 :

1. Určete příslušné meze v jednotlivých jednorozměrných integrálech pro $\int_G f$, kde $G = \{(x,y,z); x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 3\}$.

Zřejmě je $0 < z < 3 - x - y, 0 < y < 3 - x, 0 < x < 3$, takže výsledkem je

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

Snadno se zjistí, že jacobián je opět roven r jako u polárních souřadnic a že toto zobrazení je prosté pro $r > 0, \alpha \in (a, a + 2\pi), z \in \mathbb{R}$, kde a je nějaké libovolné reálné číslo.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

Snadno se zjistí, že jacobián je opět roven r jako u polárních souřadnic a že toto zobrazení je prosté pro $r > 0, \alpha \in (a, a + 2\pi), z \in \mathbb{R}$, kde a je nějaké libovolné reálné číslo.

Tuto množinu zobrazuje na celé $\mathbb{R}^3$ kromě jedné poloroviny (podobně jako jedna polopřímka u polárního zobrazení).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Má se spočítat integrál

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\,.$$

Zavedením válcových souřadnic se dostanou meze $z \in (0,a), r \in (0, 2\cos\alpha), \alpha \in (0,\pi/2)$ a integrál

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\alpha} zr^2 \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\alpha\,\mathrm{dz} = 8a^2/9\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x,y,z) se promítne do roviny xy na bod (x',y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x,y,z) (resp. (x',y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x,y,z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2,\pi/2]$). Potom $x'=r'\cos\alpha, y'=r'\sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r\cos\alpha\cos\beta\,, \quad y = r\sin\alpha\cos\beta\,, \quad z = r\sin\beta\,,$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

3. Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r' \cos\alpha, y' = r' \sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r\cos\alpha\cos\beta\,, \quad y = r\sin\alpha\cos\beta\,, \quad z = r\sin\beta\,,$$

Spočtěte jacobián a dostanete $-r^2\cos\beta$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

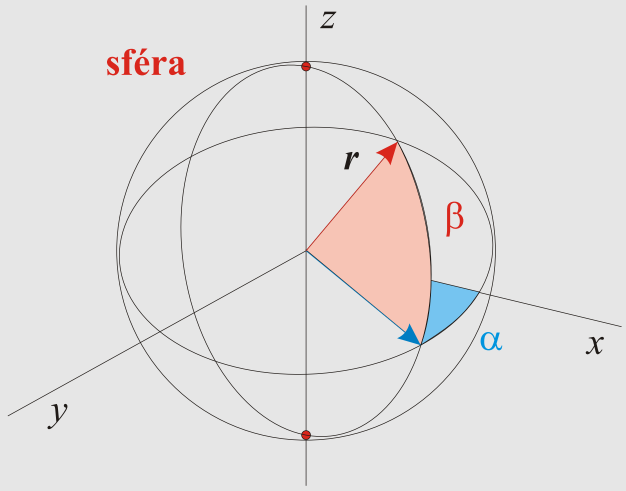
3. Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r' \cos\alpha, y' = r' \sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r\cos\alpha\cos\beta\,, \quad y = r\sin\alpha\cos\beta\,, \quad z = r\sin\beta\,,$$

Spočtěte jacobián a dostanete $-r^2\cos\beta$.

Sférické zobrazení tedy bude regulární např. na množině $r > 0, \alpha \in (0, 2\pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazí tuto množinu na celý prostor kromě uzavřené poloroviny určené osou z a kladnou osou x. Tato množina je opět malá vzhledem k integraci a změny funkce na ní neovlivní výsledek integrace.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Lze opět měnit vhodně intervaly úhlu α a tak otáčet polorovinu kolem osy z.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Lze opět měnit vhodně intervaly úhlu α a tak otáčet polorovinu kolem osy z.

Spočtěte objem elipsoidu daného vztahem $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ pro $a, b, c > 0$. Použijte modifikované sférické souřadnice $x = ar\cos\alpha\cos\beta, y = br\sin\alpha\cos\beta, z = r\sin\beta$, takže jacobián bude roven $r^2abc\cos\beta$ (spočtěte ho). Dostanete integrál přes interval, který se dá napsat jako součin tří jednorozměrných integrálů s výsledkem $4\pi abc/3$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice odpovídají zeměpisným (severní šířka, západní délka).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice odpovídají zeměpisným (severní šířka, západní délka).

To teda použijeme GPS a glóbus.

Konec příkladů 6.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 6 :

1. Dokažte příslušná tvrzení obdobná dokázaným tvrzením pro dvojrozměrný integrál.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky 6 :

1. Dokažte příslušná tvrzení obdobná dokázaným tvrzením pro dvojrozměrný integrál.

2. Napište alespoň jednu rovnost pro záměnu pořadí integrace v trojrozměrném integrálu.

Konec otázek 6.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Uvědomte si, že substituce je vlastně jiný způsob parametrizace.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Uvědomte si, že substituce je vlastně jiný způsob parametrizace.

Máme svět parametrů, jakých-si pomocných proměnných, které pomocí zobrazení popisují původní svět. To je tedy jistá deformace světa parametrů. Její lokální expanze je korigována tím Jacobiánem.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení 6 :

Uvědomte si, že substituce je vlastně jiný způsob parametrizace.

Máme svět parametrů, jakých-si pomocných proměnných, které pomocí zobrazení popisují původní svět. To je tedy jistá deformace světa parametrů. Její lokální expanze je korigována tím Jacobiánem.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy substituce je zobrazení, pomocí něhož je naše množina zadána v "parametrickém tvaru". O.K.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tedy substituce je zobrazení, pomocí něhož je naše množina zadána v "parametrickém tvaru". O.K.

ANO.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konec cvičení 6.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

STANDARDY z kapitoly

INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Základem integrace funkcí více proměnných je integrace přes řezy.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x,y)$ definovaná na intervalu $I = (a,b) \times (c,d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x,y)$ definovaná na intervalu $I = (a,b) \times (c,d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

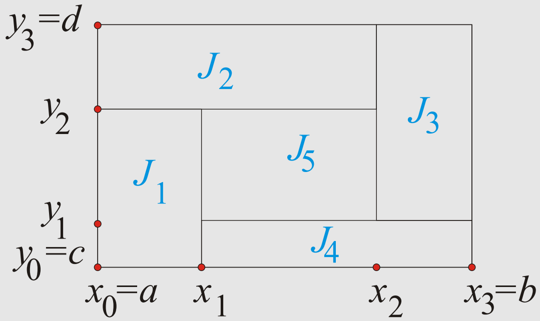
Jestliže $\int_I f$ je konečný, říká se, že $\int_I f$ *konverguje*.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jo, a celé to je lineární, aditivní a jde to počítat po hranatých kouscích.

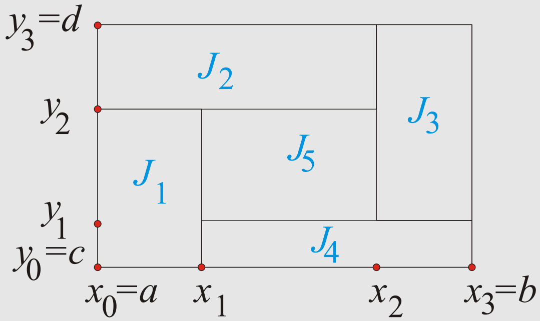
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jo, a celé to je lineární, aditivní a jde to počítat po hranatých kouscích.



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jo, a celé to je lineární, aditivní a jde to počítat po hranatých kouscích.



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jo, a ty integrály jsou Newtonovy (nebo Riemannovy, případně J-integrál, K-integrál či L-integrál).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Integrál z $x + y$ na intervalu $I = (1, 3) \times (2, 5)$ se počítá podle definice

$$\int_I (x + y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_1^3 \Big(\int_2^5 (x + y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = ...$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Klíčová věta je tahle:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Klíčová věta je tahle:

VĚTA. Je-li f spojitá omezená funkce na omezeném intervalu I, pak $\int_I f$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teď pozor: na neomezených intervalech nebo u neomezených funkcí se hraje na majoranty !!!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Teď pozor: na neomezených intervalech nebo u neomezených funkcí se hraje na majoranty !!!

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $0 \le f \le g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Úvaha o tání ledu: integrál je roven objemu hranolu s výškou rovnou hodnotě v jednom bodě (neví se ve kterém).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Úvaha o tání ledu: integrál je roven objemu hranolu s výškou rovnou hodnotě v jednom bodě (neví se ve kterém).

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a, b] \times [c, d]$ a funkce f je spojitá na I.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Úvaha o tání ledu: integrál je roven objemu hranolu s výškou rovnou hodnotě v jednom bodě (neví se ve kterém).

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a,b] \times [c,d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x \in [a,b]$ existuje $y_x \in (c,d)$ tak, že $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = f(x,y_x)(d-c)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Úvaha o tání ledu: integrál je roven objemu hranolu s výškou rovnou hodnotě v jednom bodě (neví se ve kterém).

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a, b] \times [c, d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x \in [a, b]$ existuje $y_x \in (c, d)$ tak, že $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{dy} = f(x, y_x)(d - c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x a $\int_I f = (d - c) \int_a^b f(x, y_x)\,\mathrm{dx}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Geometrický přístup

Úvaha o tání ledu: integrál je roven objemu hranolu s výškou rovnou hodnotě v jednom bodě (neví se ve kterém).

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a, b] \times [c, d]$ a funkce f je spojitá na I.

Pro každé $x \in [a, b]$ existuje $y_x \in (c, d)$ tak, že $\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}y = f(x, y_x)(d - c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x a $\int_I f = (d - c) \int_a^b f(x, y_x)\, \mathrm{d}x$.

Tedy existuje $p \in (a, b)$ tak, že $\int_I f = (d - c)(b - a) f(p, y_p)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Úvaha o tání ledu funguje:

Úvaha o tání ledu funguje:

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$, pak existuje bod (p, q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p, q)(d - c)(b - a)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí úvaha provedená na malých obdélníčcích dává rovnost mezi dvojrozměrným Newtonovým integrálem a dvojrozměrným Riemannovým integrálem (pro spojité funkce na kompaktních intervalech).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

Následující věta říká, že pro spojité funkce lze prohodit pořadí integrace $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

Následující věta říká, že pro spojité funkce lze prohodit pořadí integrace $\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$.

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$. Potom

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dokazuje se pomocí předchozí úvahy i Riemannově interpretaci dvojrozměrného integrálu.

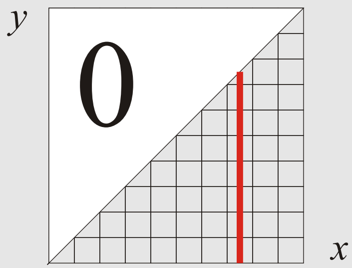
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tato důležitá věta znamená, že není třeba hlídat pořadí integrace a je možné využít vhodnějšího pořadí. Klasický je tento příklad:

Funkce f je definována na $I = (0,1) \times (0,1)$ předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \geq x; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{pro } y < x. \end{cases}$$

.



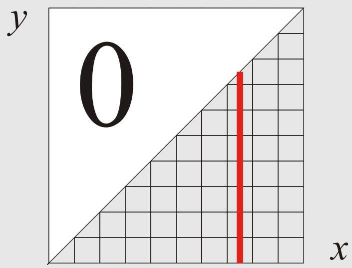
LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tato důležitá věta znamená, že není třeba hlídat pořadí integrace a je možné využít vhodnějšího pořadí. Klasický je tento příklad:

Funkce f je definována na $I = (0,1) \times (0,1)$ předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \geq x; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{pro } y < x. \end{cases}$$

.



Jde spočítat jen jedním směrem: $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \sin x$ a tedy $\int_I f = 1 - \cos(1)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Někdy je v jednorozměrném integrandu vidět, že vznikl jako vnitřní integrál v dvojrozměrném integrálu. Pak si napíšeme jak to vypadalo před tím zintegrováním, přehodíme pořadí integrace (když to jde) a zkusíme spočítat …

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Někdy je v jednorozměrném integrandu vidět, že vznikl jako vnitřní integrál v dvojrozměrném integrálu. Pak si napíšeme jak to vypadalo před tím zintegrováním, přehodíme pořadí integrace (když to jde) a zkusíme spočítat …

Takto integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \int_a^b x^y \log x \,\mathrm{dy}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Někdy je v jednorozměrném integrandu vidět, že vznikl jako vnitřní integrál v dvojrozměrném integrálu. Pak si napíšeme jak to vypadalo před tím zintegrováním, přehodíme pořadí integrace (když to jde) a zkusíme spočítat …

Takto integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \int_a^b x^y \log x\,\mathrm{dy}$.

Potom

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} = \log\frac{b+1}{a+1}\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0, 1) \times (0, 1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1)\times(0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Řešení.

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= -(\arctan(1)-\arctan(0)) = -\frac{\pi}{4}.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1)\times(0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Řešení.

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y =$$
$$= -(\arctan(1)-\arctan(0)) = -\frac{\pi}{4}.$$

Nyní integrujme stejnou funkci ale v opačném pořadí, tj. nejprve podle proměnné y a potom podle proměnné x.

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (\arctan(1)-\arctan(0)) = \frac{\pi}{4}.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Předchozí příklad ukázal, že někdy na pořadí integrace záleží. POZOR!!!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

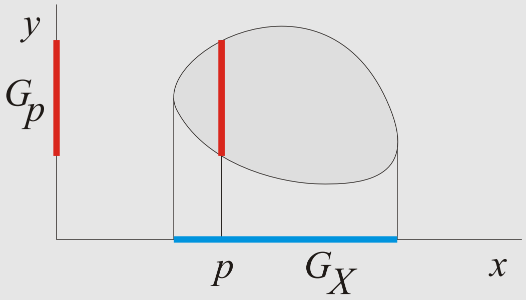
Integraci rozšíříme z intervalů na obecnější množiny. Začneme s těmi, které mají průmět na osu x jeden interval a jeho bodům odpovídají řezy intervaly. Budeme těmto množinám říkat množiny *typu* α.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Integraci rozšíříme z intervalů na obecnější množiny. Začneme s těmi, které mají průmět na osu x jeden interval a jeho bodům odpovídají řezy intervaly. Budeme těmto množinám říkat množiny *typu* α.

Polootevřená množina G v rovině je typu α, jestliže její projekce na osu x je interval (označí se G_X) a pro každé $p \in G_X$ je průnik G s kolmicí na osu x v bodě p opět interval (označí se G_p).



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A nyní rozšíříme definici integrálu na množiny typu α. Integrovat se bude přes průmět a v něm přes řezy:

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{G_X} \Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

existuje-li pravá strana.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A nyní rozšíříme definici integrálu na množiny typu α. Integrovat se bude přes průmět a v něm přes řezy:

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,,$$

existuje-li pravá strana.

Jestliže $\int_G f$ je konečný, říká se, že $\int_G f$ *konverguje*.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Pro omezenou spojitou na omezeném intervalu je vše v pořádku. Ten vzoreček je klíčový.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Existence integrálů

Pro omezenou spojitou na omezeném intervalu je vše v pořádku. Ten vzoreček je klíčový.

VĚTA. Nechť $\varphi \le \psi$ jsou spojité funkce na omezeném intervalu (a, b) a $G = \{(x, y); x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak $\int_G f$ konverguje pro každou omezenou a spojitou funkci na G a platí

$$\int_G f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{G_Y} \left(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{G_Y} \left(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

Tak to je rozumné. Pokud tam není zaručena ta absolutní integrovatelnost, tak by to nemuselo vyjít (viz o velký kus výše).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SUBSTITUCE

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

SUBSTITUCE

Substituce u dvou proměnných používá regulárního zobrazení (Jacobián nenulový, nedegeneruje „dvojrozměrnost“ množiny) otevřené množiny G na otevřenou množinu H:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Uvedený determinant se značí $J(\varphi, \psi)$ a nazývá Jacobiho determinant nebo stručněji Jacobián. Zobrazení Φ mající uvedené tři vlastnosti předchozí věty se nazývá regulární zobrazení.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Regulární zobrazení jsou jakési plastické deformace definičního oboru. Lokálně (v bodě) se plastická hmota definičního oboru zředí s koeficientem rovným Jacobiánu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Regulární zobrazení jsou jakési plastické deformace definičního oboru. Lokálně (v bodě) se plastická hmota definičního oboru zředí s koeficientem rovným Jacobiánu.

Dík. BTW, je to v podstatě to samé jako v jednorozměrném případě. Hm ...

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Takže věta o substituci zní takto:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Takže věta o substituci zní takto:

VĚTA. Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na H. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

⬇

Spočte se, že jacobián $J = r$.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

Spočte se, že jacobián $J = r$.

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a + 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

Spočte se, že jacobián $J = r$.

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a + 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

Tato množina je malá ve smyslu, že změna hodnot funkce na této množině neovlivní hodnotu integrálu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polární souřadnice.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

Spočte se, že jacobián $J = r$.

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a + 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

Tato množina je malá ve smyslu, že změna hodnot funkce na této množině neovlivní hodnotu integrálu.

Takže

$$STD_{(r,\alpha)} = \{(r, \alpha) \in R^2 |\, r \in (0, \infty), \alpha \in (0, 2\pi)\} \ .$$

Takže

$$STD_{(x,y)} = \{(x, y) \in R^2 |\, (y = 0) \ \Rightarrow \ (x < 0)\} \ .$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí polárních souřadnic spočtěte plochu kruhu.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí polárních souřadnic spočtěte plochu kruhu.

A pak pomocí polárních souřadnic spočtěte obsah množiny $\{x^2 + y^2 < 2x\}$. Neudělejte to takhle blbě:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\alpha} r \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\alpha \, .$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomocí polárních souřadnic spočtěte plochu kruhu.

A pak pomocí polárních souřadnic spočtěte obsah množiny $\{x^2 + y^2 < 2x\}$. Neudělejte to takhle blbě:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\alpha} r \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\alpha \, .$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A takhle si děláme vlastní souřadnice (teda vlastně substituci, ta je to hlavní):

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x, y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x, y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1,2), v \in (2,3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x, y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

⬇

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

⬇

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

⬇

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

⬇

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1, 2), v \in (2, 3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

⬇

Pokud spočtete jacobián inverzního zobrazení, dostanete hodnotu $3y^2/x$, což je $3v$ a tedy převrácená hodnota prvního jacobiánu. Tato situace platí obecně.

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x,y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1,2), v \in (2,3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

Pokud spočtete jacobián inverzního zobrazení, dostanete hodnotu $3y^2/x$, což je $3v$ a tedy převrácená hodnota prvního jacobiánu. Tato situace platí obecně.

Výsledný obsah je pak roven $\log(3/2)/3$.

Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte

$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int_K e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,,$$

kde K je první kvadrant.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte

$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int_K e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,,$$

kde K je první kvadrant.

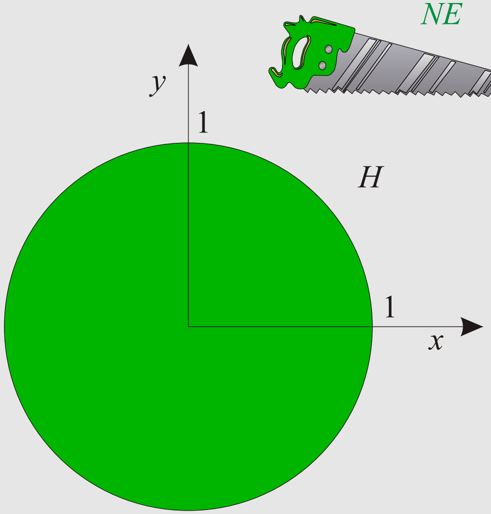
V posledním integrálu zaveďte polární souřadnice a dostanete integrál

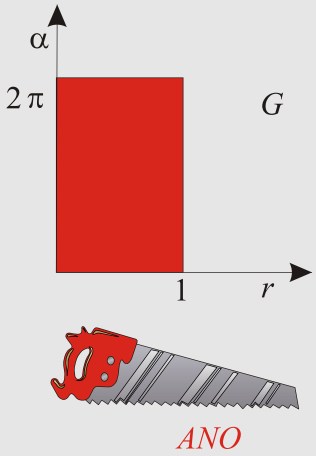
$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \int_0^\infty r e^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,,$$

který snadno spočtete. Výsledkem bude $L = \sqrt{\pi}/2$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kulatou věc převedeme na hranatou a bude se dobře řezat.





LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kruh v rovině je $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kruh v rovině je $H = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y daná vzorci

$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$$

s jacobiánem $J = r$ nám dovolí (SUBSTITUCE) napsat kruh takto $G = \{(r,\alpha) : 0 < r \leq 1, 0 < \alpha < 2\pi\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kruh v rovině je $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y daná vzorci

$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$$

s jacobiánem $J = r$ nám dovolí (SUBSTITUCE) napsat kruh takto $G = \{(r, \alpha) : 0 < r \le 1, 0 < \alpha < 2\pi\}$.

tedy

$$\int_H 1 \, \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_G r \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomaleji: Nejprve nahradíme množinu H množinou $H_{(x,y)} = H \cap STD_{(x,y)}$, tedy

$$H_{(x,y)} = \{(x, y) \in STD_{(x,y)} | x^2 + y^2 \le 1\} .$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pomaleji: Nejprve nahradíme množinu H množinou $H_{(x,y)} = H \cap STD_{(x,y)}$, tedy

$$H_{(x,y)} = \{(x,y) \in STD_{(x,y)} | x^2 + y^2 \leq 1\} \ .$$

Pak přepíšeme $H_{(x,y)}$ na $G_{(r,\alpha)}$ použitím polárních souřadnic (substituce $(x,y) \longleftrightarrow (r,\alpha)$, $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$) a dostaneme

$$G_{(r,\alpha)} = \{(r,\alpha) \in STD_{(r,\alpha)} | r^2 \leq 1\} \ .$$

Pomaleji: Nejprve nahradíme množinu H množinou $H_{(x,y)} = H \cap STD_{(x,y)}$, tedy

$$H_{(x,y)} = \{(x,y) \in STD_{(x,y)} | x^2 + y^2 \leq 1\} \ .$$

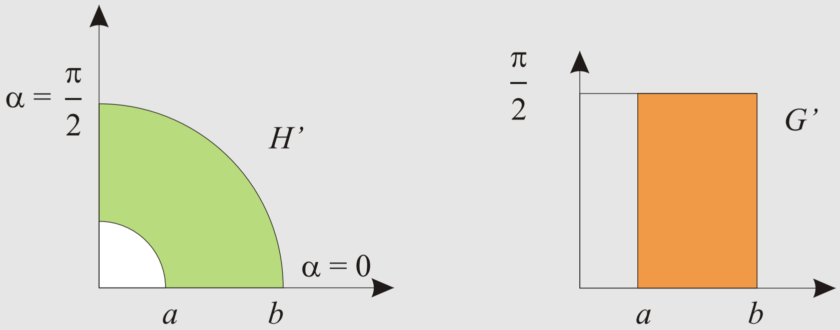
Pak přepíšeme $H_{(x,y)}$ na $G_{(r,\alpha)}$ použitím polárních souřadnic (substituce $(x,y) \longleftrightarrow (r,\alpha)$, $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$) a dostaneme

$$G_{(r,\alpha)} = \{(r,\alpha) \in STD_{(r,\alpha)} | r^2 \leq 1\} \ .$$

Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0,\infty)$ a pro α z otevřeného intervalu $(0,2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A ještě jednou polární souřadnice na jinou množinu:



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x + y$ na množině $\{1 < x + y < 2,\ 3 < x - y < 4\}$"

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x + y$ na množině $\{1 < x + y < 2,\ 3 < x - y < 4\}$"

⬇

se po substituci $x + y = u$, $x - y = v$ tváří

⬇

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x+y$ na množině $\{1<x+y<2,\ 3<x-y<4\}$"

$\Downarrow$

se po substituci $x+y=u$, $x-y=v$ tváří

$\Downarrow$

"Vypočítejte integrál funkce $u\cdot|J|$ na množině $\{1<u<2,\ 3<v<4\}$, kde J je determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial u}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix}\ ."$$

$\Downarrow$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

"Vypočítejte integrál funkce $x+y$ na množině $\{1 < x+y < 2,\ 3 < x-y < 4\}$"

↓

se po substituci $x+y=u$, $x-y=v$ tváří

↓

"Vypočítejte integrál funkce $u \cdot |J|$ na množině $\{1 < u < 2,\ 3 < v < 4\}$, kde J je determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial u}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix} .\text{''}$$

↓

POZOR: Něco se ale muselo udělat. Najít inverzní formulku pro x a y (zde se muselo spočítat $x = u+v$, $y = u-v$). Protože ta substituce je obecně záludná!!!

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Dvojrozměrný integrál se (definicí) převedl na jednorozměrný. Podobně se postupuje ve vyšších dimenzích. Promítne se na nějaký podprostor a přes něj se integrují řezy:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Dvojrozměrný integrál se (definicí) převedl na jednorozměrný. Podobně se postupuje ve vyšších dimenzích. Promítne se na nějaký podprostor a přes něj se integrují řezy:

Trojrozměrný integrál se převede na sled jednorozměrného a dvojrozměrného (a tedy tří jednorozměrných integrálů) vzorcem

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_a^b \Big(\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

kde (a,b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H je projekce množiny G do roviny yz.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A takhle se to počítá zpaměti:

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A takhle se to počítá zpaměti:

Příklad. Určete příslušné meze v jednotlivých jednorozměrných integrálech pro $\int_G f$, kde $G = \{(x, y, z); x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 3\}$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

A takhle se to počítá zpaměti:

Příklad. Určete příslušné meze v jednotlivých jednorozměrných integrálech pro $\int_G f$, kde $G = \{(x,y,z); x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 3\}$.

Řešení. Zřejmě je $0 < z < 3 - x - y, 0 < y < 3 - x, 0 < x < 3$, takže výsledkem je

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}\,.$$

Tvrzení o záměně souřadnic za jiné se změní jen formálně.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Tvrzení o záměně souřadnic za jiné se změní jen formálně.

Nechť jsou na otevřené množině G definovány funkce $u = \varphi(x, y, z)$, $v = \psi(x, y, z)$, $w = \tau/x, y, z)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce φ, ψ, τ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

Pak se zobrazení Φ nazývá regulární a zobrazuje G na otevřenou množinu. Uvedený determinant je Jacobiho determinant nebo Jacobián a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_G f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w))|J(\varphi,\psi,\tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w))|J(\varphi,\psi,\tau)|\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Ten Jacobián je ten převodní koeficient substituce:

$$(x,y,z) = (\varphi,\psi,\tau)(u,v,w)$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = |J(\varphi,\psi,\tau)|\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}w\;.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

Snadno se zjistí, že jacobián je opět roven r jako u polárních souřadnic a že toto zobrazení je prosté pro $r > 0, \alpha \in (a, a + 2\pi), z \in \mathbb{R}$, kde a je nějaké libovolné reálné číslo.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

Snadno se zjistí, že jacobián je opět roven r jako u polárních souřadnic a že toto zobrazení je prosté pro $r > 0, \alpha \in (a, a + 2\pi), z \in \mathbb{R}$, kde a je nějaké libovolné reálné číslo.

Tuto množinu zobrazuje na celé $\mathbb{R}^3$ kromě jedné poloroviny (podobně jako jedna polopřímka u polárního zobrazení).

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r' \cos\alpha, y' = r' \sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r\cos\alpha\cos\beta\,, \quad y = r\sin\alpha\cos\beta\,, \quad z = r\sin\beta\,,$$

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r' \cos \alpha, y' = r' \sin \alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r \cos \alpha \cos \beta\,, \quad y = r \sin \alpha \cos \beta\,, \quad z = r \sin \beta\,,$$

Spočtěte jacobián a dostanete $-r^2 \cos \beta$.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

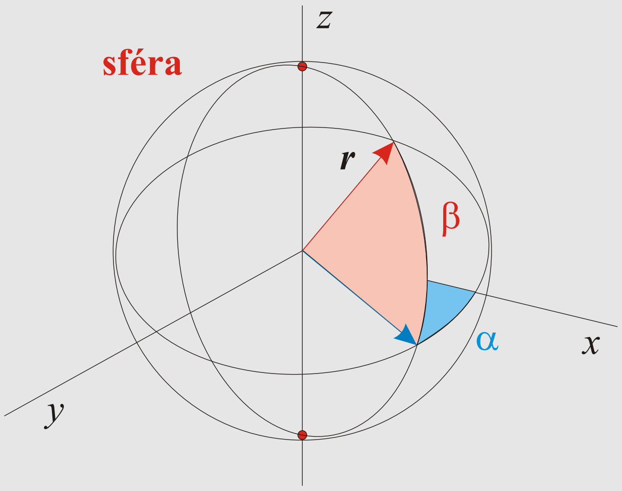
Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r' \cos\alpha, y' = r' \sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r\cos\alpha\cos\beta\,, \quad y = r\sin\alpha\cos\beta\,, \quad z = r\sin\beta\,,$$

Spočtěte jacobián a dostanete $-r^2\cos\beta$.

Sférické zobrazení tedy bude regulární např. na množině $r > 0, \alpha \in (0, 2\pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazí tuto množinu na celý prostor kromě uzavřené poloroviny určené osou z a kladnou osou x. Tato množina je opět malá vzhledem k integraci a změny funkce na ní neovlivní výsledek integrace.

LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9



LEKCE21-IVP
integrál.interval
vlastnosti1.int
vlastnosti2.int
existence.int
Riemann
Fubini
integrál.obec
vlastnosti1.obec
vlastnosti2.obec
interval-obec
existence.obec
Fubini.obec
regulární zobr
substituce
integrál v prostoru
integrál
STANDARDY
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spočtěte objem koule, válce a kužele.