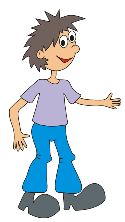
INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

V předchozích kapitolách bylo uvedeno mnoho příkladů na použití integrálu funkcí jedné proměnné.

Je zřejmě vhodné mít k dispozici podobný nástroj i pro funkce více proměnných. Vytvoříme si jej.



Na to se těším.

Integrály funkcí více proměnných jsou zobecněním jednorozměrného případu. Všimněte si, kde se objeví něco opravdu nového.

Budu se snažit. Podobně jako u funkcí jedné proměnné, lze i integrál funkcí více proměnných definovat více způsoby.

Integrál funkcí jedné proměnné byl definován jednak čistě analyticky (pomocí primitivních funkcí, tedy pomocí derivace) a jednak geometricky (pomocí limity obsahů jistých ploch).

ANO. To byly fundamentální myšlenky, které tvoří jednorozměrný integrál!!!

Pro funkce více proměnných nelze použít přístup pomocí primitivních funkcí, geometrický přístup však použít lze. Jsou však i jiné možnosti, např. pomocí teorie míry nebo pomocí rozšiřování jistých lineárních zobrazení na jistých prostorech funkcí.

Na sta je podob integrování ...

My použijeme přístup pomocí již definovaného integrálu funkcí jedné proměnné. Pak se ukáže, že pro funkce používané v praxi je tento přístup ekvivalentní geometrickému přístupu.

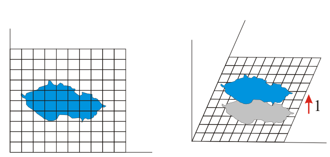
Podobně jako u jedné proměnné slouží zvolená definice pro výpočet integrálů, kdežto geometrický přístup slouží k objasnění použití integrálů.

Integrál tedy je možné definovat různými způsoby. A to se opravdu děje.

Klídek. Pro počítání příkladů je to zpravidla jedno. A tam, kde to není jedno se musí definice integrálu specifikovat.

V kapitole o aplikacích integrálu byl uveden postup pro výpočet obsahu obsahu podmnožin roviny nebo objemu objemu podmnožin prostoru, což lze chápat jako výpočet integrálu funkce dvou nebo tří proměnných, která je na dané množině identicky rovna 1 a jinde rovna 0. Tento postup lze snadno upravit pro obecné funkce.

Používá se trik, že objem tělěsa je roven "základna x výška".



Republika ve výšce 1 odpovídá integraci funkce $f(x, y) = 1$ na půdorysu republiky.

Následující výklad bude prováděn pro funkce dvou proměnných.

A vy si příslušné definice a tvrzení modifikujte i pro tři proměnné (popř. pro n proměnných, pokud je vám nejlépe ve velkém kolektivu ...).

INTEGRACE NA INTERVALECH

Oproti reálné přímce je v rovině a prostoru větší variabilita množin, přes které je vhodné integrál definovat.

V této části se seznámíte s integrací na intervalech. Potom bude integrál zadefinován i na obecnějších množinách.

DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x, y)$ definovaná na intervalu $I = (a, b) \times (c, d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

Jestliže $\int_I f$ je konečný, říká se, že $\int_I f$ *konverguje*.

Přímo z předchozí definice integrálu plynou následující pozorování (viz *Otázky*).

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $\int_I f$ konverguje a g je funkce na I, která je totožná s f na vnitřku intervalu I. Pak $\int_I g$ konverguje a rovná se $\int_I f$.
2. Nechť $A \subset B$ jsou intervaly v rovině a funkce f definovaná na B má nulové hodnoty na $B \setminus A$. Pak

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

jakmile má jedna strana smysl.

Snadno se dokáží základní vlastnosti integrálu v rovině. Některé vlastnosti obdobné těm z funkcí jedné proměnné nelze převést (např. integrace po částech), některé jsou odloženy na později (např. substituce).

Ta substituce je na vícerozměrné integraci nejkouzelnější. Už se těším.

Doufám, že i ta bude po částech.

Řekneme, že dva intervaly v rovině se nepřekrývají, jestliže jejich průnik neobsahuje žádný interval v rovině (viz též *Otázky*).

VĚTA. Nechť I je interval v rovině.

1. Integrál na I je lineární, tj. pro libovolné funkce f, g na I a pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g\,,$$

jakmile má pravá strana smysl.

2. Nechť I je sjednocením nepřekrývajících se intervalů $J_1, ..., J_n$ a f je funkce definovaná na I. Potom

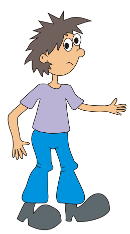
$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

jakmile má jedna strana smysl.

3. Jsou-li g, h funkce definované na I a $h \le g$ na I pak

$$\int_I h \le \int_I g\,,$$

jakmile mají obě strany smysl.

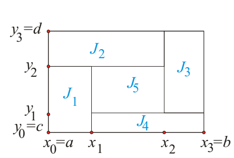


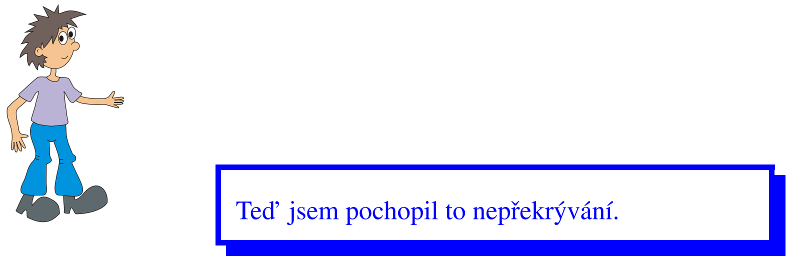
Tohle by opravdu mělo platit?

No jo. Je to trivialita.

Důkaz. Důkaz prvního a posledního tvrzení je ponechán čtenáři.

Ve druhém tvrzení se pro jednoduchost důkaz omezí na uzavřený interval I. Vezme se dělení intervalu (a,b) tvořené průměty kolmých stran intervalů J_i, např. vyjdou body $a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} = b$. Podobně na intervalu (c,d) vyjde dělení $c = x_0 < y_1 < ... < y_l < y_{y+1} = d$. Nyní je I sjednocením nepřekrývajících se intervalů $I_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], i = 0, ..., K, j = 0, ..., l$. Tento systém intervalů má vlastnost, že průměty na osy libovolných dvou intervalů se buď nepřekrývají nebo jsou totožné.





Pro takto uspořádané intervaly se druhé tvrzení dokáže jednoduše přímo z definice dvojrozměrného integrálu, použitím součtového vzorce pro zobecněné Newtonovy integrály.

Platí tedy $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j=0}^{k,l} \int_{I_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

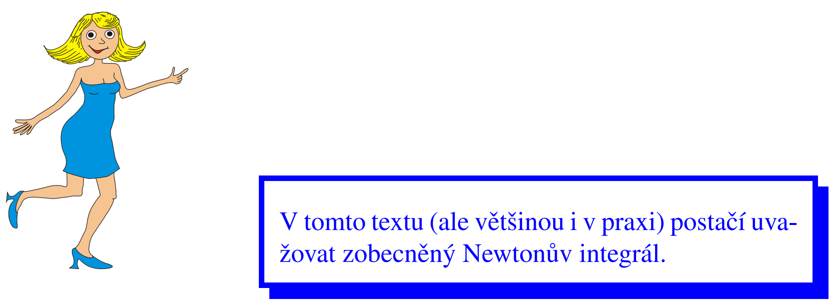
Každý interval J_m je nyní pokryt některými nepřekrývajícími se intervaly $I_{i,j}, i,j \in K_m$, které mají opět předchozí vlastnost průmětů, a tedy

$\int_{J_m} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j\in K_m} \int_{I_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$ $\diamond$

Poznámky 1:

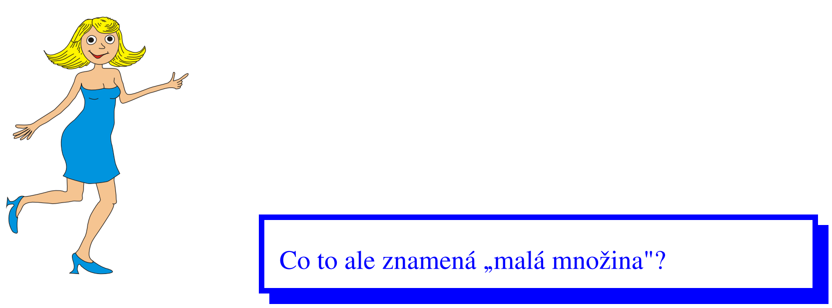
1. V definici dvojrozměrného integrálu lze místo zobecněného Newtonova integrálu použít i jiné integrály (Riemannův, J–integrál, K–integrál nebo L–integrál).

Podle obecnosti použitých integrálů se dostane obecnost příslušného integrálu funkcí dvou proměnných.



2. Pro výsledek integrace je jedno, jestli je integrovaná funkce definovaná na hranici nebo nikoli. Její hodnoty na hranici lze měnit bez vlivu na integraci.

Vzhledem k použitému integrálu je možné, aby integrovaná funkce nebyla definovaná na malé množině uvnitř intervalu anebo lze na této malé množině hodnoty funkce změnit. Hodnotu integrálu to neovlivní.



Je potřeba, aby na intervalu (a,b) existovalo jen konečně mnoho bodů p, kde $\int_c^d f(p,y)\,\mathrm{d}y$ nebude mít smysl (např. $f(p,y)$ není definováno) a pro každé jiné $p \in (a,b)$ existuje jen konečně mnoho bodů $q \in (c,d)$ takových, že $f(p,q)$ není definováno (nebo v těchto bodech není $f(p,y)$ spojitá).

Takováto malá množina může být velmi divoká.

Je lépe předpokládat, že má tvar nějaké jednoduché křivky (např. konečné sjednocení oblouků). Např. $f(x,y)$ může být spojitá v intervalu I kromě hranice menšího intervalu J vloženého do I.

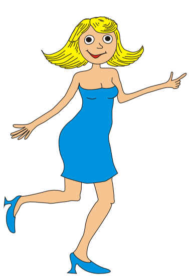
To může být případ druhého tvrzení v Pozorování, kde se hodnoty funkce na hranici menšího intervalu změní na nulu.

Při větší pozornosti lze dokonce uvažovat i nekonečně mnoho uvedených špatných bodů, ale musí být nějak hezky rozloženy.

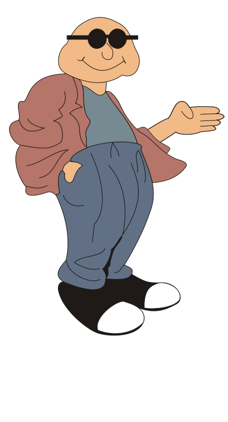
Je to podobná (jen o něco složitější) situace jako u zobecněného Newtonova integrálu.

3. Z druhého tvrzení první věty vyplývá možnost definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se intervalů:

Nechť $\{J_i\}_{i=1}^n$ je systém nepřekrývajících se intervalů a A je jejich sjednocení. Pak se definuje $\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



Jestliže je i množina A intervalem, pak je tato definice v souladu s již uvedenou definicí integrálu na intervalu.



A chybělo málo aby se to nepovedlo.

Konec poznámek 1.

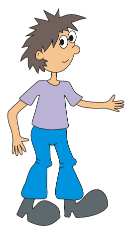
Příklady 1:

Zkontrolujte (v prvním integrálu je $I = (1,2)\times(3,4)$, ve druhém $I = (1,3)\times(2,5)$ a ve třetím $I = (0,1)\times(0,1)$):

$$\int_I \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \int_1^2 \Big(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\Big)\,\mathrm{d}x = \log\frac{25}{24}\,,$$

$$\int_I (5x^2y - 2y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y == \int_1^3 \Big(\frac{105x^2}{2} - \frac{609}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = -154\,,$$

$$\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi x/4\,\mathrm{d}x = \pi/12\,.$$



Integrovat jsem nezapomněl.

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že platí ($I = (a,b)\times(c,d)$, g je funkce na (a,b), h je funkce na (c,d)):

$$\int_I g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

jakmile pravá strana existuje.

2 Ukažte, že $\int_I \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ je obsah obdélníku I.

3. Označí-li se $\mu(I)$ obsah intervalu I, pak platí

$$\inf\{f(x,y);(x,y)\in I\}\mu(I) \le \int_I f \le \sup\{f(x,y);(x,y)\in I\}\mu(I)\,,$$

pokud $\int_I f$ existuje.

4. Dokažte, že

$$\lim_n \frac{\int_{J_n} f}{\mu(J_n)} = f(x,y)\,,$$

jestliže $\int_{J_n} f$ existují a J_n jsou otevřené intervaly obsahující bod (x,y), jejichž strany konvergují monotónně k 0.

5. Nechť $a < \alpha < \beta < b$ a $c < \gamma < \delta < d$, $I = (a,b)\times(c,d)$, $J = (\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ a funkce f je definovaná na I a rovná 0 na $I\setminus J$. Ukažte, že potom $\int_I f = \int_J f$.

6. Nechť F je spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu $I = [a,b]\times[c,d]$ a její druhá smíšená derivace F_{xy} je na I rovna f. Ukažte, že potom

$$\int_I f = F(a,c) - F(b,c) + F(b,d) - F(a,d)\,.$$

TADY SE NĚCO DĚJE!!!

Snažil jsem se ...

Konec otázek 1.

Cvičení 1:

Příklad. Spočtěte integrál z funkce $f(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{x}$ na intervalu $I = (0,1) \times (0,1)$.

Řešení. Bude se integrovat přes čtvereček.

Kam na to lidi chodí ...

Z aditivity integrálu máme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy + \frac{y^2}{x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{y^2}{x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

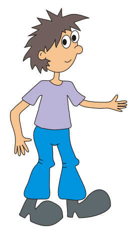
Podle definice je uvedený součet integrálů roven

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 2xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{x} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tedy postupným integrováním dostáváme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} 2xy + \frac{y^2}{x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{3x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(+\infty) = +\infty.$$

Podle zavedené terminologie tedy integrál existuje, ale nekonverguje.



To vždycky popletu, alespoň si to myslím ;-)

Příklad. Spočítejte integrál z funkce $f(x, y) = -\log(x)\log(y)$ na intervalu $I = (0, 1) \times (0, 1)$.
Řešení. Podle definice platí

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Postupným integrováním dostáváme

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} -\log(x)\log(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = -1.$$

Využili znalost jednorozměrného interálu

$$\int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = -1,$$

který se spočte snadno metodou per partes.

Ani při integrování se nesmí usnout ...

Ani jsem se o to nesnažil …

Konec cvičení 1.

Existence integrálů

V části o existenci Newtonových integrálů bylo ukázáno, že integrál z omezené spojité funkce na omezeném intervalu konverguje, tedy existuje a je konečný.

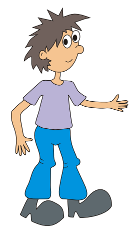
To je klíčová záležitost. Dokážeme si to i pro vícerozměrný integrál.

Je-li dána omezená spojitá funkce f na omezeném intervalu I v rovině, měl by integrál z f přes I konvergovat. Všechny vnitřní integrály $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ konvergují a rovnají se nějakému číslu závisejícímu na x, označí se $g(x)$. Aby bylo možné opět použít uvedenou existenční větu pro funkce jedné proměnné na $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je nutné vědět, že g je na (a,b) spojitá a omezená. Omezenost je zřejmá a spojitost je dokázána v kapitole o integrálech s parametrem.

To jsem se muzel hodně snažit, aby platily i takovéto věcičky. Uf.

Lze tedy tvrdit a používat toto:

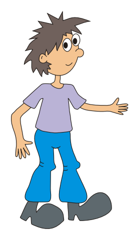
VĚTA. Je-li f spojitá omezená funkce na omezeném intervalu I, pak $\int_I f$ konverguje.



Tu větu dávno znám.

Vzhledem k monotónnosti integrálu, platí i zde srovnávací kritérium:

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $0 \leq f \leq g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.



Tu větu dávno znám.

Geometrický přístup

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a, b] \times [c, d]$ a funkce f je spojitá na I.

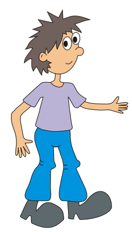
Pro každé $x \in [a, b]$ existuje $y_x \in (c, d)$ tak, že $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = f(x, y_x)(d - c)$.

Poslední součin je spojitá funkce x (podle předchozí části) a $\int_I f = (d - c) \int_a^b f(x, y_x)\,\mathrm{d}x$.
Tedy existuje $p \in (a, b)$ tak, že $\int_I f = (d - c)(b - a) f(p, y_p)$.

Tím je dokázáno následující tvrzení (věta o střední hodnotě pro integrály funkcí dvou proměnných):

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$, pak existuje bod (p, q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p, q)(d - c)(b - a)$.

Integrál má tedy geometrický význam, a to objem kvádru nad I s výškou rovnou nějaké funkční hodnotě.



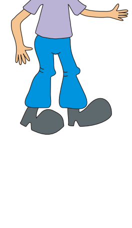
O.K.

Podobně jako u Newtonových integrálů se nyní dostane:

VĚTA. Nechť f je spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou zvolena rozdělení $a = x_0 < x_{1,n} < \ldots < x_{k_n,n} = b$ intervalu $[a,b]$ a $c = y_0 < y_{1,n} < \ldots < y_{l_n,n} = d$ intervalu $[c,d]$ taková, že délky jednotlivých intervalů nepřesahují $1/n$.

Pak pro libovolně zvolená čísla $p_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$ je

$$\lim_n \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} f(p_{i,n}, q_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$



Newton a Riemann, na to nemam.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

Podle první vlastnosti integrálu je $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Podle předchozího tvrzení platí $\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(p'_{i,n}, q'_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$ pro nějaká $p'_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q'_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.

Následující postup je zřejmý:

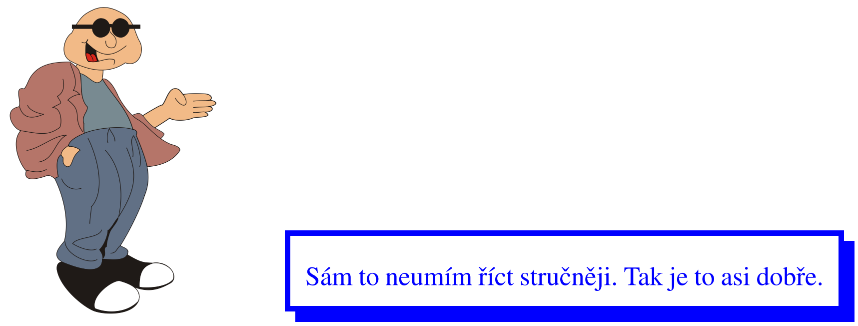
$$
\begin{aligned}
\Big| \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad &- \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} f(p_{i,n}, q_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) \Big| \\
&\le \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \Big| \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - f(p_{i,n}, q_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) \Big| \\
&\le \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} |f(p'_{i,n}, q'_{j,n}) - f(p_{i,n}, q_{j,n})|(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) \\
&\le \varepsilon \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} (x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \varepsilon(b-a)(d-c)\,.
\end{aligned}
$$

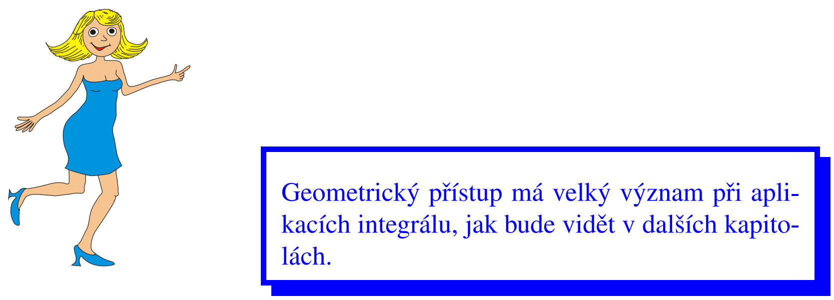
$\diamond$

Mnoho písmenek a indexů, bů.

Uvedená limita naznačuje praktický význam integrálu funkcí dvou proměnných:

Je-li $f \ge 0$, pak $\int_I f$ je roven objemu tělesa kolmého na rovinu xy, s dolní podstavou rovnou I a s „horní podstavou" rovnou grafu funkce f.



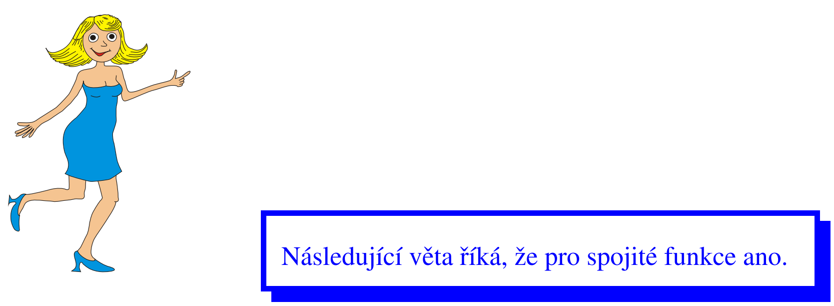


Fubiniova věta

V definici integrálu funkce dvou proměnných se nejdříve integruje podle proměnné y a potom podle proměnné x.

Není důvod, proč počítat integrál zrovna v tomto pořadí.

Vzniká otázka, zda přehozením pořadí integrování (tj. nejdříve podle x a potom podle y) vyjde stejné číslo.



VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$. Potom

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

A jak na to půjdem? Použijem geometrickou interpretaci, která nezávisí na prohození os x a y.

Zase jde o drobný formalizmus. V první půlce důkazu se nic neděje, a v druhé taky nic.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Použije se značení z předchozího důkazu.

Protože f je stejnoměrně spojitá na I, existuje n tak, že na jednotlivých intervalech $J_{i,j} = [x_{i,n} - x_{i-1,n}] \times [y_{j,n} - y_{j-1,n}]$ se hodnoty funkce f neliší o více než ε.

Podle první vlastnosti integrálu je $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Podle věty o střední hodnotě platí

$$\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(p'_{i,n}, q'_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$$

pro nějaká $p'_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q'_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.

Stejně lze postupovat u integrálu s přehozeným pořadím integrace a dostane se

$$\int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = f(p''_{i,n}, q''_{j,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n})$$

pro nějaká $p''_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $q''_{j,n} \in [y_{j-1,n}, y_{j,n}]$.
Tím se dostává

$$\begin{aligned} \Big| \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad &- \quad \int_{J_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \Big| \\ &\le \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} |f(p'_{i,n}, q'_{j,n}) - f(p''_{i,n}, q''_{j,n})|(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) \\ &\le \varepsilon \sum_{i,j=1}^{k_n,l_n} (x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{j,n} - y_{j-1,n}) = \varepsilon(b-a)(d-c)\,. \end{aligned}$$

Protože ε bylo libovolné, musí platit tvrzení věty.

$\diamond$

BTW. Všimli jste si té půlky?

Tato důležitá věta znamená, že není třeba hlídat pořadí integrace a je možné využít vhodnějšího pořadí.

V příkladech jsou uvedena zajímavá využití Fubiniovy věty.

Poznámky 2:

1. Limita součtů v geometrickém popisu integrálu může existovat i pro nespojité funkce a dokonce i v případě, kdy integrál na pravé straně neexistuje. Touto limitou se definuje tzv. Riemannův integrál funkcí dvou proměnných.

Uvedená věta říká, že pro spojité funkce na kompaktním intervalu je Riemannův integrál roven integrálu z definice na začátku kapitoly.

Definice integrálu pomocí uvedených součtů má výhodu v názornosti a nevýhody v tom, že se nedá použít k normálním výpočtům a že je omezena na kompaktní množiny. V dalších krocích je nutné definici různými způsoby rozšířit na obecnější množiny a znovu dokazovat příslušná tvrzení.

Přístup uvedený v tomto textu (tj. nejdříve probrat integrál na intervalu a pak na obecnějších množinách) je uveden z didaktických důvodů.

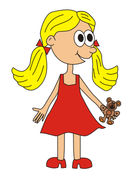
2. Je nutné podotknout, že název *Fubiniova věta* není v případě zobecněného Newtonova integrálu příliš vhodný. Uvedené tvrzení bylo samozřejmě pro tyto integrály známé dlouho před Fubinim. Italský matematik Fubini toto tvrzení dokázal pro Lebesgueovy integrály a pro mnohem obecnější funkce, než se používají v tomto textu. Jsou učebnice, kde se uvedené tvrzení pro zobecněné Newtonovy integrály nazývá *věta o záměně pořadí integrace*.

Tomu rozumím. Kde je ale to "pořadí integrace?

Uvidíte v příkladech, že existují dvojrozměrné integrály, u kterých integrace podle jednoho pořadí souřadnic lze spočítat a podle druhého pořadí spočítat nejde nebo velmi složitě.

Pomocí Fubiniovy věty lze počítat i jednorozměrné integrály. Jedná se vlastně o integrování funkcí podle parametru.

To musí ale být nepěkný trik! Zkusím to na někoho …



Chci si hrát . . .

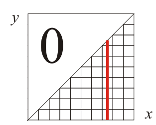
Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. Nechť funkce f je definována na $I = (0,1) \times (0,1)$ předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \ge x; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{pro } y < x. \end{cases}$$

.



Pak $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dy} = \sin x$ a tedy $\int_I f = 1 - \cos(1)$.

Ukažte, že volbou druhého pořadí integrace se dostanete do potíží:

$$\int_I f = \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy}\,.$$

To bolelo . . .

2. Integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \log x \int_a^b x^y\,\mathrm{dy}$.

Potom

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} = \log \frac{b+1}{a+1}\,.$$

Na jednom místě předchozího výpočtu je třeba předpokládat, že -1 neleží mezi čísly a, b ani se jim nerovná.

Zjistěte, kde přesně.

Podobným způsobem spočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, \mathrm{dx}\,,$$

kde $0 < a < b < +\infty$ (použijte rovnost $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{dx} = \sqrt{\pi}/2$ vypočítanou v *Příkladech 4*)

Konec příkladů 2.

Cvičení 2:

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1) \times (0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = \\ &= -(\arctan(1) - \arctan(0)) = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Nyní integrujme stejnou funkci ale v opačném pořadí, tj. nejprve podle proměnné y a potom podle proměnné x.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \\ &= (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

HA!!! CO TO BYLO???

Bylo to moc snadné?

Vidíme, že tomto případě závisí výsledek na pořadí integrace.

Tedy

$$\int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ ?$$

neexistuje.

Kdyby totiž existoval, pak by podle Fubiniovy věty musel při libovolném pořadí integrace funkce f vyjít stejný výsledek.

A to je vždycky tak neočekávané? To si budu raději kontrolovat předpoklady ...

Konec cvičení 2.

Učení 2:
Konec učení 2.

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Tak jako v případě funkcí jedné proměnné, nebude se tento text zabývat integrací na co nejobecnějších podmnožinách roviny nebo prostoru.

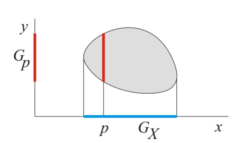
V dalším textu budou hlavně používány spojité funkce na polootevřených množinách, a to ještě v jistém smyslu hezkých.

Hezké množiny se v praxi vyskytují nejčastěji.

Otevřené množiny reálných čísel jsou sjednocením nejvýše spočetně mnoha otevřených intervalů. Integrály přes otevřené množiny na $\mathbb{R}$ se tedy dají popsat jako součty integrálů přes intervaly.

S malými rozdíly se dá teoreticky postupovat i v rovině a prostoru. Pro praktický výpočet však tento přístup není vhodný, protože popis intervalů v rovině, jejichž sjednocení je daná otevřená množina, bývá obtížný.

Proto bude uvedena obdobná definice jako v předchozí části. Základní definice se omezí na množiny, které nazveme *typu* α: polootevřená množina G v rovině je typu α, jestliže její projekce na osu x je interval (označí se G_X) a pro každé $p \in G_X$ je průnik G s kolmicí na osu x v bodě p opět interval (označí se G_p).



DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{G_X} \Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

existuje-li pravá strana.

Jestliže $\int_G f$ je konečný, říká se, že $\int_G f$ *konverguje*.

A tahle jednoduchá pozorování pro právě definovaný integrál (na množinách typu α) se dokáží stejně jako pro integál na intervalech.

POZOROVÁNÍ.

1. Nechť $\int_G f$ konverguje a g je funkce na G, která je totožná s f na vnitřku množiny G. Pak $\int_G g$ konverguje a rovná se $\int_G f$.
2. Nechť $G \subset H$ jsou množiny typu α a funkce f definovaná na H má nulové hodnoty na $H \setminus G$. Pak

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

jakmile má jedna strana smysl.

I další základní vlastnosti dvojrozměrného integrálu na množinách typu α jsou stejné jako na intervalech:

Dvě množiny typu α se *nepřekrývají*, jestliže jejich průnik má prázdný vnitřek.

VĚTA. Nechť G je podmnožina roviny typu α.

1. Integrál je lineární, tj. pro libovolné funkce f, g na G a libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_G (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_G f + \beta \int_G g\,,$$

jakmile má pravá strana smysl.

2. Nechť G je sjednocením nepřekrývajících se množin $G_1, ..., G_n$ typu α a f je funkce definovaná na G. Potom

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{G_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

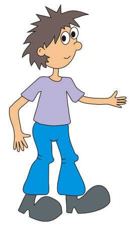
jakmile má jedna strana smysl.

3. Jsou-li g, h funkce definované na G a $h \le g$ na G pak

$$\int_G h \le \int_G g\,,$$

jakmile mají obě strany smysl.

..



To mi něco připomíná.
Přesně jako základní vlastnosti integrálu na intervalech.

Důkaz. V důkazu druhého tvrzení je opět třeba najít rozdělení G na nepřekrývající se množiny typu α takové, že průměty na osy libovolných dvou těchto množin se buď nepřekrývají nebo jsou totožné.

K tomu si stačí uvědomit, že průměty množin G_i na osy jsou intervaly a stačí vzít společné rozdělení těchto intervalů na každé ose.

Místo intervalů $I_{i,j}$ z důkazu stejného tvrzení pro intervaly se vezmou průniky $I_{i,j} \cap G_m$. Jinak je postup stejný. $\diamond$

Podobně jako pro intervaly lze nyní definovat dvojrozměrný integrál na konečných sjednoceních nepřekrývajících se množin typu α:

Nechť $\{G_i\}_{i=1}^n$ je systém nepřekrývajících se množin typu α a A je jejich sjednocení. Pak se definuje $\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n \int_{G_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Jestliže je i množina A množinou typu α, pak je tato definice v souladu s již uvedenou definicí integrálu na intervalu.

Nyní bude uveden vztah definovaného integrálu na množinách typu α k dříve definovanému integrálu na intervalech.

Jestliže je množina G sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se intervalů, je integrál funkce na G součtem integrálů této funkce na pokrývajících intervalech?

Obecně to platit nemůže, už proto, že tuto (obecně nekonečnou) řadu nelze nějak přirozeně uspořádat (na rozdíl od intervalů na přímce). Řada tedy musí konvergovat absolutně, daný integrál však absolutně konvergovat nemusí.

Je proto nutné se omezit na funkce absolutně integrovatelné, tj. funkce f mající konvergentní integrály $\int_G f$, $\int_G |f|$.

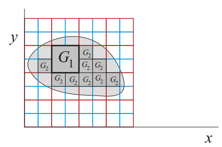
VĚTA. Každá otevřená podmnožina roviny je sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

Důkaz. Nechť G je otevřená podmnožina roviny. Pro $n \in \mathbb{N}$ se označí $\mathcal{A}_n$ rozdělení roviny na uzavřené čtverce přímkami kolmými na osy a procházejícími body $k + i/2^n$, kde $k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., 2^n$.

Dále se označí G_1 sjednocení všech intervalů z $\mathcal{A}_1$, které leží v G a G_n sjednocení G_{n-1} a všech intervalů z $\mathcal{A}_n$, které leží v G a nepřekrývá se se žádným intervalem použitým pro konstrukci G_{n-1}.

Množiny G_n tvoří rostoucí posloupnost (uzavřených) množin, které jsou sjednocením spočetně mnoha nepřekrývajících se kompaktních intervalů.

Zbývá ukázat, že $\bigcup G_n = G$. Pro bod $a \in G$ existuje n a uzavřený interval I z $\mathcal{A}_n$ obsahující a a ležící v G. Tento interval I buď je částí nějakého intervalu z $\mathcal{A}_k$ použitého pro konstrukci G_k s $k \leq n$ (potom $a \in G_k$) nebo nikoli, a pak bude I použit pro konstrukci G_{n+1} — potom $a \in G_{n+1}$.



$\diamond$

Situaci popsanou v tvrzení se bude krátce říkat *rozdělení na intervaly*.

VĚTA. Nechť G je množina typu α a f je absolutně integrovatelná funkce na G. Potom pro každé rozdělení G na intervaly $\{J_n\}$ platí

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde řada na pravé straně absolutně konverguje.

Důkaz. Vzhledem k předpokladu absolutní integrovatelnosti f lze předpokládat, že $f \geq 0$. Potom je zřejmé, že $\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Označí se $A_n = \bigcup i = 1^n J_i$ a $I_{n,x} = (\varphi(x), \psi(x)) \cap A_n$. Potom funkce $g_n(x) = \int_{I_{n,x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ konvergují bodově k funkci $g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ podle čtvrté vlastnosti Newtonova integrálu.

Nyní se použije věta o přehození limity a integrálu (integrovatelná majoranta je $|g|$):

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_n \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_{A_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Zde A_n je konečné sjednocení intervalů. $\diamond$

Předchozí tvrzení se vhodně používá v důkazové technice. Důkaz se provede na intervalech a potom pomocí součtů převede na obecnější množiny.

Poznámky 3:

1. Uvedená definice je schválně napsaná ve tvaru vhodném pro ještě obecnější množiny, kdy projekce G_X a průniky G_x nemusejí být intervaly.

Pro obecnější integrály mohou být tyto množiny mnohem složitější než intervaly (nebo jejich konečná sjednocení).

A teď něco na vysvětlenou k předchozímu důkazu: Co byly ty záhadné funkce φ a ψ?

V případě použitém v definici je G_X rovno nějakému intervalu, např. (a, b) a každý interval G_x je např. tvaru (c_x, d_x). Pak lze integrál psát ve tvaru

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{c_x}^{d_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Krajní body c_x, d_x jsou vlastně hodnoty nějakých funkcí φ, ψ definovaných na (a, b), tj. $c_x = \varphi(x), d_x = \psi(x)$. Takže množiny G použité v definici jsou vlastně množiny ležící mezi grafy dvou funkcí nad nějakým intervalem.

Zřejmě je vhodné požadovat $\varphi \leq \psi$. Nejčastěji používané případy v tomto textu budou spojité funkce φ, ψ.

2. Na základě druhého tvrzení v pozorování lze zvolit ještě jeden přístup ke zkoumání integrálů funkcí více proměnných.

Obecnou podmnožinu A roviny lze vložit do nějakého intervalu I a dodefinovat $f(x, y) = 0$ pro $(x, y) \notin A$. Pak lze použít definici integrálu na intervalu z předchozí části.

Takto dodefinovaná funkce však na onom intervalu není obecně spojitá, i když f na A spojitá byla.

Z předchozího pozorování vyplývá, že nezáleží na tom, jaký interval obsahující množinu A se zvolí. Je možné zvolit celou rovinu, bývá však vhodnější volit interval co nejmenší.

V jednotlivých případech je nutno uvážit, zda je vhodnější integrovat přes lepší množinu (interval) a ztratit spojitost funkce (body nespojitosti ale pak tvoří malou množinu) anebo integrovat přes horší množinu ale spojitou funkci.

3. Věta o vyjádření integrálu na G jako součet integrálů na intervalech vytvářejících rozdělení množiny G dává návod, jak rozšířit Riemannův integrál z intervalů na obecnější množiny.

Je vidět, že takto se dostane jen tzv. absolutně konvergentní integrál, což znamená, že $\int |f|$ konverguje pokud $\int f$ konverguje.

Riemannův integrál lze definovat i přímo na obecných množinách pomocí pokrytí množiny G nepřekrývajícími se intervaly určitého průměru. Pak některé intervaly obsahují i body neležící v dané množině. Je to jakási aproximace množiny G shora, tj. sjednocení použitých intervalů je větší než G. U věty používající rozdělení G na intervaly se používá aproximace zdola.

V matematice je vždy mnoho cest vedoucích k jednomu cíli.

Že bych z toho měl radost …

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

Jestliže je množina, přes kterou se má integrovat, zadána nikoli pomocí ohraničujících funkcí jedné proměnné, ale buď pomocí implicitně zadané funkce nebo je popsána vlastnostmi dvojic bodů, bývá někdy obtížné stanovit meze příslušných jednorozměrných integrálů.

Často pomůže představa nebo nakreslení oné množiny.

1. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x,y); x+y>1, x^2+y^2<1\}$.

Množinu G si nakreslete.

Projekce G na osu x je interval $(0,1)$. Pro každé $x \in (0,1)$ je $G_x = (1-x, \sqrt{1-x^2})$, tj. G je množina ležící mezi grafy funkcí $1-x$ a $\sqrt{1-x^2}$ na intervalu $(0,1)$. Tedy

$$\int_G f = \int_0^1 \Big(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

2. Spočítejte integrál funkce f přes množinu $G = \{(x,y); y<4, 2x<y<3x\}$.

Množinu G si nakreslete.

Projekce G na osu x je interval $(0,2)$. Na intervalu $(0,4/3)$ jsou intervaly G_x rovny $(2x,3x)$, na intervalu $(4/3,2)$ jsou rovny $(2x,4)$.

Integrál se tedy musí kvůli výpočtu rozdělit na dva sčítance (v tomto případě lze použít záměnu pořadí integrace a pak není nutné integrál rozdělovat):

$$\int_G f = \int_0^{4/3} \Big(\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} + \int_{4/3}^{2} \Big(\int_{2x}^{4} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}\,.$$

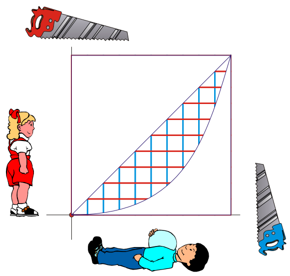
Najděte podobným způsobem meze integrálů pro integraci přes množinu $G = \{(x,y); y<1, x>y^2/2, x^2+y^2<5\}$.

Konec příkladů 3.

Cvičení 3:

Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{x} xy^2\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$



Řešení. Integrál vypočítáme tak, že nejprve funkci xy^2 zintegrujeme podle proměnné y (kde meze integrálu jsou x^2 a x) a potom podle proměnné x (od 0 do 1).

Pozor, takto jíme oříšek bez rozlousknutí skořápky. Ve skutečnosti řežeme ostošest pro všechna x od 0 do 1 a pak pro pevné x příslušný řez spočítáme. Nakonec to dointegrujeme přes x.

Tedy

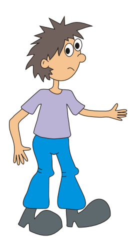
$$\int_{x^2}^{x} xy^2 \, \mathrm{d}y = x\frac{1}{3}(x^3 - x^6) = \frac{1}{3}(x^4 - x^7).$$

Tuto budeme nyní integrovat podle x

$$\int_0^1 \frac{1}{3}(x^4 - x^7) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.$$

Získali jsme tak celkový výsledek

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy^2 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{40}.$$



Tedy pouhou jednu čtyřicetinu za veliký kus mého života :-(

Konec cvičení 3.

Učení 3. Konec učení 3.

Existence integrálů

Následující existenční věty pro integrály na množinách typu α jsou stejné jako pro integrály na intervalech.

V prvním tvrzení je však potřeba jeden další předpoklad na množinu G, totiž že hranice je v jistém smyslu spojitá.

VĚTA. Nechť $\varphi \le \psi$ jsou spojité funkce na omezeném intervalu (a,b) a $G = \{(x,y); x \in (a,b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak $\int_G f$ konverguje pro každou omezenou a spojitou funkci na G.

Používáme podmínky povědomé z jednorozměr-ného integrálu.

Důkaz. Stačí ukázat, že funkce $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}$ je spojitá funkce na (a,b).

To je dokázáno v kapitole o integrálech s parametrem pro konstantní funkce φ, ψ.

Důkaz bude proveden za dodatečného předpokladu, že f je spojitá a omezená i na nějaké otevřené množině obsahující uzávěr množiny G.

Nechť $x_n \to x$ v (a,b). Potom

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\varphi(x_n)}^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy} \Big| \\
= &\Big| \int_{\varphi(x_n)}^{\varphi(x)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \big(f(x_n,y) - f(x,y)\big)\,\mathrm{dy} + \int_{\psi(x)}^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,\mathrm{dy} \Big| \\
\le\ & M|\varphi(x_n) - \varphi(x)| + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \big|f(x_n,y) - f(x,y)\big|\,\mathrm{dy} + M|\psi(x_n) - \psi(x)|\,,
\end{aligned}$$

kde M je horní mez funkce $|f|$ na (a,b).

V posledním řádku zřejmě konvergují první a poslední člen k 0. Prostřední člen konverguje k 0 podle věty o spojitosti integrálu s parametrem.

Jak jsme použili dodatečné předpoklady?

$\diamond$

Následující srovnávací kritérium plyne jednoduše ze základních vlastností integrálu.

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $f \le g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

Jako u řad a jednorozměrného integrálu.

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_{G_Y} \left(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

Důkaz. Protože f je absolutně integrovatelná, lze $\int_G f$ vyjádřit jako součet řady z integrálů $\int_{J_n} f$, kde $\{J_n\}$ je rozdělení G na intervaly. Pro každý integrál $\int_{J_n} f$ již platí Fubiniova věta. Nyní se opět použije věta o vyjádření $\int_G f$ pomocí součtu $\int_{J_n} f$, tentokrát již s přehozením pořadí integrace. $\diamond$

Všiměte si, že rozdělení G na intervaly nebylo definováno v závislosti na průmětech G_x, proto vyjde stejně podle osy x i y.

Poznámky 4:

1. Důkaz první existenční věty bez předpokladu spojitosti f na otevřené množině obsahující uzávěr množiny G je složitější a vyžaduje některá tvrzení o rozšíření zobrazení.

2. Věta o záměně pořadí integrace platí (se snadným důkazem) pro nepřekrývající se sjednocení množin typu uvedených ve Fubiniově větě.

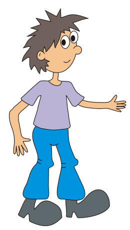
Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. Přehoďte pořadí integrace u integrálu $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Meze v druhém integrálu znamenají, že $x^2 < y < 2x$, takže $y/2 < x < \sqrt{y}$. Protože $0 < x < 2$, je $0 < y < 4$ a platí $\{(x,y); x^2 < y < 2x, 0 < x < 2\} = \{(x,y); y/2 < x < \sqrt{y}, 0 < y < 4\}$.

Výsledkem je tedy integrál $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



To byla rychlovka.

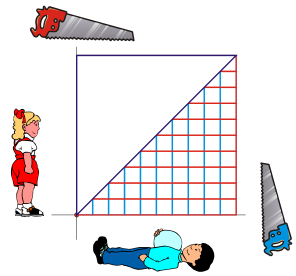
Je nutné dávat pozor, protože převod intervalů nemusí být tak přímý, jako byl v uvedeném příkladě. Následující příklad je složitější

2. Napište pro $\int_G$ obě možná pořadí integrace, je-li $G = \{(x,y); 0 < y < 1, x^2 + y^2 < 5, y^2 < 2x\}$. Při jednom pořadí budete muset integrál rozepsat jako součet tří integrálů, při druhém pořadí to nutné nebude.

Zkuste nakreslit obrázek množiny G.

Konec příkladů 4.

Cvičení 4: Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < x\}$, kde $a > 0$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace (t.j. podle kluka i holčičky).

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$$

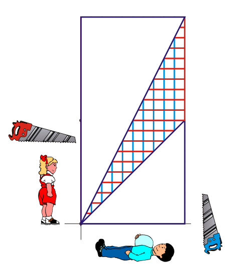
Změníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Jak je vidět z obrázku, hledaný integrál bude

$$\int_0^a \left(\int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y.$$

Já fandil oběma stejně ...

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\ x < y < 2x\}$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace.

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

který je podle definice roven integrálu

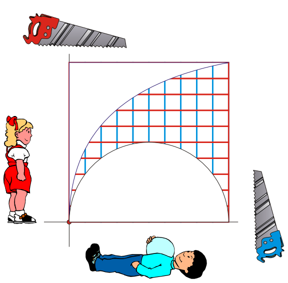
$$\int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Změníme pořadí integrace, tj. nejprve budeme integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y. Jak je vidět z obrázku, hledaný integrál bude nyní součtem dvou integrálů

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_2^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Já fandil klukovi ...

Příklad. Mějme funkci f definovanou na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} < y < \sqrt{2ax}\}$, viz obrázek.



Nechť funkce f splňuje předpoklady Fubiniovy věty. Proveďte obě pořadí integrace.

Řešení. Máme integrál

$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

který je podle definice roven integrálu

$$\int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Zaměníme pořadí integrace, tj. nejprve integrovat podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Nejprve si uvědomme, jak vlastně vypadá množina M. Proměnná x probíhá interval $(0, 2a)$, to je jasné. Proměnná y leží pro každé (pro tuto chvíli pevné) x v intervalu $(\sqrt{2ax - x^2}, \sqrt{2ax})$. To znamená mezi křivkami $\sqrt{2ax - x^2}$ a $\sqrt{2ax}$.

První z nich je půlkružnice se středem v bodě $(a, 0)$ a poloměrem a, což snadno zjistíme výpočtem

$$y = \sqrt{2ax - x^2},$$

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

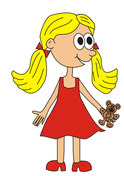
$$(x-a)^2+y^2=a^2.$$

Druhá z křivek, tedy $\sqrt{2ax}$, je graf funkce "druhá odmocnina."Při záměně pořadí se nejprve integruje podle proměnné x.

Z obrázku je patrné, že pro $y \in (0,a)$ musíme integrál podle x rozdělit na součet dvou integrálů, a sice na integrál přes interval $(\frac{y^2}{2a}, a-\sqrt{a^2+y^2})$ a na integrál přes $(a+\sqrt{a^2+y^2}, 2a)$. Pro $y \in (a,2a)$ integrujeme podle x přes interval $(\frac{y^2}{2a}, 2a)$.

Dostáváme tak výsledek

$$\int_0^{2a}\left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^a\left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2+y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{a+\sqrt{a^2+y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y+$$
$$+\int_a^{2a}\left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y.$$



My holčičky máme vždycky nejvíc práce . . .

Konec cvičení 4.

SUBSTITUCE

Jak lze převést substituční větu z jedné proměnné na více proměnné?

Jednak se transformuje množina, přes kterou se integruje a jednak se transformuje funkce, která se integruje!

Už to vypadalo, že se sem nikdy nedostaneme . . .

Nejdříve je nutné se podívat na transformaci množin. Na přímce zobrazí spojitá funkce interval na interval. V rovině může spojitá funkce zobrazit interval např. na kružnici, tj. na množinu bez vnitřních bodů.

Předně je proto nutné pro substituce nalézt vhodné funkce! A to dá práci.

Je potřeba, aby se otevřená množina převedla opět na otevřenou množinu a její hranice na hranici nové množiny.

Stejně jako u jedné proměnné musí být transformační zobrazení prosté.

Zřejmě musí být i spojité a, protože se v transformaci funkce opět vyskytnou derivace, měly by být i parciální derivace transformace spojité.

Bude nutné přidat ještě jeden přirozený požadavek odpovídající nenulovosti derivace.

Důkaz následující věty je komplikovaný a vyžaduje jisté znalosti z geometrie roviny, které jdou nad rámec tohoto textu. Proto důkaz uveden nebude.

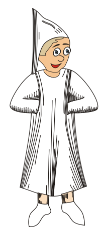
VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Uvedený determinant se značí $J(\varphi, \psi)$ a nazývá Jacobiho determinant nebo stručněji Jacobián. Zobrazení Φ mající uvedené tři vlastnosti předchozí věty se nazývá regulární zobrazení.

Regulární zobrazení jsou jakési plastické deformace definičního oboru. Lokálně (v bodě) se plastická hmota definičního oboru zředí s koeficientem rovným Jacobiánu.



To, že vše vyjde je moje dílo. Jsem na to pyšný!

Dík. BTW, je to v podstatě to samé jako v jednorozměrném případě. Hm …

VĚTA. Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na H. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Vzhledem k podobnosti s jednorozměrným případem se budeme soustředit na odchylky ;-)

Poznámky 5:

1. Často se pojem *regulární zobrazení* používá pro zobrazení splňující jen první dvě podmínky předchozí definice, tj., zobrazení nemusí být prosté. Pro účely substituce v integrálu je však nutné použít prostá zobrazení, proto byla tato podmínka zahrnuta do definice regulárního zobrazení.

Kdyby prosté nebylo, mohli bychom jeho obraz "zintegrovat"třeba pětinásobně.

Substituce je pouze jenom uplácání hmoty do lepšího tvaru. Je to úplně jasné.

V případě funkcí jedné proměnné definované na intervalu dává uvedená definice regulárního zobrazení funkce mající nenulovou spojitou derivaci na daném intervalu (třetí podmínka o prostém zobrazení je splněna automaticky).

Pokud se regulární zobrazení otevřené množiny G na otevřenou množinu H rozšíří spojitě i na hranici množiny G, zobrazuje tuto hranici na hranici množiny H (nemusí však být na hranici prostě).

A co pro neomezené množiny???

2. Pro funkce jedné proměnné se uvedená formulace věty o záměně proměnných v integrálu na první pohled liší od dříve uvedené věty o substituci.

Tam byl jacobián (tj. derivace φ') bez absolutní hodnoty. Ale meze a, b mohly být uspořádány jako $a > b$.

Pak se přehozením mezí změnilo znaménko a to vlastně změní φ' na $|\varphi'|$.

To si dobře promyslete.

Uvědomte si, že pokud zobrazení φ mělo v nějakém bodě derivaci zápornou a navíc všude spojitou nenulovou, byla derivace záporná všude (nemohla se přes nulu "přehoupnout"), a tedy zobrazení bylo klesající a proto $a > b$.

Konec poznámek 5.

Příklady 5:

1. Polární souřadnice.

Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$.

Spočtěte, že jacobián $J = r$.

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a+2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

Tato množina je malá ve smyslu, že změna hodnot funkce na této množině neovlivní hodnotu integrálu.

2. Má se spočítat obsah množiny $G = \{(x, y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1, 2), v \in (2, 3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

Pokud spočtete jacobián inverzního zobrazení, dostanete hodnotu $3y^2/x$, což je $3v$ a tedy převrácená hodnota prvního jacobiánu. Tato situace platí obecně (viz *Otázky*).

Výsledný obsah je pak roven $\log(3/2)/3$.

3. Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte

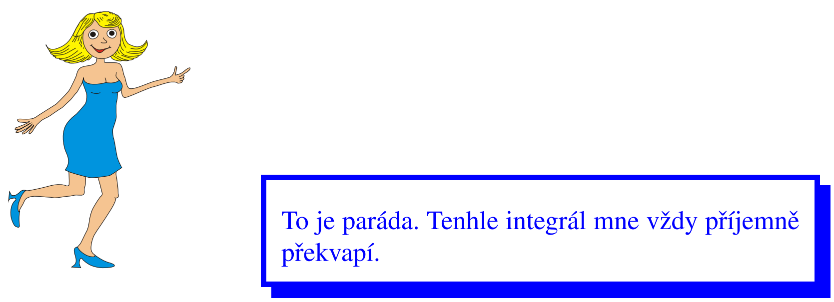
$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dy} = \int_K e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,,$$

kde K je první kvadrant.

V posledním integrálu zaveďte polární souřadnice a dostanete integrál

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, \mathrm{d}r \,,$$

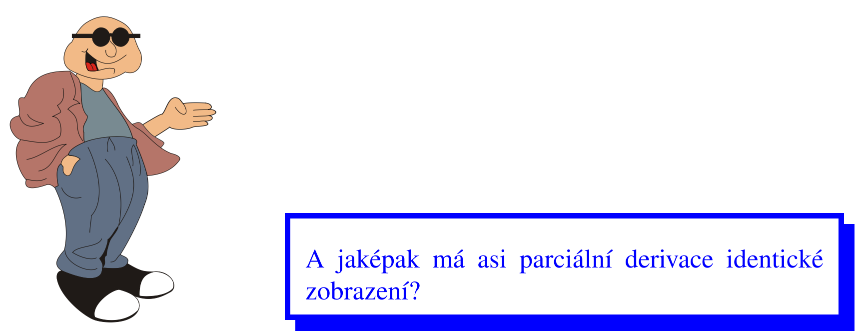
který snadno spočtete. Výsledkem bude $L = \sqrt{\pi}/2$.

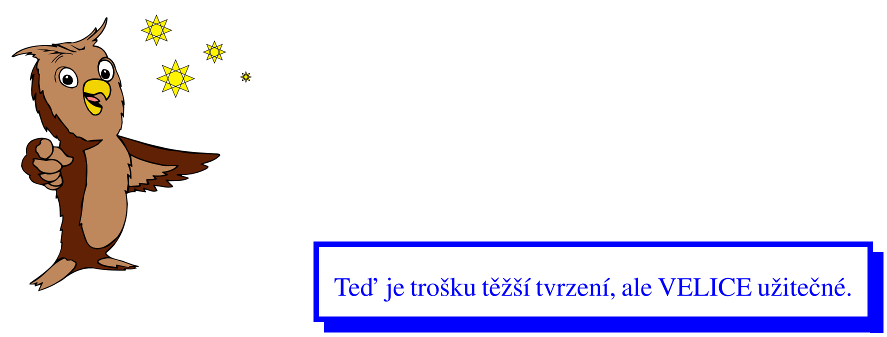


Konec příkladů 5.

Otázky 5:

1. Upravte definici regulárního zobrazení a větu o substituci pro jednorozměrný případ a ukažte, že dostanete věty o substituci pro Newtonův integrál.





2*. Dokažte následující tvrzení: *Zobrazují-li $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ regulárně otevřenou množinu G na množinu H a (g,h) je inverzní zobrazení $H \to G$, pak $J(\varphi,\psi) = 1/J(g,h)$, dosadí-li se do pravé strany za u, v jejich vyjádření v x, y.*

[Použijte parciální derivace složených funkcí.]

To je sqělý. To používám rád.

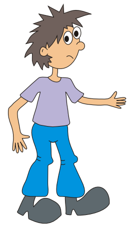
Alespoň jeden ten jacobián se ale musí někde najít, není-liž pravda.

Ano. Mimochodem, díky našim definicím se $\mathbb{R}^2$ chová jako hmota a substituce tomu rozumí. To je hezké.

Konec otázek 5.

Cvičení 5:

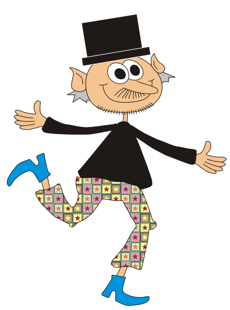
Ne všechno jde dobře řezat.



Například kokosový ořech je záludná potvora.

Když se na kokosový ořech podíváš kouzelnými brýlemi, je hranatý a dobře se řeže.

Místo kouzelných brýlí stačí tu množinu transformovat na hezčí množinu pomocí substituce.



Substituce je základem mnohých kouzel . . .

Například substituce $y = 1/x$ transformuje náš x-ový dvorek $[0, 1]$ na y-ový lán $[1, +\infty]$.

A to se u nekonečna ještě musí přemýšlet.

Substituce je nejčastěji používána na kulaté věci jako ořech, ten se přetransformuje na kvádr a ten se dobře řeže.

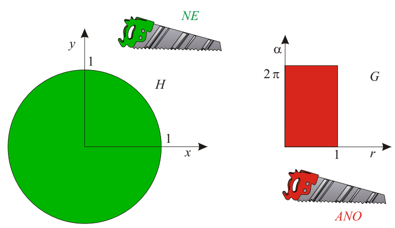
Zkusíme dvojrozměrný ořech.

Ořech v rovině je například $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y daná vzorci

$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$$

s jacobiánem $J = r$ nám dovolí (SUBSTITUCE) napsat ořech takto $G = \{(r, \alpha) : 0 < r \leq 1, 0 < \alpha < 2\pi\}$.

Polární ořech je hranatý a bude se dobře řezat.



Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

Podle věty o substituci bude platit pro rovinnou velikost ořechu (integrujeme $f(x, y) = 1$)

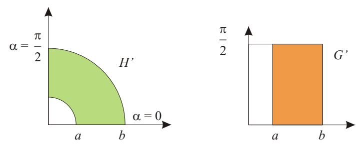
$$\int_H f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(r, \alpha), \psi(r, \alpha))|J(\varphi, \psi)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,,$$

tedy

$$\int_H 1\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_G r\ \ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$

A vpravo je to hranaté, tedy se to snadno spočte.

Podobně se transformují takzvané "koko-bello".



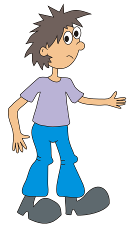
Raději bych opravdu řezal hranatý ořech, ale nevím, jak bude chutnat ten hranatý.

Mimochodem, nějaké body ořechu zmizely (pro $\alpha = 0$), což nevadí.

Existují i jednodušší substituce. Například $u = y$, $v = x$. Hodí se na něco?

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 1 \ \mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_H 1 \ \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_G 1\,|1|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = \int_0^2 \left(\int_0^1 1 \ \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u\,.$$

Prohození.



Prohození. Jednou mne prohození bolelo.

Příklad. Vypočítejte integrál funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množině $M = \{x^4 + y^4 \leq 1\}$.
Řešení. Pro výpočet zvolíme polární souřadnice. Provedeme tedy substituci

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Jak snadno zjistíme, vzorem množiny M je množina

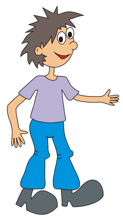
$$\left\{(r,\varphi) : \, r \leq (\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^{-\frac{1}{4}}, \, \varphi \in (-\pi,\pi)\right\}.$$

Jsem HAPPY !!!

Platí tedy

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-\frac{1}{4}}} r^2 r\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^{-1}\,\mathrm{d}\varphi = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

A co kdyby ti Mikuláš s čertem přinesli substituci $x = r\sqrt{\cos\varphi}, \quad y = r\sqrt{\sin\varphi}$?



Jsem HAPPIER !!!

Problém bývá s tím, jak najít při dané substituci obraz množiny. Zpravidla stačí vzoreček, kterým je množina definována pro (x, y) přepsat pomocí substitučních vzorečků.

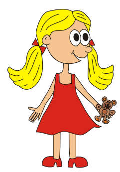
A to samé je při celém integrování. Přepíše se podle substituce množina, funkce i ta tajuplná $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = |J|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$. Tedy substituce z jedné vody načisto.

"Vypočítejte integrál funkce $x + y$ na množině $\{1 < x + y < 2,\ 3 < x - y < 4\}$"
se po substituci $x + y = u$, $x - y = v$ tváří
"Vypočítejte integrál funkce $u \cdot |J|$ na množině $\{1 < u < 2,\ 3 < v < 4\}$, kde J je determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial u}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix} ."$$

Něco se ale muselo udělat. Najít inverzní formulku pro x a y. Protože ta substituce je obecně záludná.

Pokud bych uhodl substituci ve tvaru $x = u + v$, $y = u - v$, byl bych vysmátej. Jenom bych to přepsal.



Já jsem taky vysmátá.

Konec cvičení 5.

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Teorie trojrozměrného integrálu je obdobná teorii dvojrozměrného integrálu a v mnoha případech je změna jen formální.

Trojrozměrný integrál se převede na sled jednorozměrného a dvojrozměrného (a tedy tří jednorozměrných integrálů) vzorcem

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde (a,b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H je projekce množiny G do roviny yz.

Pro použití předchozí části je třeba požadovat, aby H byla typu α nebo konečné sjednocení takových nepřekrývajících se množin a projekce G do osy x byl interval nebo konečné sjednocení intervalů. Tyto množiny se mohou také nazývat typu α (nebo jsou to sjednocení konečně mnoha nepřekrývajících se množin typu α).

Podívejte se nyní po řadě na tvrzení pro dvojrozměrné integrály:

Pozorování a základní vlastnosti jsou stejné.
Věta o rozdělení otevřených množin na intervaly je stejná.
Stejný je i popis integrálu pomocí součtu integrálů přes nějaké rozdělení na intervaly.
Stejné jsou i věty o existenci.

Fubiniova věta platí i pro trojrozměrné integrály:

Trojrozměrný integrál spojité absolutně integrovatelné funkce lze počítat v jakémkoli pořadí souřadnic.

Možností těchto pořadí je šest a je asi zbytečné je tu všechny vypisovat. Prosím.

Tvrzení o záměně souřadnic za jiné se také změní jen formálně.

Nejdříve se zadefinuje *regulární zobrazení* prostoru do sebe:

Nechť jsou na otevřené množině G definovány funkce $u = \varphi(x, y, z), v = \psi(x, y, z), w = \tau/x, y, z)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce φ, ψ, τ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

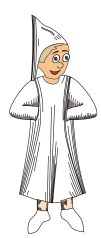
Pak se zobrazení Φ nazývá regulární a zobrazuje G na otevřenou množinu. Uvedený determinant je Jacobiho determinant nebo Jacobián a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

Platí tvrzení

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))|J(\varphi, \psi, \tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.



TO jsem byl já. Byla to skvostná chvilka :-)

Příklady 6:

1. Určete příslušné meze v jednotlivých jednorozměrných integrálech pro $\int_G f$, kde $G = \{(x, y, z); x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 3\}$.

Zřejmě je $0 < z < 3 - x - y, 0 < y < 3 - x, 0 < x < 3$, takže výsledkem je

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\sin\alpha\,, \quad z = z\,.$$

Snadno se zjistí, že jacobián je opět roven r jako u polárních souřadnic a že toto zobrazení je prosté pro $r > 0, \alpha \in (a, a + 2\pi), z \in \mathbb{R}$, kde a je nějaké libovolné reálné číslo.

Tuto množinu zobrazuje na celé $\mathbb{R}^3$ kromě jedné poloroviny (podobně jako jedna polopřímka u polárního zobrazení).

Má se spočítat integrál

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Zavedením válcových souřadnic se dostanou meze $z \in (0, a), r \in (0, 2\cos\alpha), \alpha \in (0, \pi/2)$ a integrál

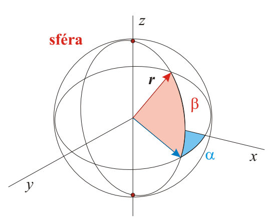
$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\alpha} zr^2\;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z = 8a^2/9\,.$$

3. Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r'\cos\alpha, y' = r'\sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r\cos\alpha\cos\beta\,, \quad y = r\sin\alpha\cos\beta\,, \quad z = r\sin\beta\,,$$

Spočtěte jacobián a dostanete $-r^2\cos\beta$.

Sférické zobrazení tedy bude regulární např. na množině $r > 0, \alpha \in (0, 2\pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazí tuto množinu na celý prostor kromě uzavřené poloroviny určené osou z a kladnou osou x. Tato množina je opět malá vzhledem k integraci a změny funkce na ní neovlivní výsledek integrace.



Lze opět měnit vhodně intervaly úhlu α a tak otáčet polorovinu kolem osy z.

Spočtěte objem elipsoidu daného vztahem $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1$ pro $a, b, c > 0$. Použijte modifikované sférické souřadnice $x = ar\cos\alpha\cos\beta, y = br\sin\alpha\cos\beta, z = r\sin\beta$, takže jacobián bude roven $r^2 abc\cos\beta$ (spočtěte ho). Dostanete integrál přes interval, který se dá napsat jako součin tří jednorozměrných integrálů s výsledkem $4\pi abc/3$.

Sférické souřadnice odpovídají zeměpisným (severní šířka, západní délka).

Konec příkladů 6.

Otázky 6:

1. Dokažte příslušná tvrzení obdobná dokázaným tvrzením pro dvojrozměrný integrál.

2. Napište alespoň jednu rovnost pro záměnu pořadí integrace v trojrozměrném integrálu.

Konec otázek 6.

Cvičení 6:

ANO.

Konec cvičení 6.

STANDARDY z kapitoly

INTEGRÁLY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Základem integrace funkcí více proměnných je integrace přes řezy.

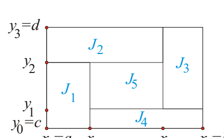
DEFINICE. Nechť je dána funkce $f(x, y)$ definovaná na intervalu $I = (a, b) \times (c, d)$ v rovině. Pak se definuje integrál funkce dvou proměnných f na I jako

$$\int_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud má pravá strana smysl.

Jestliže $\int_I f$ je konečný, říká se, že $\int_I f$ *konverguje*.

Jo, a celé to je lineární, aditivní a jde to počítat po hranatých kouscích.



Jo, a ty integrály jsou Newtonovy (nebo Riemannovy, případně J-integrál, K-integrál či L-integrál).

Integrál z $x+y$ na intervalu $I=(1,3)\times(2,5)$ se počítá podle definice

$$\int_I (x+y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_1^3 \Big(\int_2^5 (x+y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \dots$$

Existence integrálů

Klíčová věta je tahle:

VĚTA. Je-li f spojitá omezená funkce na omezeném intervalu I, pak $\int_I f$ konverguje.

Teď pozor: na neomezených intervalech nebo u neomezených funkcí se hraje na majoranty !!!

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na intervalu I a $0 \le f \le g$ na I, pak $\int_I f$ konverguje, jakmile $\int_I g$ konverguje.

Geometrický přístup

Úvaha o tání ledu: integrál je roven objemu hranolu s výškou rovnou hodnotě v jednom bodě (neví se ve kterém).

Nechť I je nyní kompaktní interval $[a, b] \times [c, d]$ a funkce f je spojitá na I.
Pro každé $x \in [a, b]$ existuje $y_x \in (c, d)$ tak, že $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = f(x, y_x)(d - c)$.
Poslední součin je spojitá funkce x a $\int_I f = (d - c) \int_a^b f(x, y_x)\,\mathrm{d}x$.
Tedy existuje $p \in (a, b)$ tak, že $\int_I f = (d - c)(b - a) f(p, y_p)$.

Úvaha o tání ledu funguje:

VĚTA. Je-li f spojitá funkce na kompaktním intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$, pak existuje bod (p, q) ležící uvnitř I tak, že $\int_I f = f(p, q)(d - c)(b - a)$.

Předchozí úvaha provedená na malých obdélníčcích dává rovnost mezi dvojrozměrným Newtonovým integrálem a dvojrozměrným Riemannovým integrálem (pro spojité funkce na kompaktních intervalech).

Fubiniova věta

Následující věta říká, že pro spojité funkce lze prohodit pořadí integrace $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

VĚTA. (Fubini) Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na intervalu $I=[a,b]\times[c,d]$. Potom

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\Big)\,\mathrm{dy}\,,$$

jakmile má jedna strana smysl.

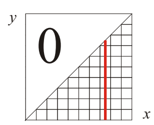
Dokazuje se pomocí předchozí úvahy i Riemannově interpretaci dvojrozměrného integrálu.

Tato důležitá věta znamená, že není třeba hlídat pořadí integrace a je možné využít vhodnějšího pořadí. Klasický je tento příklad:

Funkce f je definována na $I=(0,1)\times(0,1)$ předpisem

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{pro } y\ge x;\\ \frac{\sin x}{x}, & \text{pro } y<x. \end{cases}$$

.



Jde spočítat jen jedním směrem: $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{dy}=\sin x$ a tedy $\int_I f = 1-\cos(1)$.

Někdy je v jednorozměrném integrandu vidět, že vznikl jako vnitřní integrál v dvojrozměrném integrálu. Pak si napíšeme jak to vypadalo před tím zintegrováním, přehodíme pořadí integrace (když to jde) a zkusíme spočítat …

Takto integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx}$$

lze spočítat pomocí Fubiniovy věty, pokud si všimnete, že pro $x \in (0,1)$ je $x^b - x^a = \int_a^b x^y \log x \,\mathrm{dy}$. Potom

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y \,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y \,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,\mathrm{dy} = \log \frac{b+1}{a+1}\,.$$

Příklad. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definovanou na intervalu $(0,1) \times (0,1)$. Integrujte f nejprve podle proměnné x a potom podle proměnné y.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = - \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \\ &= -(\arctan(1) - \arctan(0)) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Nyní integrujme stejnou funkci ale v opačném pořadí, tj. nejprve podle proměnné y a potom podle proměnné x.

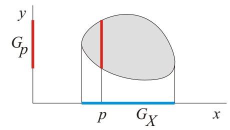
$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Předchozí příklad ukázal, že někdy na pořadí integrace záleží. POZOR!!!

INTEGRACE NA OBECNÝCH MNOŽINÁCH

Integraci rozšíříme z intervalů na obecnější množiny. Začneme s těmi, které mají průmět na osu x jeden interval a jeho bodům odpovídají řezy intervaly. Budeme těmto množinám říkat množiny *typu α*.

Polootevřená množina G v rovině je typu α, jestliže její projekce na osu x je interval (označí se G_X) a pro každé $p \in G_X$ je průnik G s kolmicí na osu x v bodě p opět interval (označí se G_p).



A nyní rozšíříme definici integrálu na množiny typu α. Integrovat se bude přes průmět a v něm přes řezy:

DEFINICE. Nechť f je funkce definovaná na polootevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ typu α. Pak se definuje dvojrozměrný integrál funkce f přes množinu G rovností

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{G_X} \Big(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

existuje-li pravá strana.

Jestliže $\int_G f$ je konečný, říká se, že $\int_G f$ *konverguje*.

Existence integrálů

Pro omezenou spojitou na omezeném intervalu je vše v pořádku. Ten vzoreček je klíčový.

VĚTA. Nechť $\varphi \le \psi$ jsou spojité funkce na omezeném intervalu (a,b) a $G = \{(x,y); x \in (a,b), \varphi(x) < y < \psi(x)\}$. Pak $\int_G f$ konverguje pro každou omezenou a spojitou funkci na G a platí

$$\int_G f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Fubiniova věta

V následujícím tvrzení se předpokládá, že množina G typu α je stejného typu i vzhledem k ose y: projekce G na osu y je interval G_Y a průsečíky množiny G s kolmicemi na osu y v bodech jsou intervaly G_p.

VĚTA. (**Fubini**) Nechť G je množina typu α vzhledem k osám x i y. Je-li f spojitá na G a absolutně integrovatelná, pak

$$\int_{G_X} \left(\int_{G_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{G_Y} \left(\int_{G_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,,$$

jakmile $\int_G f$ konverguje.

Tak to je rozumné. Pokud tam není zaručena ta absolutní integrovatelnost, tak by to nemuselo vyjít (viz o velký kus výše).

SUBSTITUCE

Substituce u dvou proměnných používá regulárního zobrazení (Jacobián nenulový, nedegeneruje „dvojrozměrnost“ množiny) otevřené množiny G na otevřenou množinu H:

VĚTA. Nechť G je otevřená množina v rovině a funkce $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ jsou definovány na G. Nechť jsou splněny následující podmínky:

1. Funkce φ, ψ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$
je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi) : G \to \mathbb{R}^2$ je prostá.

Potom Φ zobrazuje G na otevřenou množinu H.

Uvedený determinant se značí $J(\varphi, \psi)$ a nazývá Jacobiho determinant nebo stručněji Jacobián. Zobrazení Φ mající uvedené tři vlastnosti předchozí věty se nazývá regulární zobrazení.

Regulární zobrazení jsou jakési plastické deformace definičního oboru. Lokálně (v bodě) se plastická hmota definičního oboru zředí s koeficientem rovným Jacobiánu.

Dík. BTW, je to v podstatě to samé jako v jedno-rozměrném případě. Hm …

Takže věta o substituci zní takto:

VĚTA. Nechť (φ, ψ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na H. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(\varphi,\psi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Polární souřadnice.
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y je dáno vzorci $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$.

Spočte se, že jacobián $J = r$.

Toto zobrazení je prosté pro $r \in (0,\infty)$ a pro α z libovolného otevřeného intervalu $(a, a+2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel a.

Tato množina je malá ve smyslu, že změna hodnot funkce na této množině neovlivní hodnotu integrálu.

Takže

$$STD_{(r,\alpha)} = \{(r,\alpha) \in R^2 |\, r \in (0,\infty), \alpha \in (0,2\pi)\}\,.$$

Takže

$$STD_{(x,y)} = \{(x,y) \in R^2 |\, (y=0) \Rightarrow (x<0)\}\,.$$

Pomocí polárních souřadnic spočtěte plochu kruhu.

A pak pomocí polárních souřadnic spočtěte obsah množiny $\{x^2 + y^2 < 2x\}$. Neudělejte to takhle blbě:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\alpha} r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\alpha \,.$$

A takhle si děláme vlastní souřadnice (teda vlastně substituci, ta je to hlavní):

Příklad. Spočtěte obsah množiny $G = \{(x, y); 2x < y^2 < 3x, 1/y < x < 2/y\}$.

Řešení. Uvedené nerovnosti dávají návod položit $u = xy, v = y^2/x$.

Množina G leží v prvním kvadrantu, ve kterém zřejmě existují spojité parciální derivace uvedených zobrazení.

Nyní vypočtěte z obou rovností x a y: $x = \sqrt[3]{u^2/v}, y = \sqrt[3]{uv}$ (obě nové proměnné jsou také kladné).

Výpočet byl jednoznačný, což znamená, že dané zobrazení je prosté a zobrazuje G na interval $u \in (1, 2), v \in (2, 3)$. Zbývá spočítat jacobián: $J = (3v)^{-1}$, což je na vyšetřované množině nenulové.

Pokud spočtete jacobián inverzního zobrazení, dostanete hodnotu $3y^2/x$, což je $3v$ a tedy převrácená hodnota prvního jacobiánu. Tato situace platí obecně.

Výsledný obsah je pak roven $\log(3/2)/3$.

Laplaceův integrál $L = \int_0^\infty e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$ lze snadno spočítat pomocí Fubiniovy věty.

Vzpomeňte si, že primitivní funkce k e^{-x^2} nelze napsat známými funkcemi a že tedy tento integrál nelze spočítat obvyklým způsobem.

Spočtěte

$$L^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \int_0^\infty e^{-y^2} \,\mathrm{d}y = \int_K e^{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

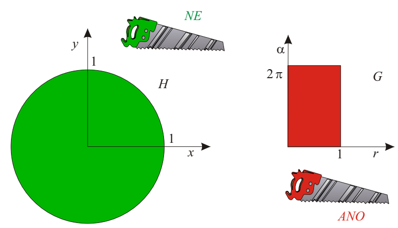
kde K je první kvadrant.

V posledním integrálu zaveďte polární souřadnice a dostanete integrál

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \int_0^\infty r e^{-r^2} \,\mathrm{d}r \,,$$

který snadno spočtete. Výsledkem bude $L = \sqrt{\pi}/2$.

Kulatou věc převedeme na hranatou a bude se dobře řezat.



Kruh v rovině je $H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Záměna polárních souřadnic r, α za kartézské souřadnice x, y daná vzorci

$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$$

s jacobiánem $J = r$ nám dovolí (SUBSTITUCE) napsat kruh takto $G = \{(r, \alpha) : 0 < r \leq 1, 0 < \alpha < 2\pi\}$. tedy

$$\int_H 1 \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G r \ \ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$

Pomaleji: Nejprve nahradíme množinu H množinou $H_{(x,y)} = H \cap STD_{(x,y)}$, tedy

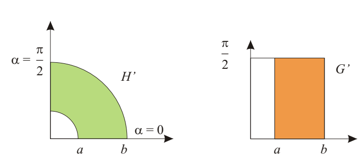
$$H_{(x,y)} = \{(x, y) \in STD_{(x,y)} | x^2 + y^2 \leq 1\}\,.$$

Pak přepíšeme $H_{(x,y)}$ na $G_{(r,\alpha)}$ použitím polárních souřadnic (substituce $(x, y) \longleftrightarrow (r, \alpha)$, $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$) a dostaneme

$$G_{(r,\alpha)} = \{(r, \alpha) \in STD_{(r,\alpha)} | r^2 \leq 1\}\,.$$

Polární souřadnice jako zobrazení jsou prosté pro $r \in (0, \infty)$ a pro α z otevřeného intervalu $(0, 2\pi)$ a tedy v celé rovině kromě bodů uzavřené polopřímky vycházející z počátku a svírající s kladným směrem osy x úhel 0.

A ještě jednou polární souřadnice na jinou množinu:



"Vypočítejte integrál funkce $x+y$ na množině $\{1<x+y<2,\ 3<x-y<4\}$"
se po substituci $x+y=u$, $x-y=v$ tváří
"Vypočítejte integrál funkce $u\cdot|J|$ na množině $\{1<u<2,\ 3<v<4\}$, kde J je determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial u}(u-v) \\ \frac{\partial}{\partial v}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v) \end{vmatrix} \text{."}$$

POZOR: Něco se ale muselo udělat. Najít inverzní formulku pro x a y (zde se muselo spočítat $x=u+v$, $y=u-v$). Protože ta substituce je obecně záludná!!!

TROJROZMĚRNÉ INTEGRÁLY

Dvojrozměrný integrál se (definicí) převedl na jednorozměrný. Podobně se postupuje ve vyšších dimenzích. Promítne se na nějaký podprostor a přes něj se integrují řezy:

Trojrozměrný integrál se převede na sled jednorozměrného a dvojrozměrného (a tedy tří jednorozměrných integrálů) vzorcem

$$\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde (a,b) je interval obsahující projekci množiny G na osu x a H je projekce množiny G do roviny yz.

A takhle se to počítá zpaměti:

Příklad. Určete příslušné meze v jednotlivých jednorozměrných integrálech pro $\int_G f$, kde $G=\{(x,y,z);x>0,y>0,z>0,x+y+z<3\}$.

Řešení. Zřejmě je $0 < z < 3 - x - y, 0 < y < 3 - x, 0 < x < 3$, takže výsledkem je

$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\, .$$

Tvrzení o záměně souřadnic za jiné se změní jen formálně.

Nechť jsou na otevřené množině G definovány funkce $u = \varphi(x, y, z), v = \psi(x, y, z), w = \tau/x, y, z)$, které mají následující vlastnosti:

1. Funkce φ, ψ, τ mají spojité parciální derivace na G.
2. Determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \tau}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial w} & \frac{\partial \psi}{\partial w} & \frac{\partial \tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$

   je v každém bodě G nenulový.
3. Funkce $\Phi = (\varphi, \psi, \tau) : G \to \mathbb{R}^3$ je prostá.

Pak se zobrazení Φ nazývá regulární a zobrazuje G na otevřenou množinu. Uvedený determinant je Jacobiho determinant nebo Jacobián a značí se $J(\varphi, \psi, \tau)$.

VĚTA. Nechť (φ, ψ, τ) je regulární zobrazení na otevřené množině G a f je spojité zobrazení na G. Potom (H je obraz G)

$$\int_H f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_G f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)) |J(\varphi, \psi, \tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w,$$

jestliže má jedna strana smysl.

Ten Jacobián je ten převodní koeficient substituce:

$$(x, y, z) = (\varphi, \psi, \tau)(u, v, w)$$

$$\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = |J(\varphi, \psi, \tau)|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w\, .$$

Cylindrické (válcové) souřadnice jsou vlastně polární souřadnice pro dvě proměnné s nezměněnou zbývající proměnnou:

$$x = r\cos\alpha\,,\quad y = r\sin\alpha\,,\quad z = z\,.$$

Snadno se zjistí, že jacobián je opět roven r jako u polárních souřadnic a že toto zobrazení je prosté pro $r > 0, \alpha \in (a, a+2\pi), z \in \mathbb{R}$, kde a je nějaké libovolné reálné číslo.

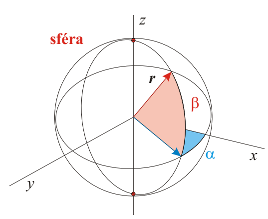
Tuto množinu zobrazuje na celé $\mathbb{R}^3$ kromě jedné poloroviny (podobně jako jedna polopřímka u polárního zobrazení).

Sférické souřadnice jsou obdobou polárních souřadnic o jednu dimenzi výše. Bod (x, y, z) se promítne do roviny xy na bod (x', y'). Opět se označí r (resp. r') vzdálenost bodu (x, y, z) (resp. (x', y')) od počátku a dále β úhel, který svírá spojnice bodu (x, y, z) s počátkem s rovinou xy (tento úhel se bere v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$). Potom $x' = r'\cos\alpha, y' = r'\sin\alpha$, kde α je stejný úhel jako u polárních souřadnic. Vyjádřením r' pomocí r a β se dostane

$$x = r\cos\alpha\cos\beta\,,\quad y = r\sin\alpha\cos\beta\,,\quad z = r\sin\beta\,,$$

Spočtěte jacobián a dostanete $-r^2\cos\beta$.

Sférické zobrazení tedy bude regulární např. na množině $r > 0, \alpha \in (0, 2\pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazí tuto množinu na celý prostor kromě uzavřené poloroviny určené osou z a kladnou osou x. Tato množina je opět malá vzhledem k integraci a změny funkce na ní neovlivní výsledek integrace.



Spočtěte objem koule, válce a kužele.